工業力学第二 第５回講義の要点　　伊能

・慣性モーメントの定義式を理解し、基本的な形の対象物について計算できるようにすること。
・例題 5.11 の求め方を理解して類似問題を解けるようにすること。

5.2　剛体の平面運動

平面運動ではスカラーのみの式で表すことができる。(取り扱いが簡単)

慣性モーメント導出は、十分理解しておく。以下に要点を示す。図 5.15 も参照のこと。

剛体内の微小質量 dm に注目し、並進の運動量 dP を求めると

$$dP = (\omega r)dm \tag{5.12}$$

と表せる。

対応する角運動量 dL は

$$dL = dP\,r = (\omega r)dmr = \omega r^2 dm \tag{5.13}$$

と表せる。剛体全体について角運動量 dL を積分すると

$$L = \int_v \omega r^2 dm \tag{5.14}$$

となる。ここで ω は剛体中では一定なので積分の外に出すことができ，

$$L = \omega \int_v r^2 dm = \omega I \tag{5.15}$$

となる。ここで I は

$$I = \int_v r^2 dm \tag{5.16}$$

であり、式中の I が慣性モーメントである。式(5.15)，(5.16) は重要な式である。

5.2.2　回転の運動方程式と角運動量保存則

式(5.17)から式(5.21)の導出の流れを理解する。図 5.16 も参照のこと。回転の運動方程式となる式(5.22)および(5.23)は重要な式である。

$$\frac{dL}{dt} = I\frac{d\omega}{dt} = I\frac{d^2\theta}{dt^2} \tag{5.22}$$

$$N = \frac{dL}{dt} \tag{5.23}$$

式(5.23)の左辺は外部から作用するトルクで，右辺は角運動量の時間変化を表している。すなわち，トルクを加えた分だけ角運動量が変化することを意味する。逆にトルクが働かない場合には，角運動量 L は変化せず、一定である。これを角運動量保存則という。

また、式(5.22)および(5.23)から明らかではあるが以下の関係式が成立する。これも重要な式であるので、覚えておこう。

$$N = I\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

5.2.3　慣性モーメント

x, y, z 軸まわりの慣性モーメントを求める式は以下のようになる。

$$I_x = \int_v (y^2 + z^2)dm \tag{5.25}$$

$$I_y = \int_v (z^2 + x^2)dm \tag{5.26}$$

$$I_z = \int_v (x^2 + y^2)dm \tag{5.27}$$

xy 平面に置かれた十分薄い板状の剛体の場合，z 方向が 0 なので

$$I_z = \int_v (x^2 + y^2)dm = \int_v x^2 dm + \int_v y^2 dm = I_y + I_x \tag{5.28}$$

となり，x 軸と y 軸まわりの慣性モーメントの和が z 軸まわりの慣性モーメントに等しくなる。

また重心を通らない形の慣性モーメントも以下のように求まる．図 5.20 も確認し、式が使えるようにしておくこと。

$$I' = I_s + h^2 M \tag{5.41}$$