情報認識
「確率と統計の復習（第2章）」

- 担当教員: 杉山 将（計算工学専攻）
- 居室: W8E-505
- 電子メール: sugi@cs.titech.ac.jp

確率変数

- カテゴリ y やパターン x を確率変数(random variable)として扱えば，次のような「確率」が定義できる.

$$p(x), p(y), p(x,y), p(y \mid x), p(x \mid y)$$

- カテゴリ y : 離散型(discrete type)の確率変数
- パターン x : 連続型(continuous type)の確率変数

確率関数と確率密度関数

- $p(y)$:カテゴリ y の生起確率を表す確率関数(probability function)

$$\sum_{y=1}^{m} p(y) = 1$$

$$p(y) \geq 0 \ \text{ for } \ y = 1,2,\ldots,m$$

- $p(x)$:パターン x の確率密度関数(probability density function)

$$\int_D p(x)dx = 1$$

$$p(x) \geq 0 \ \text{ for all } x \in D$$

同時確率と条件付き確率

- $p(x,y)$ ： x と y の同時確率(joint probability)
- 周辺化(marginalization)：

$$\sum_{y=1}^{m} p(x,y) = p(x)$$

$$\int_D p(x,y)dx = \underbrace{p(y)}_{\text{周辺確率 (marginal probability)}}$$

- $p(x \mid y), p(y \mid x)$: 条件付き確率(conditional probability)

$$p(y \mid x)p(x) = p(x,y) = p(x \mid y)p(y)$$

事前確率・事後確率・ベイズの定理

- 事前確率(a priori probability) $p(y)$:
  パターンを知る前のカテゴリの出現確率
- 事後確率(a posteriori probability) $p(y \mid x)$:
  パターンを知った後のカテゴリの出現確率
- ベイズの定理(Bayes' theorem):

$$p(y \mid x) = \frac{p(x \mid y)\,p(y)}{p(x)}$$

期待値・分散共分散行列・独立性

- 期待値(expectation)：

$$E[x] \equiv \int_D x p(x) dx$$

- 分散共分散行列(variance covariance matrix)：

$$V[x] \equiv E\left[(x - E[x])(x - E[x])^T\right]$$

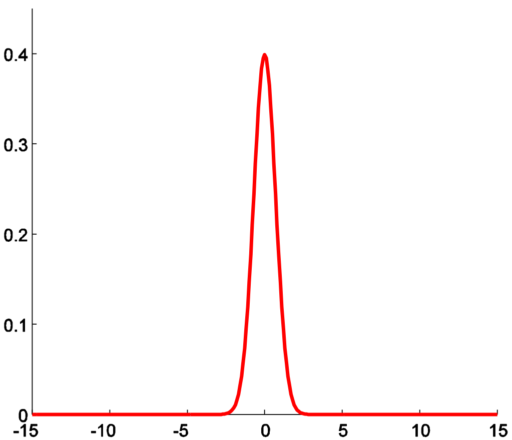
- x と x' が独立(independent)：

$$p(x, x') = p(x) p(x')$$

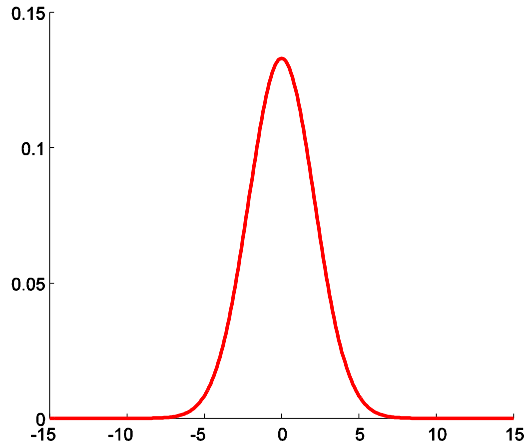
正規分布

- ２つのパラメータ: μ, σ^2

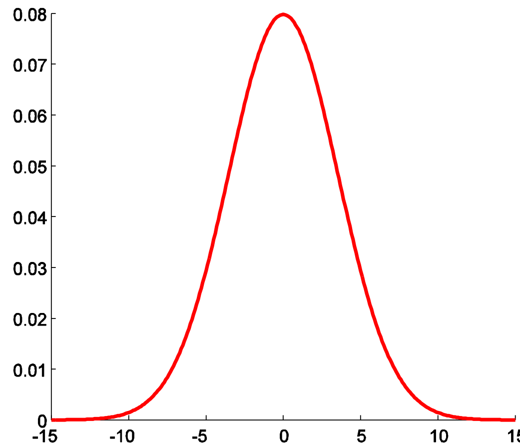
$$p(x;\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \right)$$



$\sigma^2 = 1$



$\sigma^2 = 9$



$\sigma^2 = 25$

- 正規分布の平均と分散:

$$E[x] = \mu \qquad V[x] = \sigma^2$$

多次元正規分布

- d 次元の確率ベクトル: $x = (x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(d)})^T$
- 2つのパラメータ:
  - d 次元ベクトル μ
  - d 次元正値行列 Σ

$\det(\Sigma)$: Σの行列式

$$p(x; \mu, \Sigma) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2} \det(\Sigma)^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} (x-\mu)^T \Sigma^{-1} (x-\mu) \right)$$

- 正規分布の期待値，分散共分散行列

$$E[x] = \mu \qquad V[x] = \Sigma$$

多次元正規分布(つづき)

- 共分散がゼロ(即ち $\Sigma = diag(\sigma_i^2)$)のとき

$diag(\sigma_i^2)$: $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_d^2$ を対角成分に持つ対角行列

$$p(x;\mu,\{\sigma_i^2\}_{i=1}^d) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}\prod_{i=1}^d \sigma_i} \exp\left(-\sum_{i=1}^{d} \frac{(x^{(i)} - \mu^{(i)})^2}{2\sigma_i^2} \right)$$

- さらに分散が等しい(即ち $\Sigma = \sigma^2 I$)のとき

I :単位行列

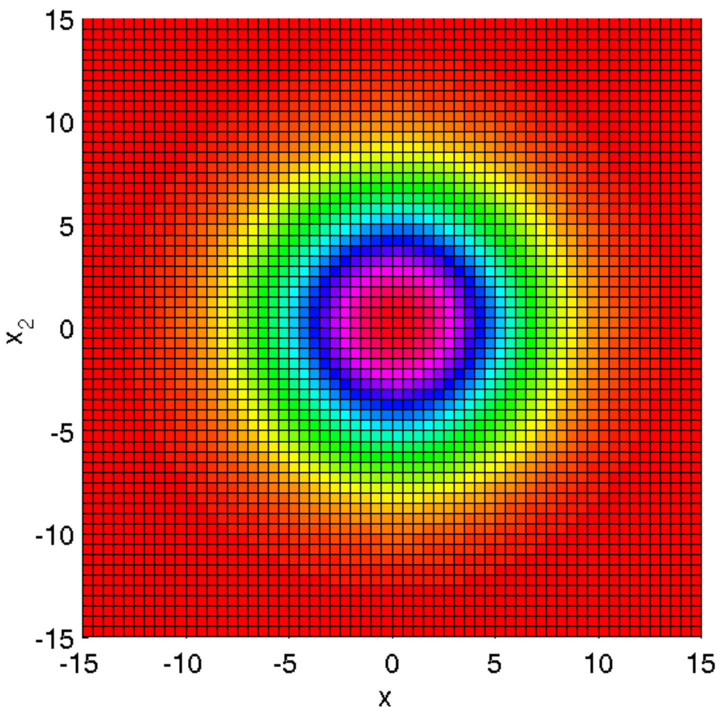
$$p(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{d/2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^T (x-\mu)}{2\sigma^2} \right)$$

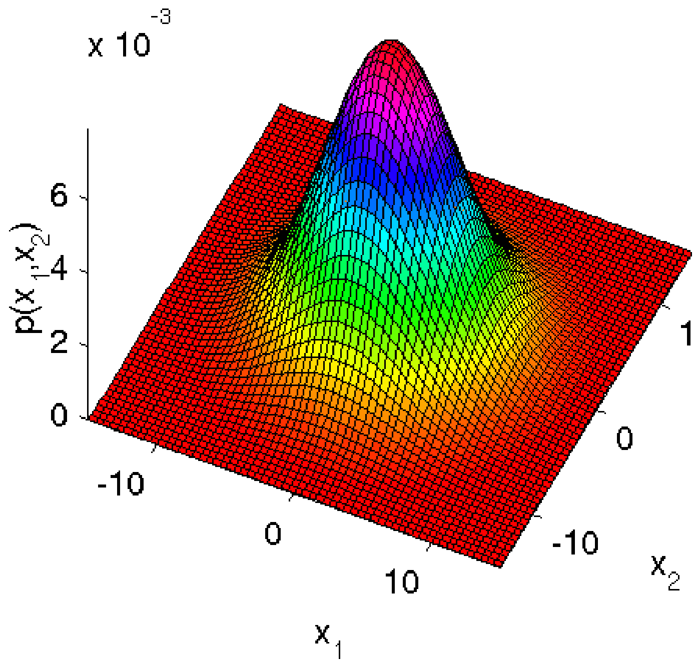
多次元正規分布の例（1）

$d = 2$

$\mu = (0,0)^T$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}$$





多次元正規分布の例(2)

$$d = 2 \qquad \mu = (0,0)^T \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} 20 & 10 \\ 10 & 9 \end{pmatrix}$$