工業力学第二 第４回講義の要点　　伊能

◎第３回演習問題を理解しておくこと。（剛体運動では絶対速度、絶対加速度を求める式に違いがあるか？）

5.1　剛体の表現

5.1.1　剛体の自由度

剛体は、力を加えても変形しない物体である。二次元平面を運動する剛体の位置と姿勢を指定するには剛体内の２点を定めればよい。つまり１点につき２つの成分であるので、合計４つの成分を与えればよい。しかし、この与え方は冗長である。剛体は変形しないので、２点のうち１点はどちらか一つの成分があれば、もう一つの成分は一意に決まる。つまり、３つの成分で十分である。これを自由度が３であるという。同様な考え方をすると、三次元空間で剛体の位置と姿勢を決めるには６つの成分があれば十分であることがわかる。つまり、自由度は６である。

5.1.2　並進運動と回転運動

剛体運動は並進運動と回転運動の組み合わせとして考えることができる。

並進運動の記述：変位、速度、加速度

回転運動の記述：回転角度、角速度、角加速度

5.1.3　回転角度、角速度、角加速度

角速度ωは単位時間内における回転角度θの変化量（単位は rad/s）

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \qquad (5.\ 1)$$

角加速度$\dot{\omega}$は角速度ωをもう一度時間で微分した値（単位は rad/s^2）

$$\dot{\omega} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \qquad (5.\ 2)$$

オイラー角

3 次元空間での回転角度については，回転軸の方向が自由度 3 をもつため，座標軸からの 3 つの角度を指定する必要がある。指定の仕方は、座標軸の回転順序の選び方で 12 通りある。教科書では$O-xyz$座標系を出発点として，まずz軸周りにφ，次にy'軸まわりにθ，最後にz''軸まわりにψ だけ回転させている。（教科書の図中のϕは、表 5.1 のφと同じである。読み方は「ファイ」。字体がψ 「プサイ」と似ているので注意しよう。）

回転を行う前の座標系を$\boldsymbol{x}=(x,y.z)^{\mathrm{T}}$とする。

まず、z軸周りにφだけ回転させたときの座標系$\boldsymbol{x}'=(x',y'.z')^{\mathrm{T}}$は

$\boldsymbol{x}'=\mathrm{P}_{\varphi}\boldsymbol{x}$

ただし$P_{\varphi} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

つぎにy'軸まわりにθだけ回転させたときの座標系$\boldsymbol{x}''=(x'',y''.z'')^{\mathrm{T}}$は

$\boldsymbol{x}''=\mathrm{P}_{\theta}\boldsymbol{x}'$

ただし $P_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$ （幾何学的に導出する時は z, x 軸の配置に注意する。）

最後に z' 軸まわりに ψ だけ回転させたときの座標系 $\boldsymbol{x}'''=(x''',y'''.z''')^{\mathrm{T}}$ は

$\boldsymbol{x}'''=\mathrm{P}_\psi \boldsymbol{x}''$

ただし $P_\psi = \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

まとめると

$\boldsymbol{x}'''=\mathrm{P}_\psi \mathrm{P}_\theta \mathrm{P}_\varphi \boldsymbol{x} = \mathrm{P}\,\boldsymbol{x}$

この座標変換テンソルが表 5.1 になっている。実際に P を求めて確認してほしい。

例題 5.4 を確認すること：

角速度ベクトルが足し算で求まることは、第２回講義で説明した。第１回 OCW 資料にも掲載しているが、遊園地のコーヒーカップを思い出すと理解しやすい。大円盤が回転しながらコーヒーカップも一定の回転速度で回っている状況を考える。コーヒーカップ内では、大円盤の回転角速度とコーヒーカップの回転角速度の足し算になる。なお、図 5.6 のコマの向きは一般的に描かれており、角速度ベクトル $\{5,10,0\}^{\mathrm{T}}$ の方向になっていないので注意のこと。

5.1.4　剛体運動の数式的な表現

以下の式を理解する。

速度の表現式

$$\frac{d\boldsymbol{r}'}{dt} = \dot{\boldsymbol{r}}' = \boldsymbol{\omega}' \times \boldsymbol{r}' + \boldsymbol{v}_0' \qquad (5.5)$$

質点の場合の式(4.238)と比較すると、剛体なので運動座標系を基準にした速度は 0 なのでこれに関する項が消える。また、$\boldsymbol{v}_0'$ は式(4.238)の $\boldsymbol{v}'$ と同じ意味である。

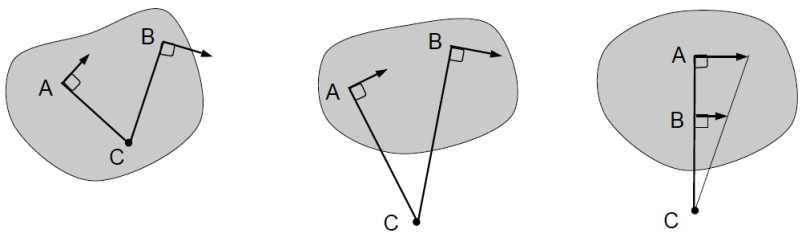
瞬間中心：瞬間的な剛体の運動中心

以下の３つタイプがある。

・ケース１（回転中心が剛体内）　→　図 5.12

・ケース２（回転中心が剛体の外）　→　図 5.13

・ケース３（点 A, B, C が直線上）　→　図 5.14



ケース１　　ケース２　　ケース３

加速度の表現式

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}'}{dt^2} = \ddot{\boldsymbol{r}}' = \frac{d\boldsymbol{\omega}'}{dt} \times \boldsymbol{r}' + \boldsymbol{\omega}' \times (\boldsymbol{\omega}' \times \boldsymbol{r}') + \dot{\boldsymbol{v}}_0' \qquad (5.10)$$

質点の場合の式(4.239)と比較すると、剛体内では運動座標系を基準にした速度と加速度は0となり、これに関する項は消える。また、$\dot{\boldsymbol{v}}_0{}'$ は式(4.238)の $\dot{\boldsymbol{v}}'$ と同じ意味である。