## 工業力学第二　第１回講義要点　　伊能

工業力学第二では、**運動座標系**で物体の運動（速度、加速度）を表現する方法を理解することが重要である。この表現方法を理解するポイントは、視点を運動座標系に置くことである。つまり、観察者は**静止座標系**から見た**絶対運動**でなく運動座標系をベースにした**相対運動**に着目して運動を表現する。こうすることにより運動を単純化して考えることができる。

教科書の図 4.31 では、走行する電車の中で子供がボールを投げている。電車内（運動座標系 O-ξηζ）ではボールの速度は運動座標系でみた速度 $\boldsymbol{v}'$となっている。一方、静止座標系 O-xyz からみれば列車の速度が上乗せされて観察される。この程度ではあまり恩恵がなさそうであるが、たとえば子供がボールを単純な円運動を描くように振り回した時に、静止座標系からボールの動きをみると、かなり複雑な軌道になることがわかり、座標系を分けて記述する利点が理解できると思う。

### 並進運動座標系における速度

対応する図は、図 4.31。式（4.223）を導出するための式（4.220）、（4.221）、（4.222）も確認しておこう。

式（4.223）の意味

$\dfrac{dr'}{dt} = \dfrac{d^* r'}{dt} + v_0{}'$（教科書では $\boldsymbol{v}$ となっている。$\boldsymbol{r}', \boldsymbol{v}_0{}'$ はベクトル表記なので太文字。）

・左辺は運動座標系の表示で絶対速度を表す記号

・右辺第１項は、運動座標系でみたときの点 P の速度

（*印は運動座標系を基準にしているという意味。位置を運動座標系を基準にして微分しているので**相対速度**となる。図 4.31 では電車内でボールが点 P として描かれているが、この*印が付いているので、電車内の座標、つまり運動座標系を基準にしたボールの速度となる。）なお、図 4.31 では一次元的な動きとして描いているが、動座標系の向きは自由に設定できる。

・右辺第２項は、運動座標系の速度。つまり、静止座標系の原点Oに対する運動座標系の原点O’の速度で**運搬速度**とよばれる。図 4.31 では電車の走行速度に等しい。（ただし、速度成分を静止座標系ではなく運動座標系で表している。）

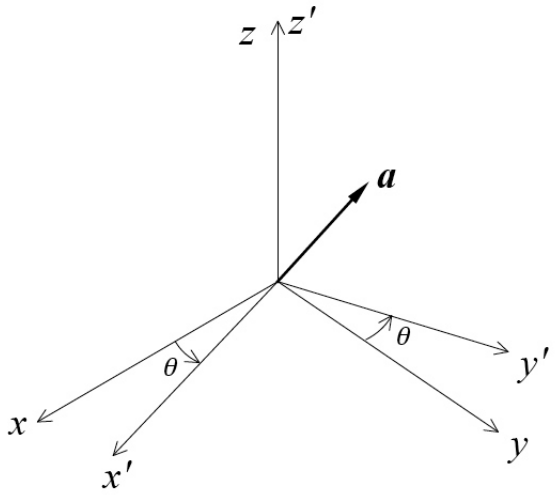
加速度の表現については次回に学ぶことにし、座標変換の復習と角速度ベクトルについて説明する。

### 座標変換

座標変換は、注目する対象物の運動を動座標系で表示するのに必要となる。工業力学で必要な座標変換は、対象物は動かさずに座標系を変更したときに物体の位置を求めることに用いられる。

簡単な例として、座標系 O-xyz を基準として z 軸まわりに角度 $\theta$ 回転させた座標系 O'- x'y'z'を考える。この座標系は幾何学的な関係から高校の数学で簡単に求まるが、38 頁の（2.65’）式を用いれば機械的に求まる。たとえば $\theta_{11}$ は x'座標と x 座標のなす角度なので $\cos\theta$ となり、$\theta_{31}$ は z'座標と x 座標のなす角度なので $\theta_{31}=\pi/2$，つまり $\cos\theta_{31}=0$ となる。すべての成分を求めると座標変換 $P_x$ は以下のようになる。

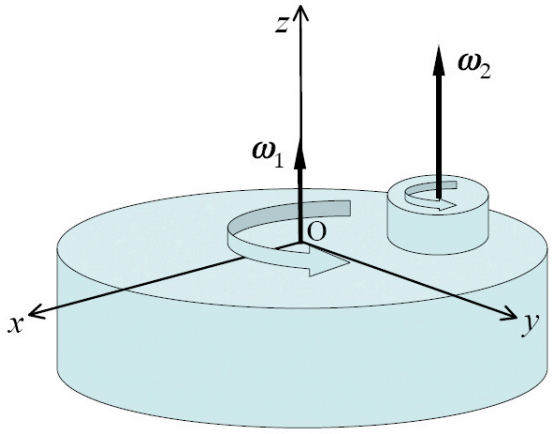
$$\boldsymbol{P}_x = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$




新しい座標系でのベクトル $\boldsymbol{a}'$は
$P_x$を用いて以下のように求まる。

$$\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{P}_x \boldsymbol{a}$$

**角速度ベクトル**

三次元空間で角速度を表すには角速度ベクトルを用いる。下図のように大きな回転テーブルの上に小さな回転テーブルが回っている状況を考える（遊園地のコーヒーカップを思い浮かべると理解しやすい）。大きな回転テーブルの角速度の大きさを $\omega_1$とすると、角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega}_1$は $\{0, 0, \omega_1\}^T$ と表すことができる。小さな回転テーブルの角速度の大きさを $\omega_2$ とすると、角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega}_2$ も同様に$\{0, 0, \omega_2\}^T$ と表すことができる。小さな回転テーブル上では、角速度ベクトルの和となることはすぐに理解できるだろう。つまり、$\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{\omega}_1+\boldsymbol{\omega}_2$ が成立している。コーヒーカップを逆方向に回転させた経験があるなら、回転成分を相殺できる、つまり引き算もできることもすぐにわかるだろう。この場合、コーヒーカップの中心は大きな回転テーブルの中心にないので視点の位置が変化することに気づいた人もいると思う。しかし、この動きは回転成分ではないので、角速度ベクトルの足し算、引き算は成立している。

他のベクトルと同様に角速度ベクトルは、ベクトルの方向が異なっていても加減算が成立する。たとえば $\boldsymbol{\omega}_1=\{\omega_1, 0, 0\}^T$、$\boldsymbol{\omega}_2=\{0, \omega_2, 0\}^T$ の場合でも $\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{\omega}_1+\boldsymbol{\omega}_2$ は成立する。これを直感的に理解する説明を講義で紹介する。