1　複素数とは

高校で、二次方程式の解すべてを表すには実数だけでは不十分で複素数を用いる必要があることを学んだ。ここでは複素数について、まず定義と演算規則を与え、それにしたがって複素数の図形表現とそれから得られる複素数の極形式を述べる。複素数は応用数学で重要であり、例えば、電気回路の交流応答など複素数を用いることで容易に解ける。そのとき複素数の極形式が用いられる。

2　複素数の定義

複素数は次の形をもつ量である。

(2.1)　$z = x + jy$

ここに x,y は実数、j は次で定義される単位。

(2.2)　$j = \sqrt{-1}$　　$j^2 = -1$

数 x を複素数の実部、数 y を虚部と呼ぶ。それぞれを $\mathrm{Re}[z], \mathrm{Im}[z]$ と表す。y=0 のとき複素数は実数になる。したがって実数は複素数に含まれる。x=0 のときは複素数は純虚数。

3　複素数についての規則

基本規則は次の二つだけ。

1．複素数 $z = x + jy$ が零であるということは $x = 0$ かつ $y = 0$ と同値（必要十分条件）である。

2．複素数は代数の通常規則に従う。ただし $j^2 = -1$。

これら二つの規則から以下のすべてが導き出される。複素数の加算、減算、かけ算そして割り算は

(3.1)　$z_1 \pm z_2 = (x_1 + jy_1) \pm (x_2 + jy_2) = (x_1 \pm x_2) + j(y_1 \pm y_2)$

(3.2)　$z_1 z_2 = (x_1 + jy_1)(x_2 + jy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + j(x_1 y_2 + x_2 y_1)$

(3.3)　$\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{x_1 + jy_1}{x_2 + jy_2}$　　ただし $x_2 + jy_2 \neq 0$

分母と分子とに $x_2 - jy_2$ をかけると次の便利な形になる。

(3.4)　$\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{(x_1 + jy_1)(x_2 - jy_2)}{(x_2 + jy_2)(x_2 - jy_2)} = \dfrac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + j\dfrac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$

以上より二つの複素数の和、差、積そして商はそれらも複素数である。

二つの複素数が等しいということ、すなわち

(3.5)　$x_1 + jy_1 = x_2 + jy_2$

は、式（3.1）を用いて

(3.6)　$(x_1 - x_2) + j(y_1 - y_2) = 0$

であり、規則１によって

(3.7)　$x_1 - x_2 = 0$　　$\therefore x_1 = x_2$　　$y_1 - y_2 = 0$　　$\therefore y_1 = y_2$

である。したがって”二つの複素数が等しい”は”実部同士および虚部同士が等しい”と同値。

虚部の符号だけ異なる二つの複素数は”複素共役”である。すなわち

(3.8)　$z_1 = x + jy$

および

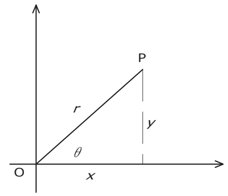
(3.9)　$z_2 = x - jy$

は複素共役である。複素共役を次の記号で表す。

(3.10)　$z_1 = \overline{z_2}$　あるいは　$z_2 = \overline{z_1}$

4　複素平面と極形式

複素数は代数的な量であるが図形表現すると便利である。図の xy 平面上の点 P を考える。



点 P にはその点の座標である x,y が対応している。そこで点 P を次の複素数 z に対応させることができる。

(4.1)　$z = x + jy$

この図表現で x 軸を実軸と呼ぶ。それは複素数の実部がこの軸の上の点で表されるからである。同様に y 軸を虚軸と呼ぶ。このようにその平面上の点が複素数に対応づけされている平面を複素数平面あるいは複素平面と呼ぶ。座標（x,y）は、また、次のように極座標（r,θ）で表すことができる。

(4.2)　$x = r\cos\theta$　　$y = r\sin\theta$

すると、式（4.2）を（4.1）に代入することによって複素数の次の表現が得られる。

(4.3)　$z = r(\cos\theta + j\sin\theta)$

これを複素数の極形式と呼ぶ。ただし数 r は常に正とする。これを複素数の絶対値と呼ぶ。図に示すように r は OP の長さであるから次式が成り立つことが分かる。

(4.4)　$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$

角 θ を z の偏角（argument）と呼ぶ。arg(z)あるいは $\angle z$ と表す。図を参照し次が成り立つことが分かる。

(4.5)　$\cos\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$　　$\sin\theta = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

テーラー展開式は次で与えられる。

$$f\left(x_0+h\right)=f\left(x_0\right)+\frac{h}{1!}f'\left(x_0\right)+\frac{h^2}{2!}f''\left(x_0\right)+\cdots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}\left(x_0\right)+\cdots$$

特に x_0=0、h=x とするとマクローリン展開式である。すなわち、

$$f\left(x\right)=f\left(0\right)+\frac{x}{1!}f'\left(0\right)+\frac{x^2}{2!}f''\left(0\right)+\cdots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}\left(0\right)+\cdots$$

三角関数と指数関数のマクローリン展開は、三角関数、指数関数の導関数を用いて次である。

(4.6)
$$\cos\theta=1-\frac{\theta^2}{2!}+\frac{\theta^4}{4!}-\frac{\theta^6}{6!}+\cdots$$
$$\sin\theta=\theta-\frac{\theta^3}{3!}+\frac{\theta^5}{5!}-\frac{\theta^7}{7!}+\cdots$$
$$e^u=1+\frac{u}{1!}+\frac{u^2}{2!}+\frac{u^3}{3!}+\cdots$$

これらより次が導かれる。

$$\cos\theta+j\sin\theta=\left(1-\frac{\theta^2}{2!}+\frac{\theta^4}{4!}-\frac{\theta^6}{6!}+\cdots\right)+j\left(\theta-\frac{\theta^3}{3!}+\frac{\theta^5}{5!}-\frac{\theta^7}{7!}+\cdots\right)$$
$$=1+j\theta-\frac{\theta^2}{2!}-j\frac{\theta^3}{3!}+\frac{\theta^4}{4!}+j\frac{\theta^5}{5!}+\cdots$$
$$=1+j\theta+\frac{\left(j\theta\right)^2}{2!}+\frac{\left(j\theta\right)^3}{3!}+\frac{\left(j\theta\right)^4}{4!}+\frac{\left(j\theta\right)^5}{5!}+\cdots$$

結局、次が成り立つ。

(4.7) $$\cos\theta+j\sin\theta=e^{j\theta}$$

θ を $-\theta$ に置き換えて次を得る。

(4.8) $$\cos\theta-j\sin\theta=e^{-j\theta}$$

これらより次を得る。

(4.9) $$\cos\theta=\frac{e^{j\theta}+e^{-j\theta}}{2}\qquad\sin\theta=\frac{e^{j\theta}-e^{-j\theta}}{2j}$$

これらは三角関数と指数関数の関係を表す。複素数を介して三角関数と指数関数が結びついた。

次の関係が成り立つ。

(4.10) $$e^{x_1}e^{x_2}=e^{x_1+x_2}$$

証明：

$$e^{x_1}e^{x_2}=\left(1+\frac{x_1}{1!}+\frac{x_1{}^2}{2!}+\frac{x_1{}^3}{3!}+\cdots\right)\left(1+\frac{x_2}{1!}+\frac{x_2{}^2}{2!}+\frac{x_2{}^3}{3!}+\cdots\right)$$
$$=1+\left(\frac{x_1}{1!}+\frac{x_2}{1!}\right)+\left(\frac{x_1{}^2}{2!}+\frac{x_1}{1!}\frac{x_2}{1!}+\frac{x_2{}^2}{2!}\right)+\left(\frac{x_1{}^3}{3!}+\frac{x_1}{1!}\frac{x_2{}^2}{2!}+\frac{x_1{}^2}{2!}\frac{x_2}{1!}+\frac{x_2{}^3}{3!}\right)+\cdots$$
$$=1+\frac{1}{1!}\left(x_1+x_2\right)+\frac{1}{2!}\left(x_1{}^2+2x_1x_2+x_2{}^2\right)+\frac{1}{3!}\left(x_1{}^3+3x_1x_2{}^2+3x_1{}^2x_2+x_2{}^3\right)+\cdots$$
$$=1+\frac{1}{1!}\left(x_1+x_2\right)+\frac{1}{2!}\left(x_1+x_2\right)^2+\frac{1}{3!}\left(x_1+x_2\right)^3+\cdots$$
$$=e^{x_1+x_2}$$

〔寄り道：歴史的には、積を和に変換することでかけ算を簡単に計算するために見つけられた関数が累乗関数（べき関数）である。上の関係を満たすのが累乗関数なのである。ただし指数関数に用いられる e は不思議な数〕

指数関数の引数は複素数でも構わない（代数規則に従うから）。すると式（4.10）を用いて

(4.11) $$e^{x+jy}=e^xe^{jy}=e^x\left(\cos y+j\sin y\right)$$

式（4.10）より整数 n に対して

(4.12) $$\left(e^{j\theta}\right)^n=e^{jn\theta}$$

これと式（4.7）により

(4.13) $$\left(\cos\theta+j\sin\theta\right)^n=\cos n\theta+j\sin n\theta$$ （ドモアブルの定理）

式（4.3）と（4.7）を用いると複素数の極形式表示を得る。

(4.14) $$z=x+jy=r\left(\cos\theta+j\sin\theta\right)=re^{j\theta}$$

この複素数の極形式は、複素数同士の乗算、除算をするときにとても便利である。例えば

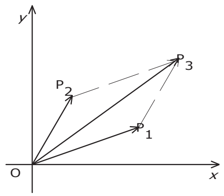
(4.15) $$z_1z_2=r_1e^{j\theta_1}r_2e^{j\theta_2}=r_1r_2e^{j(\theta_1+\theta_2)}$$

二つの複素数のかけ算では、絶対値は積をとり、偏角は和をとればよい。次にわり算は

(4.16) $$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1e^{j\theta_1}}{r_2e^{j\theta_2}}=\frac{r_1}{r_2}e^{j(\theta_1-\theta_2)}$$

二つの複素数のわり算では、絶対値は商をとり、偏角は差をとればよい。

二つの複素数 z_1 と z_2 がそれぞれ図の点 P_1、P_2 で表されるとする。



二つの複素数の和の規則から、z_1+z_2 を表す点は、OP_1 と OP_2 を二辺とする平行四辺形を描いたときの４番目の点 P_3 になることが分かる。この図から

(4.17)　$$\left|z_1+z_2\right| \le \left|z_1\right| + \left|z_2\right|$$

等号は OP_1 と OP_2 が同一の直線上にあるとき、したがって二つの偏角が等しいときに成り立つ。

5　累乗と累乗根

z^n、n は正の整数、は z に z を $n-1$ 回掛け合わせて得る。しかし極形式ではもっと簡単に得られる。すなわち

(5.1)　$$z^n = \left(re^{j\theta}\right)^n = r^n e^{jn\theta}$$

注意しなければならないこと：2π の整数倍を偏角に加えても複素数 z は変化しないこと。なぜなら

(5.2)　$$z = r\left(\cos\theta + j\sin\theta\right) = r\left(\cos\left(\theta+2k\pi\right) + j\sin\left(\theta+2k\pi\right)\right) = re^{j(\theta+2k\pi)}$$

であるから。ここに k は任意の整数である。複素数 z を極形式で一般的に表すにはこの形にする必要がある。

累乗根 $z^{1/n}$、n は正の整数、とは、これの n 乗が z になる数である。一般形、式（5.2）を用いて

(5.3)　$$z^{1/n} = \left(re^{j(\theta+2k\pi)}\right)^{1/n} = r^{1/n} e^{j\frac{\theta+2k\pi}{n}} = r^{1/n}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + j\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$$

$k=0,1,2,\cdots,n-1$ とすることで $z^{1/n}$ の n 個の異なる値を得る（異なる値はこれだけ。$k=n$ は $k=0$ と同じ値になる。$k=n+1$ は $k=1$ と同じ値になる。・・・）。ここに $r^{1/n}$ は正の実数 r の正の累乗根である。このことから次の方程式を解くことができる。

(5.4)　$$\omega^n = 1$$

これを解くと

(5.5)　$$\omega = 1^{1/n}$$

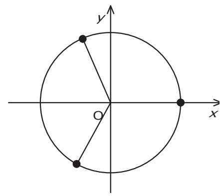
ここで１を複素数の一般形式で表すと

(5.6)　$$1 = e^{j(0+2k\pi)}$$

したがって

(5.7)　$$1^{1/n} = e^{j\frac{2k\pi}{n}} = \cos\frac{2k\pi}{n} + j\sin\frac{2k\pi}{n}$$

ここに $k=0,1,2,\cdots,n-1$ である。根は図のように単位円の円周を等分割する点である。



6　演習問題

1　互いに複素共役な複素数の和が実数になること、差が純虚数になること、そして積が実数になることを証明せよ。商が実数になる条件を示せ。

2　複素数 z を極形式 $re^{j\theta}$ で表すとき $r=\sqrt{z\bar{z}},\quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{Im}[z]}{\mathrm{Re}[z]}\right)$ で計算できることを示せ。

3　$z^5 = 2+4j$　の根をすべて求めよ。それらを複素平面上にプロットせよ。

$20^{1/10}$～1.35、tan1.11～2 を用いよ。

4　−1 の３乗根をすべて求めよ。それらを複素平面上にプロットせよ。

5　$e^{\pi j} = -1$ が成り立つことを示せ。$e^{\pi j/2} = j$ が成り立つことを示せ。

6　$e^{1+j} = a+jb$ のとき、実数 a,b を求めよ。

7　$\left|e^z\right| = e^x \quad \left|e^{j\theta}\right| = 1$ であることを示せ。ただし $z = x+jy$ 、θ は実数である。

6　演習解答

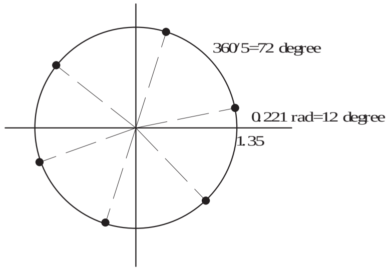
1　x,y を実数として $z = x+jy$ とすると $\bar{z} = x-jy$ であるから、$z+\bar{z} = 2x$ となり和は実数。$z-\bar{z} = 2jy$ となり差は純虚数になる。$z\bar{z} = x^2+y^2$ となるから積は実数になる。

$$\frac{z}{\bar{z}} = \frac{(x+jy)(x+jy)}{(x-jy)(x+jy)} = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + j\frac{2xy}{x^2+y^2}$$ であるから商が実数になるのは $xy=0$ のとき、すなわち z が実数もしくは純虚数のときである。商が定義されているので $x=y=0$ は除く。

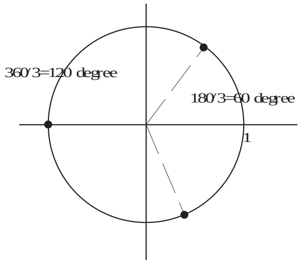
2　$$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{z\bar{z}},\quad \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} = \tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{Im}[z]}{\mathrm{Re}[z]}\right)$$

3　$$2+4j = \sqrt{2^2+4^2}\,e^{j\mathrm{Tan}^{-1}\left(\frac{4}{2}\right)+j2k\pi} = 20^{1/2}e^{j\mathrm{Tan}^{-1}2+j2k\pi}$$ であるから

$$z = \left(20^{1/2}e^{j\mathrm{Tan}^{-1}2+j2k\pi}\right)^{1/5} = 20^{1/10}e^{j\frac{\mathrm{Tan}^{-1}2}{5}+jk\frac{2\pi}{5}} = 1.35e^{j0.221+jk\frac{2\pi}{5}} \qquad k=0,1,2,3,4$$



4　$-1 = 1e^{j\pi + j2k\pi}$ であるから $z = 1^{1/3} e^{j\frac{\pi}{3} + j\frac{2\pi}{3}k}$　　$k = 0,1,2$



5　$e^{\pi j} = \cos\pi + j\sin\pi = -1$

$$e^{\pi j/2} = \cos\frac{\pi}{2} + j\sin\frac{\pi}{2} = j$$

6　$e^{1+j} = ee^{j} = e\cos 1 + je\sin 1 = a + jb$ より、$a = e\cos 1$　　$b = e\sin 1$

e～2.7　cos1～0.54　sin1～0.84

7　まず単位円周上の点であることから原点からの距離は 1 であり $\left|e^{j\theta}\right| = 1$ である。これを用いて

$$\left|e^{z}\right| = \left|e^{x}\right|\left|e^{jy}\right| = \left|e^{x}\right|$$