# 工業力学第二 第８回講義の要点　　伊能

## ５．４　回転体の運動

今回の講義では三次元の剛体運動を扱う。

### なぜオイラーの運動方程式が必要なのか

剛体の回転運動は、剛体の慣性テンソルを$\boldsymbol{I}$、角速度ベクトルを$\boldsymbol{\omega}$、角運動量を$\boldsymbol{L}$、外部から作用するトルクを$\boldsymbol{N}$とすると、以下の式が成り立つ。ただし、これらは静止座標系からみた表現であり、式(5.124)は慣性テンソルが時間的に変化しないとした場合である。なお、式(5.123)の慣性テンソル$\boldsymbol{I}$の表記では、慣性乗積の成分にマイナス符号が付くことに注意する。

$$\boldsymbol{I}\cdot\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}=\boldsymbol{N}\ \frac{d\boldsymbol{L}}{dt}=\boldsymbol{N} \qquad (5.121)$$

$$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{\omega} \qquad (5.122)$$

$$\boldsymbol{I}\cdot\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}=\boldsymbol{N} \qquad (5.124)$$

しかしながら、これらの式が成立するといっても実際に回転物体の挙動を解析するのは困難である。なぜなら剛体が回転したときに慣性テンソルも時間的に変化する場合は方程式として記述しにくい。もちろん回転しても慣性テンソルが変化しないような単純な運動ならば記述できるが、適用は限られる。回転中に軸受けにトルクが発生するといった現象（たとえば例題5.21）を議論するのは難しい。このような問題を扱うのに運動座標系による表現が威力を発揮する。それがオイラーの運動方程式であり、一般的な形は式(5.135)となる。左辺第１項は外積表現になっていることに注意しよう。また左辺第２項は、運動座標系上でみた角運動量変化であり、右辺は外力トルクである。

$$\boldsymbol{\mu}'\times\boldsymbol{L}'+\frac{\boldsymbol{d}^{*}\boldsymbol{L}'}{\boldsymbol{dt}}=\boldsymbol{N}' \qquad (5.135)$$

オイラーの運動方程式を適用する時は、運動座標系を剛体の慣性主軸に一致させる（慣性テンソルが対角成分のみになるように設定する）ことが多い。すると$\boldsymbol{\mu}'=\boldsymbol{\omega}'$となるので、式(5.135)は式(5.138)になる。「オイラーの運動方程式」は、式(5.138)を指す場合が多い。運動座標系で表示されたオイラーの運動方程式の導出方法については、教科書で確認していただきたい。式変形を追うのが面倒な人も式(5.135) から式(5.138)が導出される過程は確認すること。ただし、修正表にもあるように微分項には*が付くことに注意する。

### オイラーの運動方程式の適用例

教科書に３つ例が載っている。以下に理解するためのポイントを述べる。

**・例題 5.20**

運動座標系の$\xi$軸を棒に一致させることで慣性テンソルを対角行列成分で表していることがキーポイントである。運動座標系上では、角運動量ベクトル$\boldsymbol{L}'$が一定となるので運動座標系では時間的に変化せず、式(5.135)の左辺第２項は０である。図 5.42 と対応させてみると回転

体の回転（$\omega$で表示）は、図 5.43 では$\xi$軸まわりの棒の回転ということになるが、$\xi$軸まわりの回転は運動に影響しない（テンソル成分が０）。影響するのは図 5.42 の運動座標系の回転ベクトルを示す$\boldsymbol{\mu}$であり、図 5.43 では$\boldsymbol{\omega}$を使っているので注意のこと。また、図 5.43 の角速度の大きさ$\omega$は運動座標系の角速度ベクトル$\boldsymbol{\omega}'$にする必要があるので、$\xi$、$\eta$軸方向の成分で表現している。

**・図 5.44 の回転体の運動**

この問題では、慣性テンソルが慣性乗積を含んだテンソルで扱わなければならないので、式(5.135)から出発する必要がある。式(5.139),(5.140)が基礎式となる。式(5.139)は、式変形を行うと式(5.145)になることを確認しよう。また、式(5.140)は、運動座標系上の加速度の表現式を用いて式(5.150)となる。これも確認しておこう。式(5.150)に具体的な成分を考えて式変形すると式(5.152')が得られる。この式(5.152')と式(5.145)で軸受けに生じる反力が得られる。

**・例題 5.21**

運動座標系を剛体の慣性テンソルが対角行列になるように設定するのがポイントである。このように設定すると運動座標系上では回転体の角運動量が時間的に変化しない。つまり、式(5.138)で左辺第１項目が０となり、$\omega_\zeta$成分も０なので、３番目の式のみが残る。なお、解答の式は、修正表で確認すること。

### 5.4.3　回転エネルギー

三次元の剛体の回転エネルギーは、式(5.159)となる。慣性主軸まわりの回転運動では、式(5.160)となる。

## ５．５　こまの運動

こまの歳差運動もジャイロ効果も本質的には同じ物理現象であり、式(5.135)が適用できる。

### 歳差運動

図 5.48 に示すようにこまが$\zeta$軸まわりに一定の角速度ベクトル$\boldsymbol{\lambda}'$で回転している。こまの軸は鉛直方向に対して角度$\theta$傾いており、z 軸まわりに角速度ベクトル$\boldsymbol{\mu}'$で回転する運動が生じている。つまり、こまは倒れずに回転する。この運動を**歳差運動**という。歳差運動を発生させているのは、こまに働く外力トルク$\boldsymbol{N}'$である。外力トルクは重力によるものであり、常に同じトルクがこまに働いている。この歳差運動を記述したのが式(5.167) と(5.169)である。ただし、式(5.167)の $\boldsymbol{\omega}'$は$\boldsymbol{\lambda}'$だけでなく歳差運動の角速度ベクトル$\boldsymbol{\mu}'$も合算した値となる。回転角速度ベクトルの加算については 186 ページの例題 5.4 を参照のこと。また、式(5.169)が適用できるのは、運動座標系で表現された角運動量が一定となるからである。

$$\boldsymbol{L}' = \boldsymbol{I}' \cdot \boldsymbol{\omega}' \qquad (5.167)$$

$$\boldsymbol{\mu}' \times \boldsymbol{L}' = \boldsymbol{N}' \qquad (5.169)$$

なお、外力トルクが働かないときは歳差運動は起こらず、そのままの姿勢を保って回り続ける。これが**ジャイロ剛性**である。

**ジャイロモーメント**

こまの歳差運動やジャイロ効果を理解するのに「地球ゴマ」は格好の教材である。実際に地球ゴマを回してみると図 A のように歳差運動が起こり、図 5.48 が確認できる。また、地球ゴマの回転方向を逆にすれば歳差運動の回転方向も逆になることも確認できる。図 B は地球ゴマをさらに傾けて回転軸がほぼ水平になって歳差運動している様子である。このとき、軸には垂直な荷重が加わっているが、それでも倒れずに歳差運動を続ける。地球ゴマが倒れないで歳差運動を行うのは、重力による外力トルクと等しいモーメントが地球ゴマに発生しているためである。

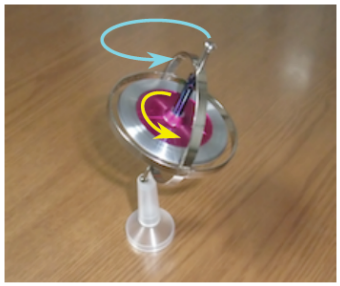


図 A

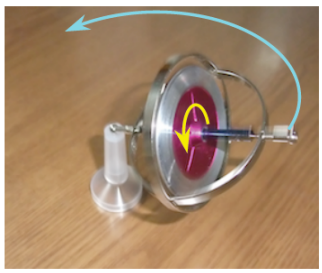


図 B

このモーメントバランスの様子を図 A, B に対応させて図 C, D に示す。図 5.48 も一緒に参照のこと。

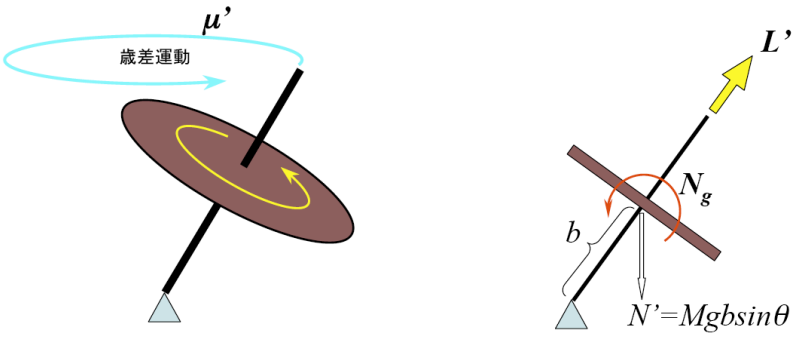



図 C：図 A に対応

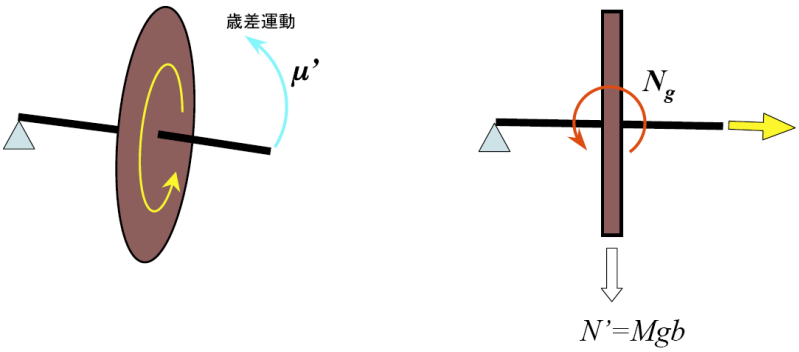



図 D：図 B に対応

この重力に拮抗して発生するモーメント $\boldsymbol{N_g}$ は、歳差運動の角速度ベクトル $\boldsymbol{\mu'}$ で回転体が動く反作用によって生じていると考えられる。つまり、回転体（ジャイロ）の軸を角速度ベクトル $\boldsymbol{\mu'}$ で回転させると $\boldsymbol{N_g}$ が発生すると解釈できる。(地球ゴマの両軸を水平にした状態で回転させてやると $\boldsymbol{N_g}$ が発生することを体感できる。）この関係を表しているのが式(5.188)であり、$\boldsymbol{N_g}$ を**ジャイロモーメント**という。

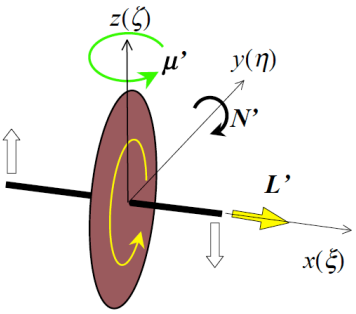
図Eは、地球ゴマの考察に基づく図Dに示した関係を整理したもので、外力トルク $\boldsymbol{N'}$ によって回転軸まわりに歳差運動の角速度ベクトル $\boldsymbol{\mu'}$ が生じるジャイロ効果を示している。これは、教科書の図5.53の右側の図と等価である。ただし、親指を $x$ 軸（教科書では $\boldsymbol{L'}$ ではなく、スピンベクトル $\boldsymbol{H}$ となっている)、人差し指を $y$ 軸、中指を $z$ 軸に対応させる。なお図5.53の左側の図でz軸の $\boldsymbol{\mu'}$ の回転方向の矢印は、逆に描かれるべきである。

一方、図Fの方は、角速度ベクトル $\boldsymbol{\mu'}$ を回転体に加えることによってジャイロモーメント $\boldsymbol{N_g}$ が生じることを示しており、式(5.188）を図式化したものである。$\boldsymbol{N_g}$ は $\boldsymbol{N'}$ と 符号を逆にしただけなので、マイナスの値ならば $\boldsymbol{N'}$ の正の向きとは逆向きのトルクが発生すると解釈すればよい。

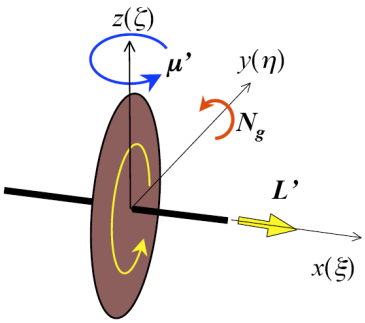
まとめると、

図Eでは、角速度ベクトル $\boldsymbol{L'}$ で回転している物体に外力トルク $\boldsymbol{N'}$ を加えると歳差運動 $\boldsymbol{\mu'}$ が生じることを示しており、

図Fでは、角速度ベクトル $\boldsymbol{L'}$ で回転している物体に角速度ベクトル $\boldsymbol{\mu'}$ を加えるとジャイロモーメント $\boldsymbol{N_g}$ が生じることを示している。




図E　入力:$\boldsymbol{N'}$, 出力：$\boldsymbol{\mu'}$




図F　入力:$\boldsymbol{\mu'}$, 出力：$\boldsymbol{N_g}$

**プロペラのジャイロ効果**

図5.54のプロペラのジャイロ効果では、進行方向に向かって左に旋回したときに機首が持ち上がるようなトルク $\boldsymbol{N_g}$ が発生している。これは図Fにおいて黄色方向に角運動ベクトルを持つ物体が青色で示した方向に向きが変わると、赤で示したトルク $\boldsymbol{N_g}$ が発生するのと同じ関係である。

**オートバイのジャイロ効果**

図Fにおいて回転円盤を車輪に対応させる。教科書に描かれた図5.55の車輪を傾ける行為を回転円盤に $\boldsymbol{\mu'}$ を加える操作と解釈すると、これによってジャイロモーメント $\boldsymbol{N_g}$ が発生する。このジャイロモーメントは、ハンドルを頭頂部に描いた矢印方向に自動的に回転させることになるので、ライダーがハンドル操作をほとんどしなくてもカーブを回ることができる。ただし、図Fと図5.55は描く向きが異なっているので、原理的に同じであることを確認するのは少し難しいかもしれない。その場合は、図5.55でオートバイが左側に傾いた場合を考えると、対応がわかりやすくなる。