# 工業力学第二 第７回講義の要点　　伊能

・例題5.16と例題5.19を理解し、類似問題を解けるレベルにすること。

**慣性テンソル**（導出過程も確認しておくこと）

$$I = \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_z \end{bmatrix}$$

**慣性モーメント**

$$I_x = \int_V (y^2 + z^2)dm\,, \qquad I_y = \int_V (x^2 + z^2)dm\,, \qquad I_z = \int_V (x^2 + y^2)dm$$

**慣性乗積**

$$I_{xy} = \int_V xydm\,, \qquad I_{yz} = \int_V yzdm\,, \qquad I_{xz} = \int_V xzdm$$

次の**慣性乗積に関する式**は、使えるようにしておくこと。

$$I'_{xy} = I_{xy} + Mx_g y_g$$

慣性テンソル $\boldsymbol{I}$ を $O-xyz$ 座標系から $O-\xi\eta\zeta$ 座標系へ座標変換する公式も重要である。

$$I' = P \cdot I \cdot P^T$$

対象物が平面形状でｚ軸まわりに回転させる場合の座標変換テンソル $P$ は、式(5.106)であることも確認する。

**慣性主軸と主慣性モーメントの求め方**

**ステップ１**：次の式より３次方程式を解いて根 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 (\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3)$ を求める。

$$\det(\boldsymbol{I} - \lambda \boldsymbol{E}) = \begin{vmatrix} I_{11} - \lambda & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} - \lambda & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

xy 平面の剛体では、$\lambda_3$ は式変形すれば自明であることがわかる。つまり、実質的に二次方程式の計算である。$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 (\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3)$ が主慣性モーメントとなる。

**ステップ２**：$\lambda_1$，$\lambda_2$，$\lambda_3$ に対応する固有ベクトル $\boldsymbol{\omega}_1$，$\boldsymbol{\omega}_2$，$\boldsymbol{\omega}_3$ は以下の式から求める。

$$(I - \lambda_1 E) \cdot \omega_1 = 0\,, \qquad (I - \lambda_2 E) \cdot \omega_2 = 0\,, \qquad (I - \lambda_3 E) \cdot \omega_3 = 0$$

それぞれの式から一個ずつ固有ベクトルが求まる。教科書では、できるだけ簡単な数値を選んで固有ベクトルを表している。

それぞれの固有ベクトルは主軸方向を示している。これより主軸の角度も求められる。

**慣性乗積の意味**

ある軸まわりの慣性乗積を計算して値が 0 にならない場合、対象物をその軸まわりで回転させると、回転支持部に回転軸以外の方向に周期的なトルクが発生する。これが機械の振動や騒音の原因になる。

図 5.36 は慣性乗積が 0 にならない例（x, y 軸に対して形が非対称なので）である。これを x 軸まわりに回転させる場合を考えよう。つまり原点Oから左右に等距離で軸受けを取り付けて長方形の板を回転させる。軸受け部には回転運動によって周期的なトルクが発生する。（この状態で軸受けを両手で持って支えると、どんなことになるかイメージしてみよう。）

x, y 軸のいずれかで対称となる形では、定義式から慣性乗積は 0 となる。下図は y 軸に対して対称となる対称物の場合である。右側の場合は、回転によって軸受け A, B に反力は発生するが、軸受けの間にトルクは生じない。左側は重力が働かなければ軸受けに反力も生じない。
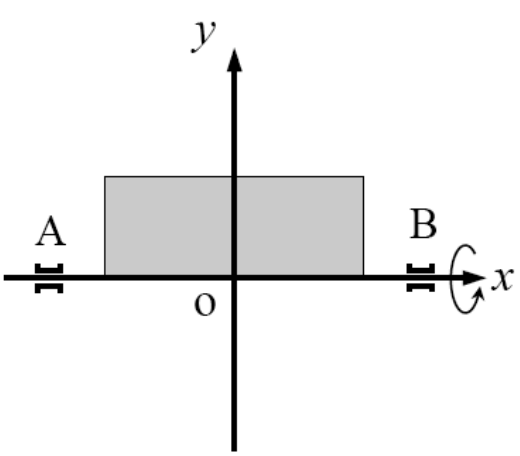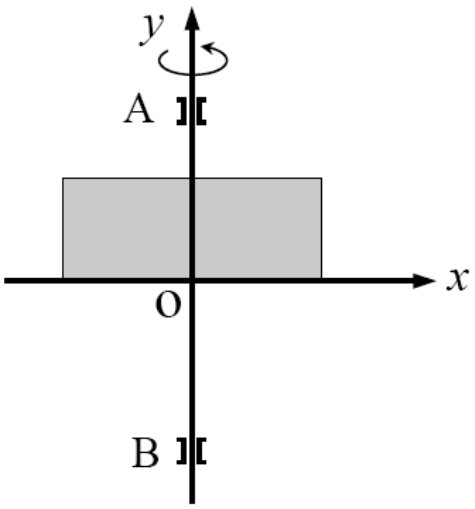
図 5.37 の対象物も x, y 軸まわりに回転させれば、軸受け部に周期的なトルクが発生する。ここで、上記の方法で慣性主軸（固有ベクトルの方向）を求めてやると、その軸まわりでは軸受け部に周期的なトルクが発生しなくなる。