2011年後期
通信伝送工学

第5回　通信路符号化

阪口 啓 <sakaguchi@mobile.ee.titech.ac.jp>

2011年11月15日

講義スケジュール前半

	日付	教科書	内容
第1回	10月4日	1	通信伝送のモデルと具体例
第2回	10月11日	10.1 – 10.3	情報理論1:情報源符号化
第3回	10月25日	10.4 – 10.5	情報理論2:データ圧縮
	11月1日		休講
第4回	11月8日	10.6 – 10.7	情報理論3:通信路容量
第5回	11月15日	10.8	情報理論4:通信路符号化
第6回	11月22日	10.10 – 10.11	情報理論5:誤り訂正符号
	11月29日		中間試験

前回の復習

- 遷移行列

$$\mathbf{P}(Y \mid X) = \begin{bmatrix} p(y_1 \mid x_0) & \cdots & p(y_{K-1} \mid x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p(y_1 \mid x_{J-1}) & \cdots & p(y_{K-1} \mid x_{J-1}) \end{bmatrix}$$

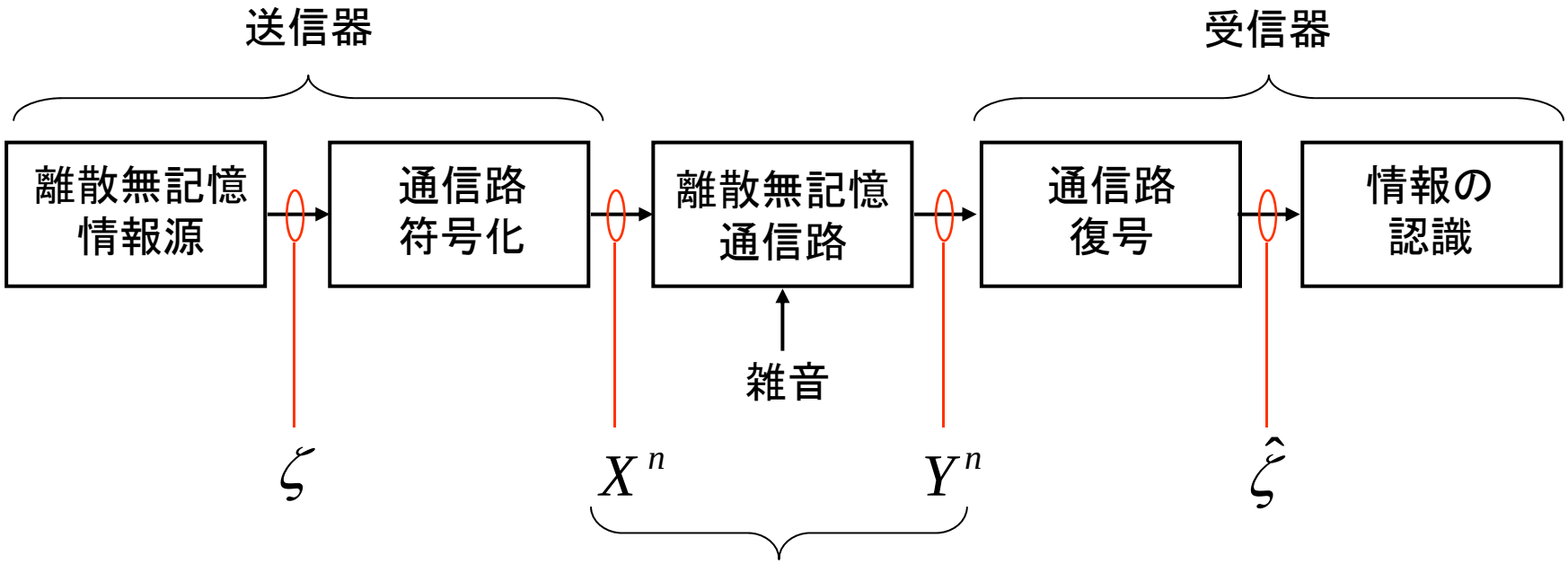
- 相互情報量

$$I(X;Y) = H(X) - H(X \mid Y)$$

- 通信路容量

$$C = \max_{p(x_j)} I(X;Y)$$

通信システム



$$P(Y^n \mid X^n)$$

拡張離散無記憶通信路

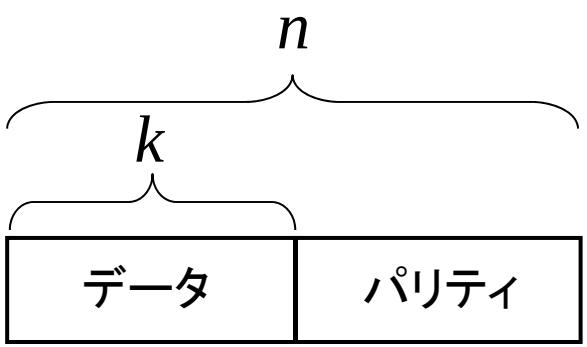
$$P(y^n \mid x^n) = \prod_{i=1}^{n} p(y_i \mid x_i)$$

通信路符号化

■ 離散無記憶情報源

$$\zeta = \{s_0 \quad s_1 \quad \cdots \quad s_{M-1}\}$$

$$M = 2^k$$

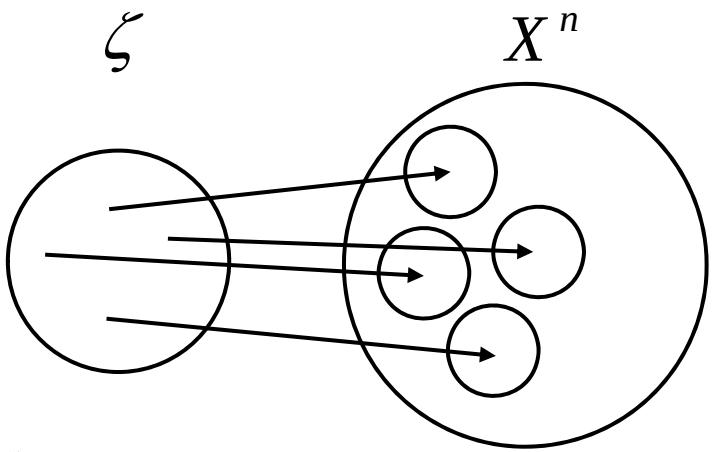


■ 符号化（マッピング）

$$\{s_0 \quad s_1 \quad \cdots \quad s_{M-1}\} \rightarrow \{x^n(0) \quad x^n(1) \quad \cdots \quad x^n(M-1)\}$$

■ 符号化率（冗長性）

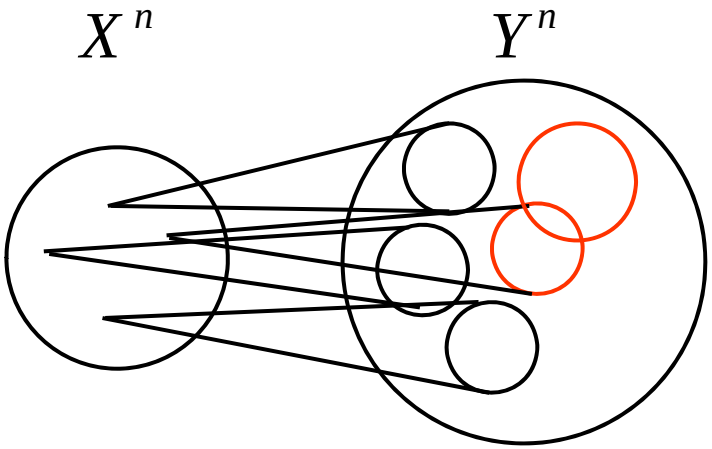
$$r = \frac{k}{n} = \frac{\log_2 M}{n} < 1$$



誤り率

■ 復号関数

$$g : Y^n \to \{\hat{s}_0 \quad \hat{s}_1 \quad \cdots \quad \hat{s}_{M-1}\}$$



■ 条件付誤り率

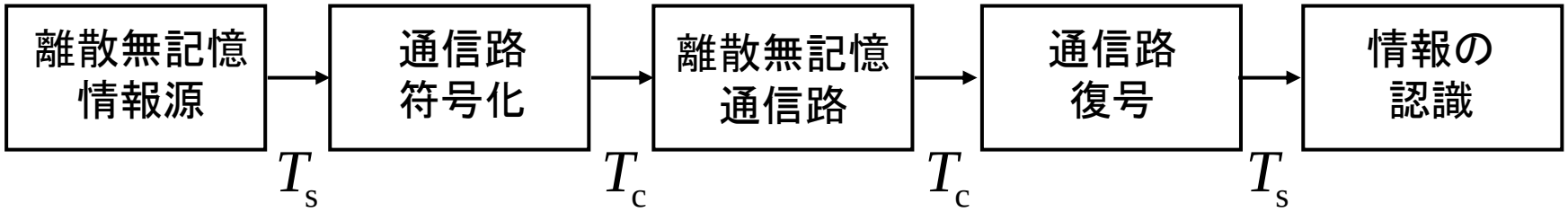
$$P_i = P\left(g(Y^n) \neq i \mid X^n = x^n(i)\right)$$

$$= \sum_{y^n} p\left(y^n \mid x^n(i)\right) I(g(y^n) \neq i) \qquad I(\cdot) \text{ 判定関数}$$

■ 平均誤り率

$$P_{\mathrm{e}} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} P_i$$

通信路符号化定理



$H(\zeta)$ $\qquad$ $C = \max I(X;Y)$ $\qquad$ $P_\varepsilon < \varepsilon$

- 平均情報レート $H(\zeta)/T_s$ ≦ 単位時間当り通信容量 C/T_c [bits/s]

→ 誤り率を任意に小さくできる符号が存在する

- 平均情報レート $H(\zeta)/T_s$ ≧ 単位時間当り通信容量 C/T_c [bits/s]

→ 誤り率を任意に小さくできる符号は存在しない

タイプライタ通信路

■ 通信路容量

$$C = \max I(X;Y)$$

$$= \log_2 26 - 1 = \log_2 13 \quad \text{[bits]}$$

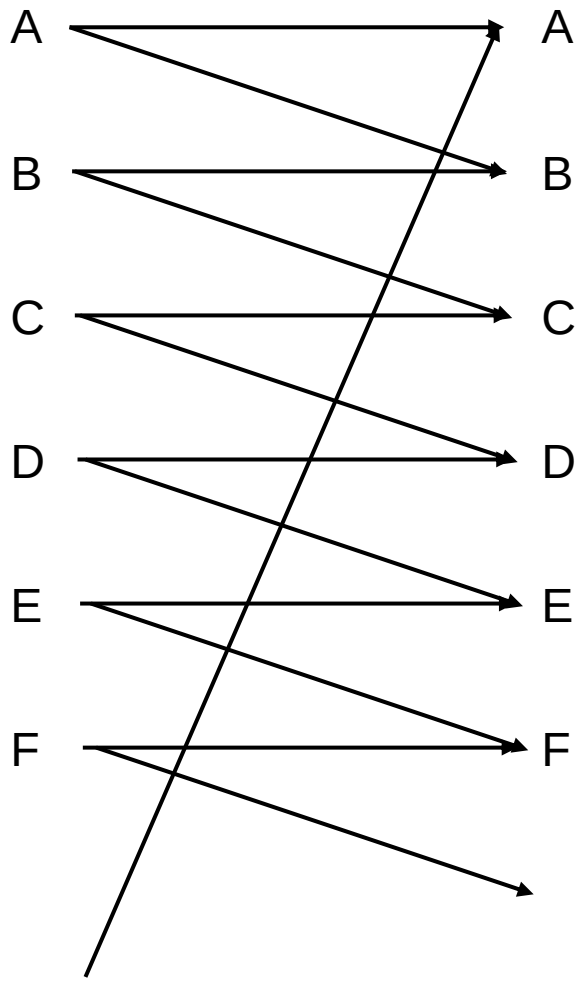
■ 通信路符号化

A, C, E, …, Y	B, D, F, …, Z

$$T_s = 2T_c$$

$$\frac{H(\zeta)}{T_s} = \frac{\log_2 26}{2T_c} \le \frac{C}{T_c} = \frac{\log_2 13}{T_c}$$

→ エラーフリー



誤りゼロ符号の存在

$T_s = nT_c$ の符号化を行ったとき

$$H(\zeta) = \underbrace{H(\zeta \mid Y^n)}_{0} + I(\zeta; Y^n)$$

$$= I(\zeta; Y^n)$$

$$\leq I(X^n; Y^n) \quad \text{——— 符号化}$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} I(X_i; Y_i) \quad \text{——— 無記憶離散}$$

$$\leq nC \quad \text{——— 通信路容量}$$

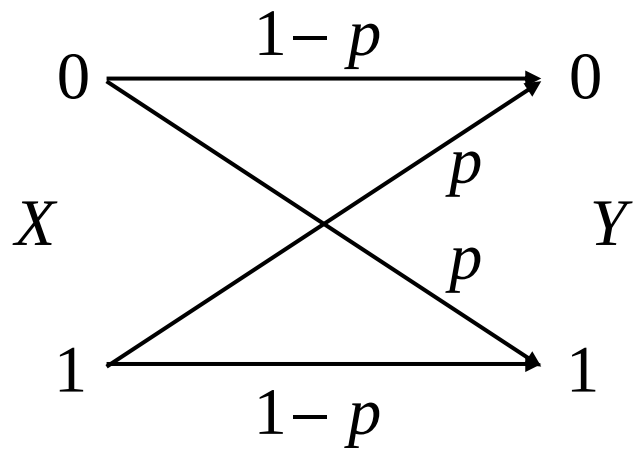
$$P_e = 0 \quad \longrightarrow \quad H(\zeta) \leq nC \quad \longrightarrow \quad \frac{H(\zeta)}{T_s} \leq \frac{C}{T_c}$$

二元対称通信路

■ 二元対称通信路

$$C = \max I(X;Y)$$

$$= H(X) - X(X \mid Y) = 1 - H(p) \text{ [bits]}$$



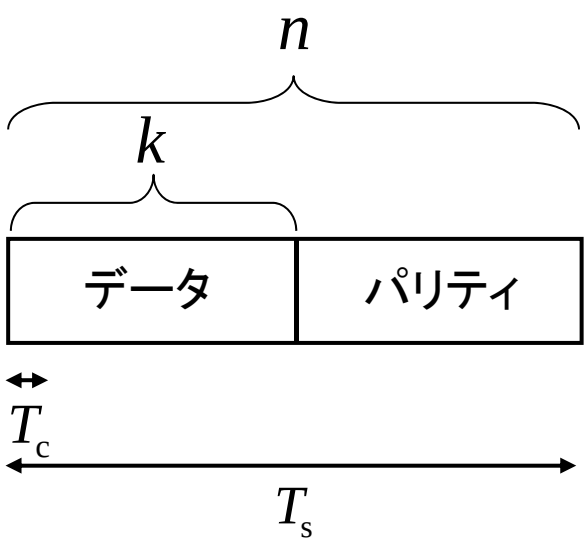
■ バイナリ符号化

$$\max H(\zeta) = k \text{ [bits]}$$

■ 通信路符号化定理

$$\frac{H(\zeta)}{T_s} = \frac{H(\zeta)}{nT_c} = \frac{k}{nT_c} \le \frac{C}{T_c}$$

$$\longrightarrow \quad r \le C$$

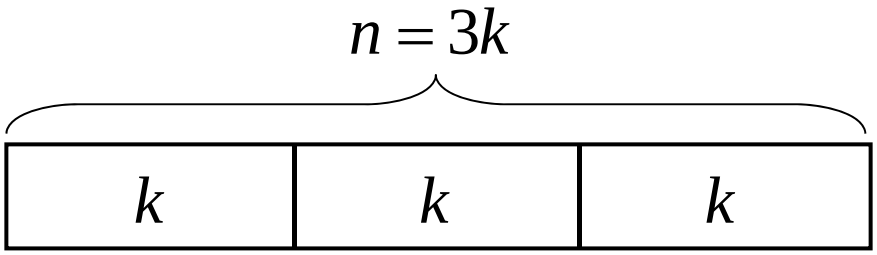


繰返し符号

■ 繰返し符号

同一情報を繰返し送信

$$n = (2m+1)k$$



■ 多数決復号

- 1つの情報を誤って受信する確率

$$P_{\mathrm{s}} = 1-(1-p)^k$$

- 符号語を誤って受信する確率

$$P_{\mathrm{e}} = \sum_{i=m+1}^{n} \binom{n}{i} P_{\mathrm{s}}^{i} (1-P_{\mathrm{s}})^{n-i}$$

- *n = 3k* のとき

$$P_{\mathrm{e}} = 3P_{\mathrm{s}}^{2}(1-P_{\mathrm{s}}) + P_{\mathrm{s}}^{3}$$

通信路符号化定理による考察

■ 通信路容量

$k=1$、$p=10^{-2}$ のとき

$C=1-H(p)=0.9192$ [bits]

■ 通信路符号化定理

$\varepsilon=10^{-8}$ 任意に小さな誤り率

$r=k/n=1 \longrightarrow P_e=10^{-2}>\varepsilon$

$r=k/n=1/9 \longrightarrow P_e=10^{-8}\leq\varepsilon$

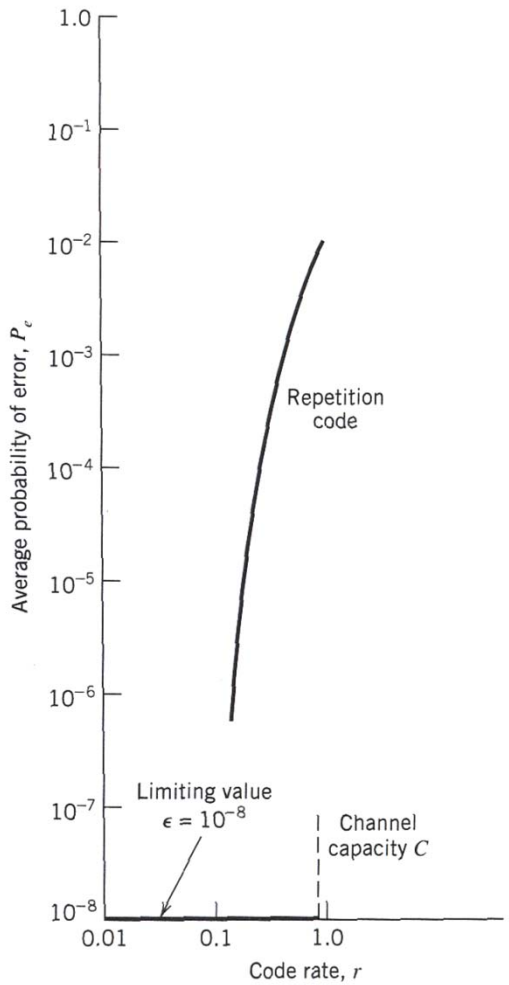


FIGURE 9.12 Illustrating significance of the channel coding theorem.

まとめ

1. 通信路符号化により通信の信頼性を改善

$$\{s_0 \quad s_1 \quad \cdots \quad s_{M-1}\} \rightarrow \{x^n(0) \quad x^n(1) \quad \cdots \quad x^n(M-1)\}$$

2. 通信路符号化定理を満たせば任意に誤りを軽減可能

$$\frac{H(\zeta)}{T_{\mathrm{s}}} \leq \frac{C}{T_{\mathrm{c}}}$$

3. 二元対称通信路の通信路符号化定理

$$r = k/n \leq C$$