第5章(続き)

光ファイバのモード特性(2)

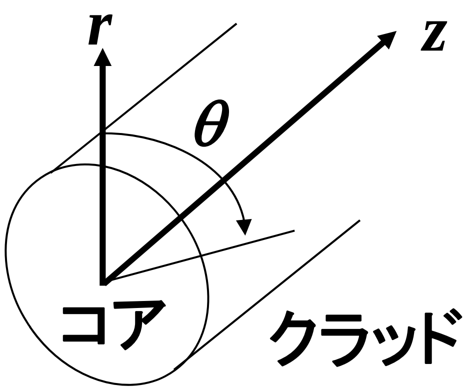
2011年12月19日(月)

解法(2):光ファイバ

光ファイバのモード(1)

光ファイバの波動方程式

界分布のz方向依存性をexp(-jβz)と仮定して、円筒座標系で以下の式を得る。



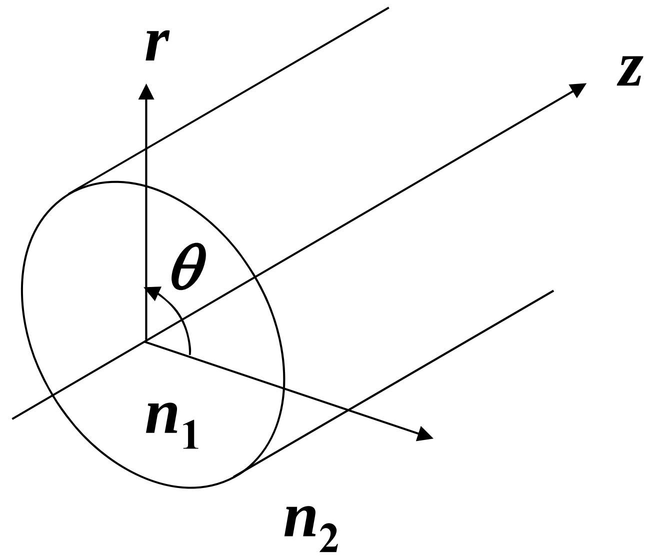
屈折率分布 $n^2(r) = \begin{cases} n_1^2 & (r \le a) \\ n_2^2 = n_1^2(1 - 2\Delta) & (r > a) \end{cases}$ **(5.45)**

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 E_z}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial E_z}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial E_z}{\partial \theta} + (k_0{}^2 n^2 - \beta^2) E_z = 0 \\ \dfrac{\partial^2 H_z}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial H_z}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial H_z}{\partial \theta} + (k_0{}^2 n^2 - \beta^2) H_z = 0 \end{array} \right\} \quad (5.46)$$

備考：直角座標系から円筒座標系への座標変換（1）

$$x = r\cos\theta,\quad y = r\sin\theta,\quad z = z$$

である。



$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r} = \cos\theta\frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial}{\partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \theta} = -r\sin\theta\frac{\partial}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial}{\partial y}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}$$

備考：直交座標系から円筒座標系への座標変換（2）

逆行列を求めると、

$$
\det\left\|\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right\|
$$

$$
= \cos\theta\cdot\det\left\|\begin{bmatrix} r\cos\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\| - \sin\theta\cdot\det\left\|\begin{bmatrix} -r\sin\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\| + 0\cdot\det\left\|\begin{bmatrix} -r\sin\theta & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right\|
$$

$$
= r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r
$$

よって

$$
\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\frac{1}{r}\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \frac{1}{r}\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

備考：直交座標系から円筒座標系への座標変換（3）

$$\therefore \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\dfrac{1}{r}\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \dfrac{1}{r}\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial r} \\ \dfrac{\partial}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x} = \cos\theta \dfrac{\partial}{\partial r} - \dfrac{1}{r}\sin\theta \dfrac{\partial}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} = \sin\theta \dfrac{\partial}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\cos\theta \dfrac{\partial}{\partial \theta} \\ z = z \end{cases}$$

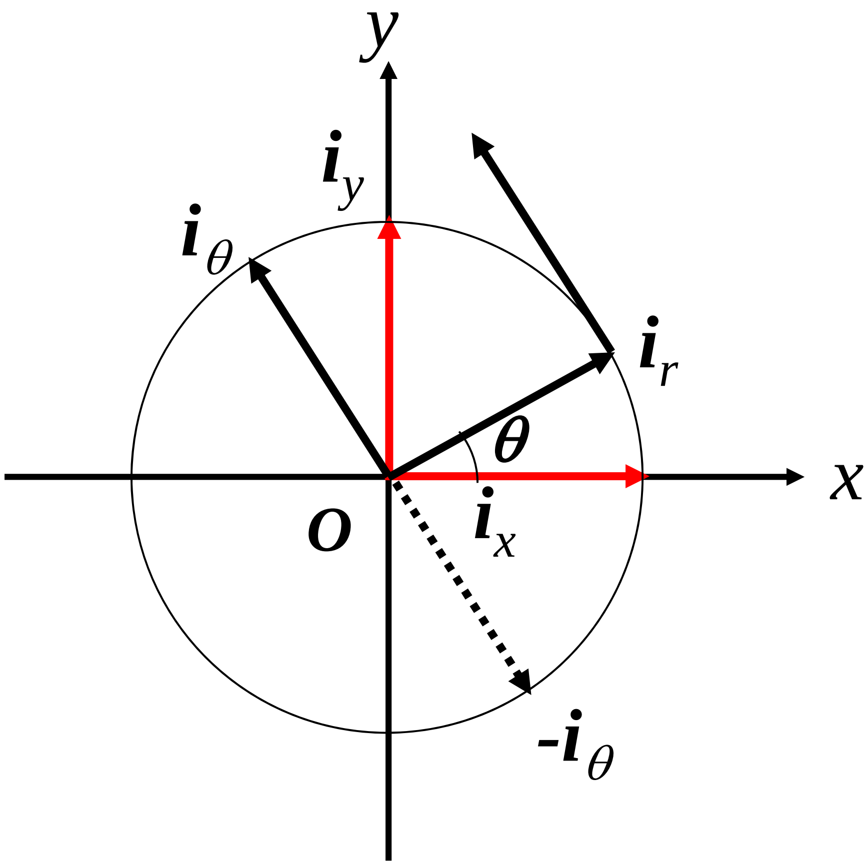
備考:直交座標系から円筒座標系への座標変換(4)

またベクトルについては、

$$\boldsymbol{i}_x = \boldsymbol{i}_r \cos\theta - \boldsymbol{i}_\theta \sin\theta$$

$$\boldsymbol{i}_y = \boldsymbol{i}_r \sin\theta + \boldsymbol{i}_\theta \cos\theta$$

$$\boldsymbol{i}_z = \boldsymbol{i}_z$$



よって勾配▽の座標変換は
以下の通りになる。

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i}_x + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{i}_y + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{i}_z$$

$$= \left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)(\boldsymbol{i}_r\cos\theta - \boldsymbol{i}_\theta\sin\theta) + \left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)(\boldsymbol{i}_r\sin\theta + \boldsymbol{i}_\theta\cos\theta) + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{i}_z$$

$$= \frac{\partial}{\partial r}\boldsymbol{i}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\boldsymbol{i}_\theta + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{i}_z$$

備考：直交座標系から円筒座標系への座標変換（5）

$$\nabla^2 = \nabla\cdot\nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z}$$

$$= \left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\cdot\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\cdot\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)$$

$$+ \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$= \cos^2\theta\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \cos\theta\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right) - \frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\sin^2\theta\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}$$

$$+ \sin^2\theta\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \sin\theta\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r}\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\cos^2\theta\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\sin^2\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos^2\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

備考：直交座標系から円筒座標系への座標変換（6）

$$= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

コアとクラッドの境界条件はそれぞれの領域での電界成分・磁界成分の接線成分が等しいことで立てる。

接線成分はθ, z成分の２成分存在するが、まずz方向について求めていく。

式(5.11)(5.12)をそれぞれ電界・磁界のz方向成分で記述すると以下のようになる。

$$\frac{\partial {E_z}^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial {E_z}^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial {E_z}^2}{\partial z^2} + \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 {n_i}^2 E_z = 0$$

$$\frac{\partial {H_z}^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial H_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial {H_z}^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial {H_z}^2}{\partial z^2} + \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 {n_i}^2 H_z = 0$$

備考:直交座標系から円筒座標系への座標変換(7)

界分布のz方向依存性を $e^{-j\beta z}$ と仮定して、

$$\frac{\partial^2}{\partial^2 z} = -\beta^2$$

また

$$k_0 = \frac{\omega}{c} = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$$

だから、

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 E_z}{\partial \theta^2} + (k_0{}^2 n_i{}^2 - \beta^2)E_z = 0$$

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial H_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 H_z}{\partial \theta^2} + (k_0{}^2 n_i{}^2 - \beta^2)H_z = 0$$

よって式(5.45)が導出された。

式(5.45)の変形（1）

いまE$_z$についてr成分とθ成分に変数分離を行い、

$$E_z = R(r)\Theta(\theta)$$

とおいて式(5.45)に代入する。

$$\frac{d^2R}{dr^2}\Theta + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr}\Theta + \frac{1}{r^2}\frac{d^2\Theta}{d\theta^2}R + (k_0{}^2n_i{}^2 - \beta^2)R\Theta = 0$$

両辺を $R\Theta$ で割って左辺をrを含む式の辺、右辺をrを含まない式とする。

$$\frac{1}{R}\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{1}{R}\frac{dR}{dr} + (k_0{}^2n_i{}^2 - \beta^2) = -\frac{1}{\Theta}\frac{1}{r^2}\frac{d^2\Theta}{d\theta^2}$$

$$\frac{1}{R}r^2\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{R}r\frac{dR}{dr} + (k_0{}^2n_i{}^2 - \beta^2)r^2 = -\frac{1}{\Theta}\frac{d^2\Theta}{d\theta^2}$$

式(5.45)の変形（2）

左辺においてr= 一定とすると左辺=定数となるので、右辺も定数となる。
この値（分離定数）を l^2 とおくと、右辺から

$$-\frac{1}{\Theta}\frac{d^2\Theta}{d\theta^2}=l^2$$

$$\frac{d^2\Theta}{d\theta^2}+l^2\Theta=0$$

よって

$$\Theta(\theta)=\cos(l\theta+\varphi)$$

とおける（ $\Theta(\theta)=Ae^{jl\theta}+Be^{-jl\theta}$ ともおけるが、ここでは
わかりやすさを考えて三角関数で表現した）。

式(5.45)の変形（3）

一方、左辺については

$$\frac{1}{R}r^2\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{1}{R}r\frac{dR}{dr}+(k_0{}^2n_i{}^2-\beta^2)r^2=l^2$$

$$\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dR}{dr}+\left[(k_0{}^2n_i{}^2-\beta^2)-\frac{l^2}{r^2}\right]R=0 \qquad (A.1)$$

コア内($n_i=n_1$)においては $k_0n_1>\beta$ である。

$k_0{}^2n_1{}^2-\beta^2=\kappa^2$ とおき、 $x=\kappa r$ の変数変換を行うと、

式(A.1)は以下のように変形できる。

$$\frac{d}{dr}=\frac{dx}{dr}\frac{d}{dx}=\kappa\frac{d}{dx}, \qquad \frac{d^2}{dr^2}=\frac{d}{dr}\left(\kappa\frac{d}{dx}\right)=\frac{dx}{dr}\frac{d}{dx}\left(\kappa\frac{d}{dx}\right)=\kappa^2\frac{d^2}{dx^2}$$

式(5.45)の変形（4）

$$\kappa^2 \frac{d^2R}{dx^2} + \frac{\kappa}{x}\kappa\frac{dR}{dx} + \left[\kappa^2 - \frac{\kappa^2 l^2}{x^2}\right]R = 0$$

$$\therefore \frac{d^2R}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dR}{dx} + \left[1 - \frac{l^2}{x^2}\right]R = 0 \qquad (A.2)$$

式(A.2)はベッセルの微分方程式（変数は $x = \kappa r$ ）であり、
基本解は第一種ベッセル関数と第二種ベッセル関数であることがわかる。

一方クラッド内では($n_i = n_2$)においては $k_0 n_2 < \beta$ である。

式(A.2)は

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr} - \left[(\beta^2 - k_0{}^2 n_2{}^2) + \frac{l^2}{r^2}\right]R = 0$$

式(5.45)の変形（5）

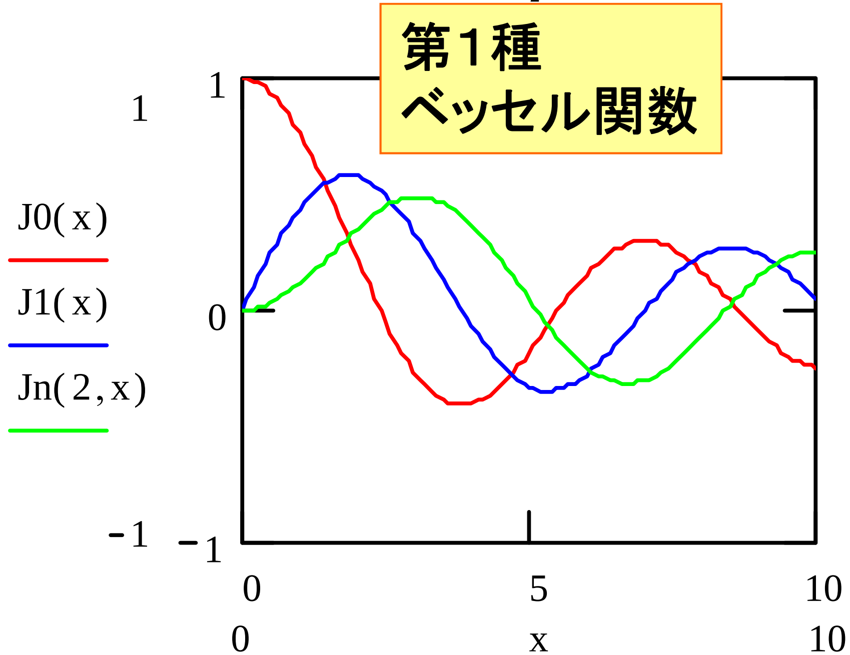
$\beta^2 - k_0{}^2 n_2{}^2 = \gamma^2$ とおき、$x = \gamma r$ の変数変換を行うと前述と同様にして、

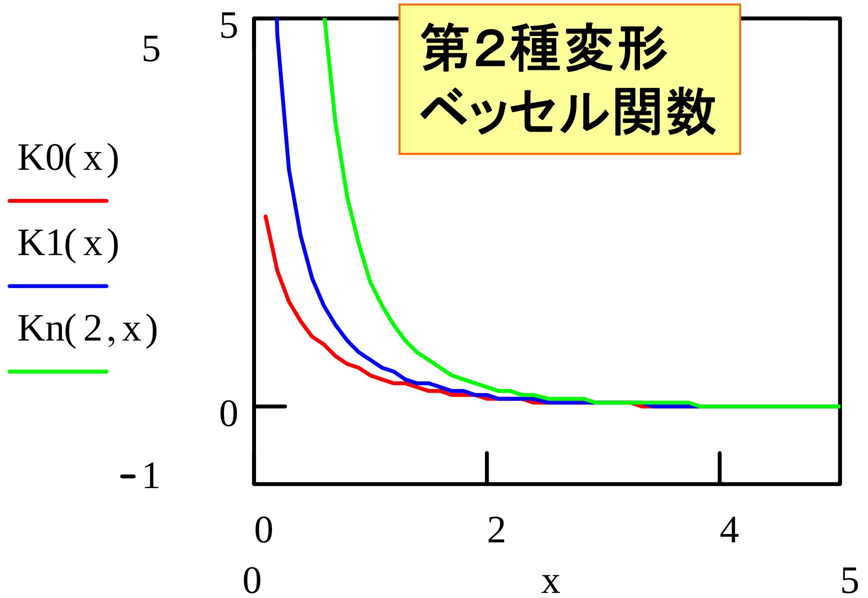
$$\frac{d^2 R}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dR}{dx} - \left[1 + \frac{l^2}{x^2}\right] R = 0 \qquad (A.3)$$

よって式(A.3)はベッセルの微分方程式（変数は $x = \gamma r$ ）であり、

基本解は変形第一種ベッセル関数と変形第二種ベッセル関数であることがわかる。

光ファイバのモード(3)
第1種ベッセル関数$J_l(x)$, 第2種変形ベッセル関数$K_l(x)$





光ファイバのモード（2）

式(5.45)を(5.46)に代入

⇒ 変数分離法により角度θ依存性は三角関数

半径r依存性はコア内振動解：第１種ベッセル関数$J_\nu(x)$

クラッド内は減衰解：

第２種変形ベッセル関数$K_\nu(x)$

$\boxed{\text{コア内}}$ $(r \le a)$

$$Ez = A_l J_l(\kappa r)\cos(l\theta + \phi_l) \qquad (5.47)$$

$$Hz = B_l J_l(\kappa r)\cos(l\theta + \psi_l) \qquad (5.48)$$

$\boxed{\text{クラッド内}}$ $(r > a)$

$$Ez = A_l \frac{J_l(\kappa a)}{K_l(\gamma a)} K_l(\gamma r)\cos(l\theta + \phi_l) \qquad (5.49)$$

$$Hz = B_l \frac{J_l(\kappa r)}{K_l(\gamma a)} K_l(\gamma r)\cos(l\theta + \psi_l) \qquad (5.50)$$

Ez, Hzがそれぞれr=aにおいて連続となるように係数を考慮

l : 角度θ方向のモード番号

光ファイバのモード（4）

θ方向（接線成分）が$r=a$で連続となる条件

$$E_\theta(r \to a_{+0}) = E_\theta(r \to a_{-0}) \qquad (5.51)$$

$$H_\theta(r \to a_{+0}) = H_\theta(r \to a_{-0}) \qquad (5.52)$$

ここで式(5.7), (5.8)の円筒座標系の表現から以下の式を得る。

$$E_\theta = \frac{-j}{\omega^2\varepsilon\mu - \beta^2}\left(\beta\frac{1}{r}\frac{\partial E_z}{\partial\theta} - \omega\mu\frac{\partial H_z}{\partial r}\right) \qquad (5.53)$$

$$H_\theta = \frac{-j}{\omega^2\varepsilon\mu - \beta^2}\left(\omega\varepsilon\frac{\partial E_z}{\partial r} + \beta\frac{1}{r}\frac{\partial H_z}{\partial\theta}\right) \qquad (5.54)$$

式(5.51), (5.52)を満たす条件から得られる2元連立同次方程式が恒等的に0でない解を持つことから、次式を得る。

光ファイバのモード（5）

$$\frac{k_0^2[\frac{J'_l(\kappa a)}{\kappa a J_l(\kappa a)}+\frac{K'_l(\gamma a)}{\gamma a K_l(\gamma a)}][n_1^2\frac{J'_l(\kappa a)}{\kappa a J_l(\kappa a)}+n_2^2\frac{K'_l(\gamma a)}{\gamma a K_l(\gamma a)}]}{l^2\beta^2(\frac{1}{(\kappa a)^2}+\frac{1}{(\gamma a)^2})^2}$$

$$=-\frac{\sin(l\theta+\phi_l)\sin(l\theta+\psi_l)}{\cos(l\theta+\phi_l)\cos(l\theta+\psi_l)}$$

$$=\frac{\cos(2l\theta+\phi_l+\psi_l)-\cos(\phi_l-\psi_l)}{\cos(2l\theta+\phi_l+\psi_l)+\cos(\phi_l-\psi_l)} \quad (5.55)$$

式(5.55)は$r=a$の至るところで成立しなければいけないので、θに無依存。

$\cos(\phi_l-\psi_l)=0$　ならば右辺=1

$\therefore \phi_l-\psi_l=\pm\frac{\pi}{2}$ ⇒ EzとHzの角度依存性はπ/2ずれている＝直交

光ファイバのモード(6)

式(5.55)は次式となる。

$$[\frac{J'_l(\kappa a)}{\kappa a J_l(\kappa a)}+\frac{K'_l(\gamma a)}{\gamma a K_l(\gamma a)}][\frac{J'_l(\kappa a)}{\kappa a J_l(\kappa a)}+(1-2\Delta)\frac{K'_l(\gamma a)}{\gamma a K_l(\gamma a)}]$$

$$=(\frac{l\beta}{k_0 n_1})^2(\frac{1}{(\kappa a)^2}+\frac{1}{(\gamma a)^2}) \qquad (5.56)$$

階段屈折率円筒光ファイバの固有値方程式

弱導波近似（Weakly-guiding Approximation）（１）

式(5.56)において

$$\Delta = \frac{n_1^2 - n_2^2}{2n_1^2} \cong \frac{n_1 - n_2}{n_1} << 1$$

が成り立つ場合には $\beta \cong k_0 n_1$ と近似して（弱導波近似）、

$$\left[\frac{J'_l(\kappa a)}{\kappa a J_l(\kappa a)} + \frac{K'_l(\gamma a)}{\gamma a K_l(\gamma a)}\right] = \chi l\left(\frac{1}{(\kappa a)^2} + \frac{1}{(\gamma a)^2}\right) \qquad (5.57)$$

（ただしχ=+1または-1）

ここで以下のベッセル関数の公式を用いる。

$$\left.\begin{aligned}
\frac{J'_l(\kappa a)}{\kappa a J_l(\kappa a)} &= \frac{J_{l-1}(\kappa a)}{\kappa a J_l(\kappa a)} - \frac{l}{(\kappa a)^2} = -\frac{J_{l+1}(\kappa a)}{\kappa a J_l(\kappa a)} + \frac{l}{(\kappa a)^2} \\
\frac{K'_l(\gamma a)}{\gamma a K_l(\gamma a)} &= -\frac{K_{l-1}(\gamma a)}{\gamma a K_l(\gamma a)} - \frac{l}{(\gamma a)^2} = -\frac{K_{l+1}(\gamma a)}{\gamma a K_l(\gamma a)} + \frac{l}{(\gamma a)^2}
\end{aligned}\right\} \qquad (5.58)$$

弱導波近似（Weakly-guiding Approximation）（２）

χ= -1の場合（HEモード）

$$\frac{J_{l-1}(\kappa a)}{\kappa a J_l(\kappa a)} - \frac{K_{l-1}(\gamma a)}{\gamma a K_l(\gamma a)} = 0 \qquad (5.59)$$

χ= +1の場合（EHモード）

$$\frac{J_{l+1}(\kappa a)}{\kappa a J_l(\kappa a)} + \frac{K_{l+1}(\gamma a)}{\gamma a K_l(\gamma a)} = 0 \qquad (5.60)$$

光ファイバのモードの分類(1)

光ファイバの一般解は6つの電磁界($Er, E\theta, Ez, Hr, H\theta, Hz$)をすべて持ったモードである。

⇒ ハイブリッドモード

① HEモード

$\chi = -1$で$l \geq 1$の場合、モード番号を新たに$\nu = l - 1$と振ると、式(5.59)は以下に変形できる。

$$\boxed{\frac{J_{\nu-1}(\sqrt{1-b}V)}{J_{\nu}(\sqrt{1-b}V)} \cdot \frac{K_{\nu}(\sqrt{b}V)}{K_{\nu-1}(\sqrt{b}V)} = -\sqrt{\frac{b}{1-b}}} \qquad (5.61)$$

光ファイバのモードの分類(２)

ただし

$$
\begin{cases}
V = k_0 n_1 a\sqrt{2\Delta} & \text{（Vパラメータ or 規格化周波数）} \\
\Delta = \dfrac{n_1^2 - n_2^2}{2n_1^2} \approx \dfrac{n_1 - n_2}{n_1} & \text{（比屈折率差）} \\
b = \dfrac{(\frac{\beta}{k_0})^2 - n_2^2}{n_1^2 - n_2^2} & \text{（規格化伝搬定数）}
\end{cases}
$$

解の固有値bを値の大きいものから順に**m = 1, 2, 3,....**と振り、
HE$_{l,m}$モードと呼ぶ。

l : 角度θ方向のモード番号
ν: 角度θ方向の節の数の半分
m : 光強度分布が半径方向でとる極大値の数

光ファイバのモードの分類(3)

② TEモード、TMモード

$l=0$の場合(ファイバの回転方向に一様な界分布)、

$$\boxed{\frac{J_0(\sqrt{1-b}V)}{J_1(\sqrt{1-b}V)}\cdot\frac{K_1(\sqrt{b}V)}{K_0(\sqrt{b}V)}=-\sqrt{\frac{b}{1-b}}} \qquad (5.62)$$

式(5.47)～(5.50)において $\phi_l=\dfrac{\pi}{2}$ とすると $E_z=0$ ⇒ TEモード

$\phi_l=0$ とすると $H_z=0$ ⇒ TMモード

光ファイバのモードの分類（4）

③ EHモード

$\chi = +1$で$l \geq 1$の場合、モード番号を新たに$\nu = l + 1$と振ると、式(5.60)は以下に変形できる。

$$\boxed{\frac{J_{\nu-1}(\sqrt{1-b}V)}{J_{\nu}(\sqrt{1-b}V)} \cdot \frac{K_{\nu}(\sqrt{b}V)}{K_{\nu-1}(\sqrt{b}V)} = -\sqrt{\frac{b}{1-b}}} \qquad (5.63)$$

LPモード（1）

式(5.61)～(5.63)はすべて同じ形である。
方位角θ方向のモード番号lを変換して

$$\nu = \begin{cases} l-1 : HE_{l,m}\text{モード} \\ l+1 : TE_{0,m}, TM_{0,m}, EH_{l,m}\text{モード} \end{cases}$$

とおくと、同じνを持つ$HE_{\nu+1,m}$モードと$EH_{\nu-1,m}$モードは伝搬定数が同じである。

⇒ 縮退

※弱導波路近似により導出されるものなので、厳密解では
若干差あり
Little difference of propagation constant occurs in the actual modes

互いに縮退を起こしている固有関数の線形結合から作った固有モードの組み合わせにより、直線偏光したモードを作ることができる。

⇒ LP（Linearly Polarized）モード：$LP_{\nu,m}$

LPモード（2）

LPモードと厳密モードの対応

LPモード近似	厳密モード	カットオフV値
$LP_{0,m}$	$HE_{1,m}$	Vc=0 (m=1) J_1(Vc)=0のm-1番目の根（m≥2） ２偏波モードを合わせた2重に縮退
$LP_{1,m}$	$HE_{2,m}$ $TE_{0,m}$ $TM_{0,m}$	Vc=2.4048 (m=1) J_0(Vc)=0のm番目の根（ m≥2 ） ２偏波モードを合わせた4重に縮退 （TE、TMは軸対称のため偏波縮退なし）
$LP_{\nu,m}$ （ν ≥2 ）	$HE_{\nu+1,m}$ $EH_{\nu-1,m}$	$J_{\nu-1}$(Vc)=0のm番目の根 ２偏波モードを合わせた4重に縮退

光ファイバのモード電磁界式（1）

コア内 $(0 \le r \le a)$

$$\left.\begin{aligned}
E_r &= -jA\beta \frac{a}{\kappa a}\left[\frac{1-s}{2}J_{l-1}(\kappa r) - \frac{1+s}{2}J_{l+1}(\kappa r)\right]\cos(l\theta + \phi_l) \\
E_\theta &= jA\beta \frac{a}{\kappa a}\left[\frac{1-s}{2}J_{l-1}(\kappa r) + \frac{1+s}{2}J_{l+1}(\kappa r)\right]\sin(l\theta + \phi_l) \\
E_z &= AJ_l(\kappa r)\cos(l\theta + \phi_l) \\
H_r &= -jA\omega\varepsilon_0 n_1^2 \frac{a}{\kappa a}\left[\frac{1-s_1}{2}J_{l-1}(\kappa r) + \frac{1+s_1}{2}J_{l+1}(\kappa r)\right]\sin(l\theta + \phi_l) \\
H_\theta &= -jA\omega\varepsilon_0 n_1 \frac{a}{\kappa a}\left[\frac{1-s_1}{2}J_{l-1}(\kappa r) - \frac{1+s_1}{2}J_{l+1}(\kappa r)\right]\cos(l\theta + \phi_l) \\
H_z &= -A\frac{\beta}{\omega\mu_0} sJ_l(\kappa r)\sin(l\theta + \phi_l)
\end{aligned}\right\} \quad (5.64)$$

光ファイバのモード電磁界式（2）

クラッド内 $(r > a)$

$$
\left.
\begin{aligned}
E_r &= -jA\beta \frac{a}{\gamma a}\frac{J_l(\kappa a)}{K_l(\gamma a)}\left[\frac{1-s}{2}K_{l-1}(\gamma r) + \frac{1+s}{2}K_{l+1}(\gamma r)\right]\cos(l\theta + \phi_l) \\
E_\theta &= jA\beta \frac{a}{\gamma a}\frac{J_l(\kappa a)}{K_l(\gamma a)}\left[\frac{1-s}{2}K_{l-1}(\gamma r) - \frac{1+s}{2}K_{l+1}(\gamma r)\right]\sin(l\theta + \phi_l) \\
E_z &= A\frac{J_l(\kappa a)}{K_l(\gamma a)}K_l(\gamma r)\cos(l\theta + \phi_l) \\
H_r &= -jA\omega\varepsilon_0 n_2{}^2 \frac{a}{\gamma a}\frac{J_l(\kappa a)}{K_l(\gamma a)}\left[\frac{1-s_0}{2}K_{l-1}(\gamma r) - \frac{1+s_0}{2}K_{l+1}(\gamma r)\right]\sin(l\theta + \phi_l) \\
H_\theta &= -jA\omega\varepsilon_0 n_2 \frac{a}{\gamma a}\frac{J_l(\kappa a)}{K_l(\gamma a)}\left[\frac{1-s_0}{2}K_{l-1}(\gamma r) + \frac{1+s_0}{2}K_{l+1}(\kappa r)\right]\cos(l\theta + \phi_l) \\
H_z &= -A\frac{\beta}{\omega\mu_0}s\frac{J_l(\kappa a)}{K_l(\gamma a)}K_l(\gamma r)\sin(l\theta + \phi_l)
\end{aligned}
\right\} \quad (5.65)
$$

光ファイバのモード電磁界式（３）

ただし

$$s = \frac{l\{(\frac{1}{\kappa a})^2 + (\frac{1}{\gamma a})^2\}}{[\frac{J_l'(\kappa a)}{\kappa a J_l(\kappa a)} + \frac{K_l'(\gamma a)}{\gamma a K_l(\gamma a)}]}$$

$$s_1 = \frac{\beta^2}{k_0{}^2 n_1{}^2} s$$

$$s_0 = \frac{\beta^2}{k_0{}^2 n_2{}^2} s$$

光ファイバの電磁界

岡本勝就著『光導波路の基礎』pp.63　図3.2

$LP_{0,1}$　$HE_{1,1}$

$TE_{0,1}$

$LP_{1,1}$　$TM_{0,1}$

$HE_{2,1}$

$EH_{1,1}$

$LP_{2,1}$

$HE_{3,1}$

光ファイバの分散曲線(1)

基本モードν=0について考える。式(5.61)にν=0を代入して

$$\frac{J_0(\sqrt{1-b}V)}{J_1(\sqrt{1-b}V)}\cdot\frac{K_1(\sqrt{b}V)}{K_0(\sqrt{b}V)}=-\sqrt{\frac{b}{1-b}}$$

カットオフ条件は、b=0とおいて$J_0(Vc)=0$の第一番目の解なので、

$$V \le 2.405$$

$V = k_0 n_1 a\sqrt{2\Delta}$ より

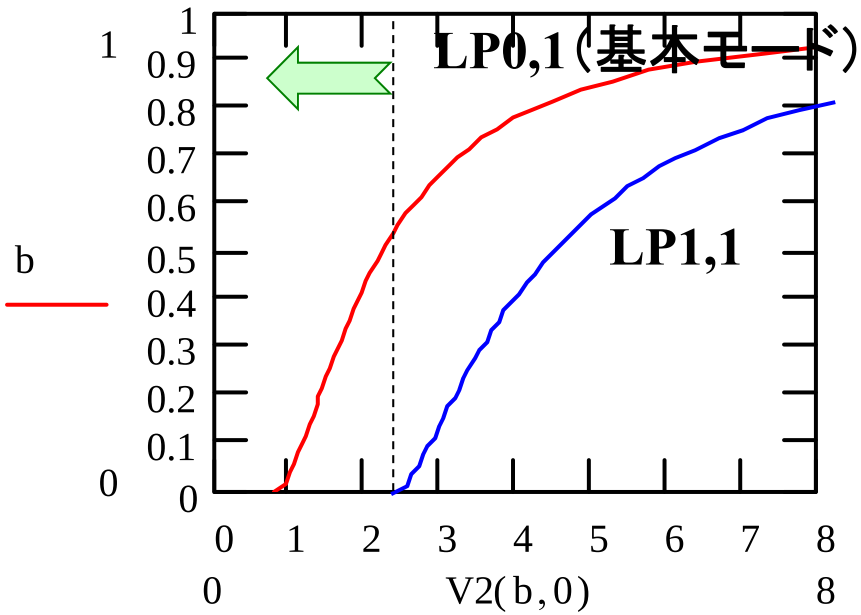
$$a < \frac{2.405}{k_0 n_1\sqrt{2\Delta}}$$

$\Delta = 0.003,\ \ n_1 = 1.46$のとき、

$$a < \frac{2.405\times 1.55}{2\pi\times 1.46\times\sqrt{2\times 0.003}} = 5.25\mu m$$

(直径10.5μm以下)

単一モード条件



光ファイバの分散曲線（２）

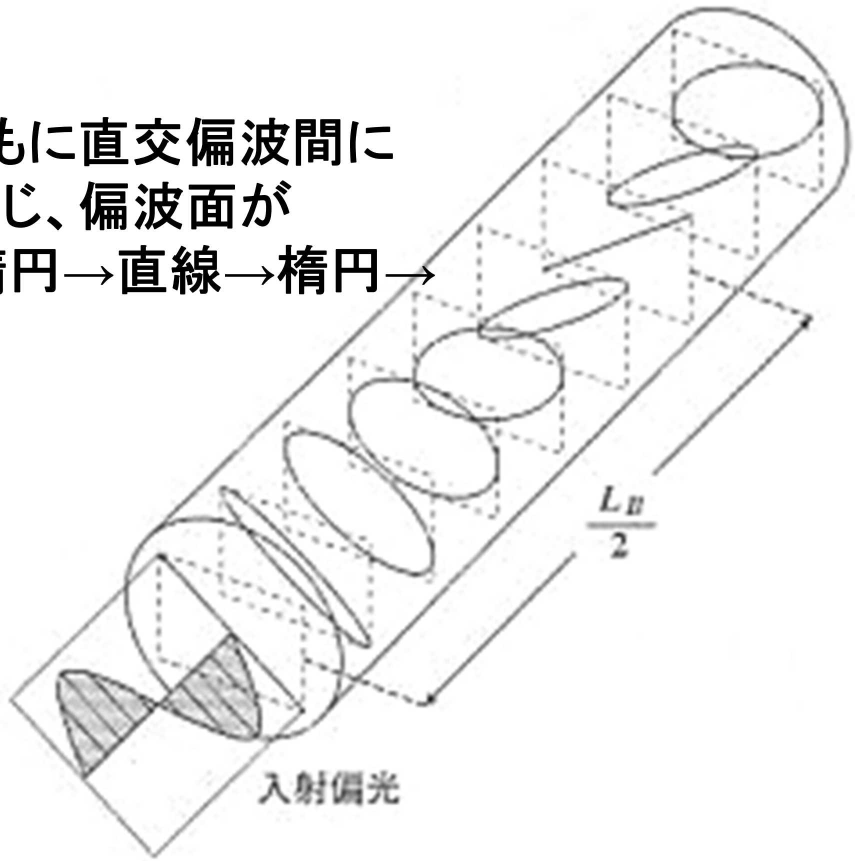
岡本勝就著『光導波路の基礎』pp.66　図3.4

偏波

光ファイバ中の偏波状態の変化

- 基本モード（$HE_{1,1}$）は真円コアに対しては中心対称であり偏波状態は縮退する（伝搬定数が等しい）。
- 実際は製造上の非対称性、外部応力により直交偏波間に屈折率差を生ずる（複屈折性）。

⇨ 伝搬とともに直交偏波間に遅延を生じ、偏波面が直線→楕円→直線→楕円→と変化



國分泰雄著 『光波工学』 共立出版 pp. 178図6.10より

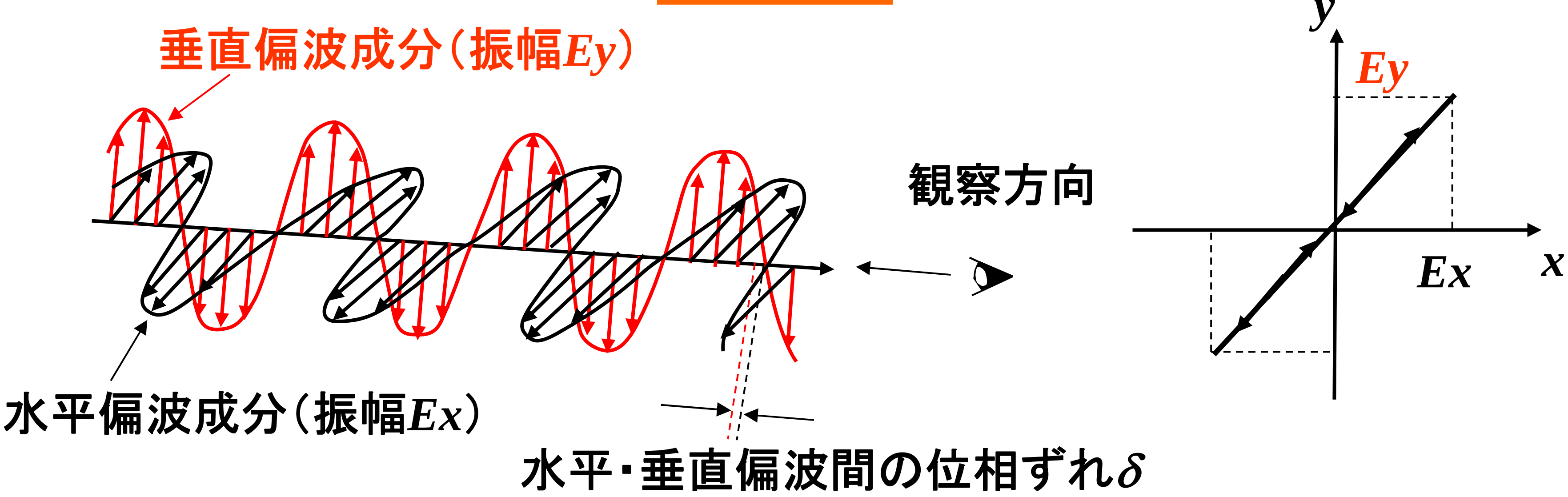
偏波の状態の表現方法(1)

- 直線偏光、円偏光、楕円偏光
- 右回り偏光、左回り偏光

光が進む方向から逆に観察したときに電界の描く軌跡の形状、変化の方向

水平偏波・垂直偏波に分解したときの各偏波成分の振幅と位相ずれにより偏波状態が決定される。

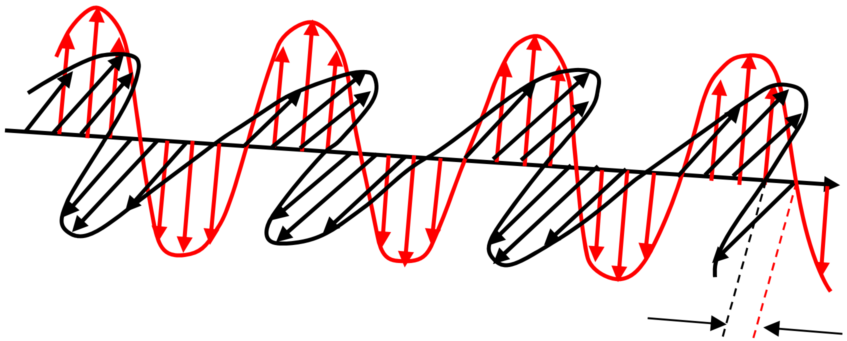
直線偏波 ($\delta = 0$)



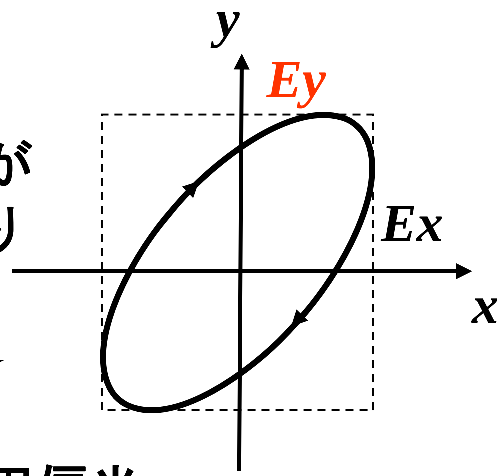
偏波の状態の表現方法(2)

楕円偏波

$0 < \delta < \pi$ (垂直偏波の位相が進む)



軌跡が右回り



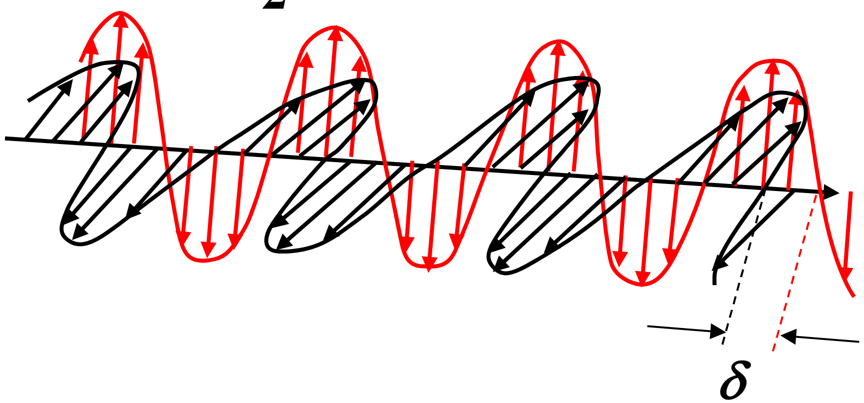
右回り楕円偏光

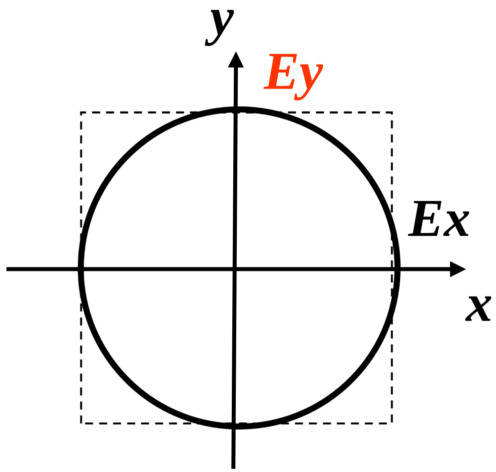
$-\pi < \delta < 0$ (垂直偏波の位相が遅れる):左回り楕円偏光

偏波の状態の表現方法(3)

円偏波

$\delta = \pm\frac{\pi}{2}$ かつ $Ex = Ey$





$\delta = \frac{\pi}{2}$:右回り円偏光

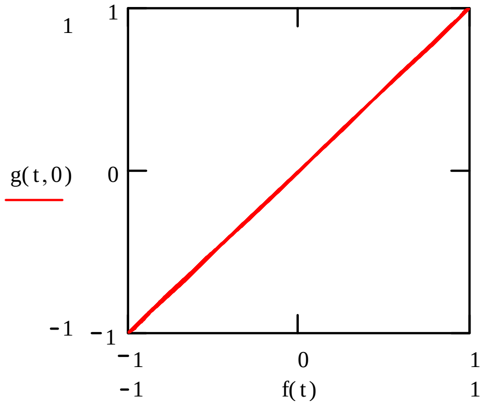
$\delta = -\frac{\pi}{2}$:左回り円偏光

偏光間の位相ずれと偏波状態

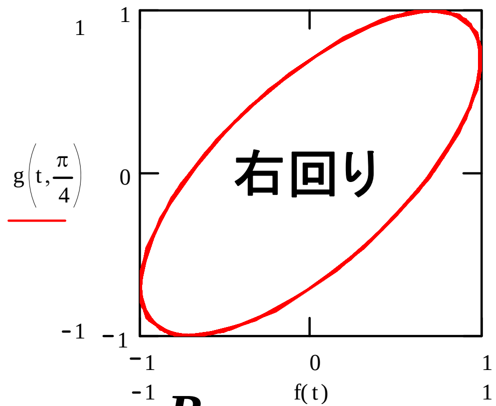
$$\left.\begin{aligned} f(t) &= A\cos\omega t \\ g(t) &= B\cos(\omega t+\delta) \end{aligned}\right\}$$

とおき、t を変化させたときの$f(t)$ － $g(t)$の軌跡を計算

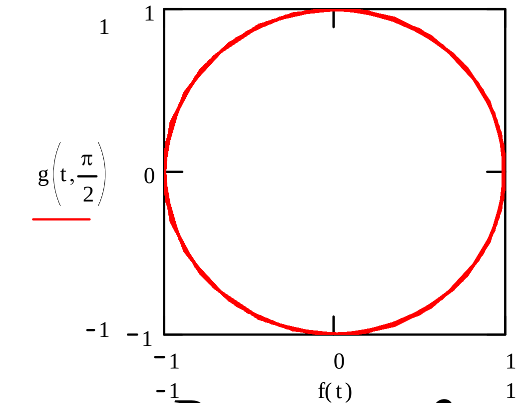
$$\frac{B}{A}=1, \delta=0$$



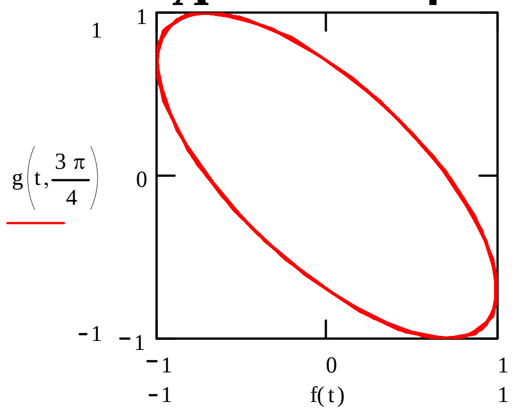
$$\frac{B}{A}=1, \delta=\frac{\pi}{4}$$



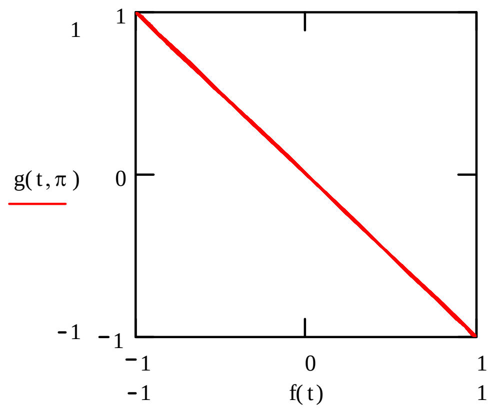
$$\frac{B}{A}=1, \delta=\frac{\pi}{2}$$



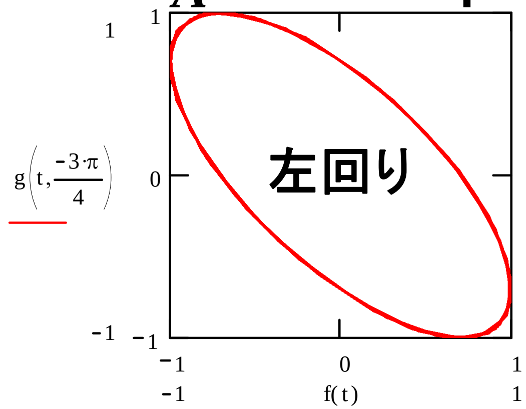
$$\frac{B}{A}=1, \delta=\frac{3\pi}{4}$$



$$\frac{B}{A}=1, \delta=\pi$$



$$\frac{B}{A}=1, \delta=-\frac{3\pi}{4}$$



偏波状態の数式表現(1)

$$\left.\begin{aligned} Ex &= Ax\cos(\omega t - \beta z) \quad ① \\ Ey &= Ay\cos(\omega t - \beta z + \delta) \quad ② \end{aligned}\right\}$$ とおく。

式①より、

$$\cos(\omega t - \beta z) = \frac{Ex}{Ax} \quad ③$$

式②より、

$$Ey = Ay\{\cos(\omega t - \beta z)\cos\delta - \sin(\omega t - \beta z)\sin\delta\}$$

$$\sin(\omega t - \beta z) = \frac{-\frac{Ey}{Ay} + \cos(\omega t - \beta z)\cos\delta}{\sin\delta} = \frac{-\frac{Ey}{Ay} + \frac{Ex}{Ax}\cos\delta}{\sin\delta} \quad ④$$

$\cos^2(\omega t - \beta z) + \sin^2(\omega t - \beta z) = 1$ に式③、④を代入

偏波状態の数式表現(2)

$$\left(\frac{Ex}{Ax}\right)^2+\left(\frac{-\frac{Ey}{Ay}+\frac{Ex}{Ax}\cos\delta}{\sin\delta}\right)^2=1$$

よって、

$$\boxed{\left(\frac{Ex}{Ax}\right)^2+\left(\frac{Ey}{Ay}\right)^2-2\left(\frac{Ex}{Ax}\right)\left(\frac{Ey}{Ay}\right)\cos\delta=\sin^2\delta}$$

⑤ 楕円の式

$\delta=0$ のとき、

$$\left(\frac{Ex}{Ax}\right)^2+\left(\frac{Ey}{Ay}\right)^2-2\left(\frac{Ex}{Ax}\right)\left(\frac{Ey}{Ay}\right)=0$$

$$\therefore Ey=\frac{Ay}{Ax}Ex$$

直線偏波

$\delta=\pi$ のとき、

$$\left(\frac{Ex}{Ax}\right)^2+\left(\frac{Ey}{Ay}\right)^2+2\left(\frac{Ex}{Ax}\right)\left(\frac{Ey}{Ay}\right)=0$$

$$\therefore Ey=-\frac{Ay}{Ax}Ex$$

直線偏波

偏波状態の数式表現(3)

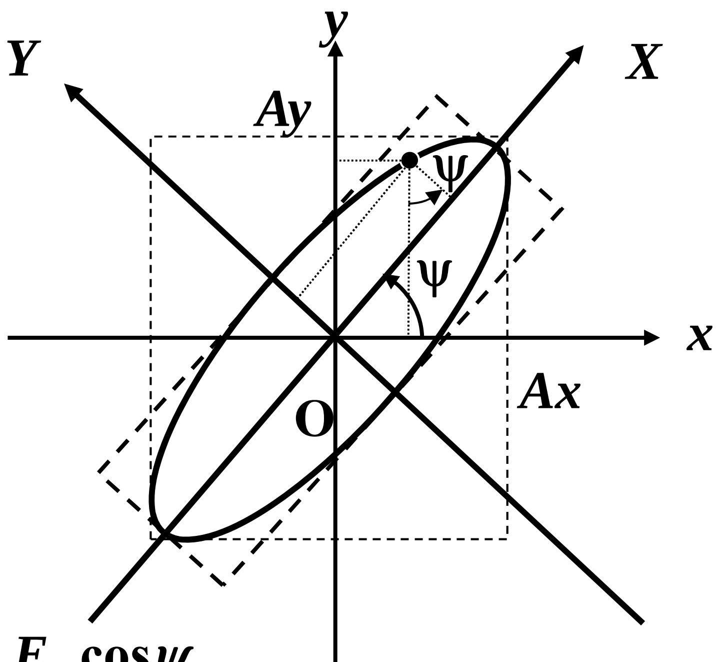
$\delta = \frac{\pi}{2}$ のとき、 $(\frac{Ex}{Ax})^2 + (\frac{Ey}{Ay})^2 = 1$ 　軸が水平・垂直方向を向いた楕円

$\delta = \frac{\pi}{2}, Ax = Ay$ のとき、 $Ex^2 + Ey^2 = Ax^2$ 　円

偏波状態の数式表現(4)

楕円が水平・垂直軸方向を向くように
座標軸を回転させる。

$$\left.\begin{aligned} Ex &= E_X \cos\psi - E_Y \sin\psi \\ Ey &= E_X \sin\psi + E_Y \cos\psi \end{aligned}\right\} \text{⑥}$$



を式⑤に代入する。

$$(\frac{E_X \cos\psi - E_Y \sin\psi}{Ax})^2 + (\frac{E_X \sin\psi + E_Y \cos\psi}{Ay})^2$$

$$-2(\frac{E_X \cos\psi - E_Y \sin\psi}{Ax})(\frac{E_X \sin\psi + E_Y \cos\psi}{Ay})\cos\delta = \sin^2\delta$$

$$(\frac{\cos^2\psi}{Ax^2} + \frac{\sin^2\psi}{Ay^2} - 2\frac{\sin\psi\cos\psi\cos\delta}{AxAy})E_X{}^2 + (\frac{\sin^2\psi}{Ax^2} + \frac{\cos^2\psi}{Ay^2} + 2\frac{\sin\psi\cos\psi\cos\delta}{AxAy})E_Y{}^2$$

$$+2\{(\frac{-1}{Ax^2} + \frac{1}{Ay^2})\sin\psi\cos\psi + \frac{-\cos^2\psi + \sin^2\psi}{AxAy}\cos\delta)E_X E_Y = \sin^2\delta \quad \text{⑦}$$

偏波状態の数式表現(5)

座標変換後、$E_X E_Y$成分は0になるので、

$$\left(\frac{-1}{Ax^2}+\frac{1}{Ay^2}\right)\sin\psi\cos\psi+\frac{-\cos^2\psi+\sin^2\psi}{AxAy}\cos\delta=0 \quad ⑧$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{Ax^2-Ay^2}{Ax^2Ay^2}\right)\sin 2\psi-\frac{\cos 2\psi}{AxAy}\cos\delta=0$$

$$\tan 2\psi=\frac{\sin 2\psi}{\cos 2\psi}=\frac{2AxAy\cos\delta}{Ax^2-Ay^2}$$

$$\boxed{\therefore \psi=\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{2AxAy\cos\delta}{Ax^2-Ay^2}\right)} \quad ⑨$$

偏波状態の数式表現(6)

一方、
$$\left.\begin{aligned} E_X &= a\cos(\omega t-\beta z+\delta_0) \\ E_Y &= \pm b\sin(\omega t-\beta z+\delta_0) \end{aligned}\right\} \quad ⑩$$

とおく(X-Y軸が楕円の長軸・短軸に平行のため、式⑤のδ=π/2に相当し、cos, sinで表現したδは同じとなる)。

式⑥より

$$\left.\begin{aligned} E_X &= E_x\cos\psi+E_y\sin\psi \\ E_Y &= -E_x\sin\psi+E_y\cos\psi \end{aligned}\right\} \quad ⑪$$

なので、式①、②、⑩、⑪より

$$a\cos(\omega t-\beta z+\delta_0)=\{A_x\cos(\omega t-\beta z)\}\cos\psi+A_y\cos(\omega t-\beta z+\delta)\sin\psi$$

$$\begin{aligned} a\cos(\omega t-\beta z)\cos\delta_0-a\sin(\omega t-\beta z)\sin\delta_0 &= A_x\cos(\omega t-\beta z)\cos\psi+A_y\cos(\omega t-\beta z+\delta)\sin\psi \\ &= A_x\cos(\omega t-\beta z)\cos\psi+A_y\{\cos(\omega t-\beta z)\cos\delta-\sin(\omega t-\beta z)\sin\delta\}\sin\psi \\ &= (A_x\cos\psi+A_y\sin\psi\cos\delta)\cos(\omega t-\beta z)-A_y\sin\psi\sin\delta\sin(\omega t-\beta z) \end{aligned}$$

任意のωt-βzに対して成立するために、cos(ωt-bz), sin(ωt-bz)の係数が等しいと考える。

偏波状態の数式表現(7)

$$a\cos\delta_0 = A_x\cos\psi + A_y\sin\psi\cos\delta \quad ⑫$$

$$a\sin\delta_0 = A_y\sin\psi\cos\delta \quad ⑬$$

また

$$\pm b\sin(\omega t - \beta z + \delta_0) = -A_x\cos(\omega t - \beta z)\sin\psi + A_y\cos(\omega t - \beta z + \delta)\cos\psi$$

$$\pm\left(b\sin(\omega t - \beta z)\cos\delta_0 + b\cos(\omega t - \beta z)\sin\delta_0\right) = -A_x\sin\psi\cos(\omega t - \beta z) + A_y\left\{\cos\delta\cos(\omega t - \beta z) - \sin\delta\sin(\omega t - \beta z)\right\}\cos\psi$$

$$= \left(-A_x\sin\psi + A_y\cos\psi\cos\delta\right)\cos(\omega t - \beta z) - A_y\sin\delta\cos\psi\sin(\omega t - \beta z)$$

cos(ωt-bz), sin(ωt-bz)の係数が等しいと考えて、

$$\pm b\cos\delta_0 = -A_y\sin\delta\cos\psi \quad ⑭$$

$$\pm b\sin\delta_0 = -A_x\sin\psi + A_y\cos\psi\cos\delta \quad ⑮$$

⑫^2+⑬^2

$$a^2(\cos^2\delta_0 + \sin^2\delta_0) = \left(A_x\cos\psi + A_y\sin\psi\cos\delta\right)^2 + \left(A_y\sin\psi\sin\delta\right)^2$$

$$a^2 = A_x{}^2\cos^2\psi + A_y{}^2\sin^2\psi + 2A_xA_y\sin\psi\cos\psi\cos\delta \quad ⑯$$

⑭^2+⑮^2

$$b^2(\cos^2\delta_0 + \sin^2\delta_0) = \left(-A_y\cos\psi\sin\delta\right)^2 + \left(-A_x\sin\psi + A_y\cos\psi\cos\delta\right)^2$$

$$b^2 = A_x{}^2\sin^2\psi + A_y{}^2\cos^2\psi - 2A_xA_y\sin\psi\cos\psi\cos\delta \quad ⑰$$

偏波状態の数式表現(8)

⑯²+⑰²より、

$$a^2 + b^2 = A_x{}^2 + A_y{}^2 \qquad ⑱$$

⑫×⑭＋⑬×⑮

$$\pm ab\left(\cos^2\delta_0 + \sin^2\delta_0\right)$$
$$= \left(A_x\cos\psi + A_y\sin\psi\cos\delta\right)\left(-A_y\sin\delta\cos\psi\right) + \left(A_y\sin\delta\sin\psi\right)\left(-A_x\sin\psi + A_y\cos\psi\cos\delta\right)$$
$$= -A_xA_y\sin\delta\left(\cos^2\psi + \sin^2\psi\right)$$

$$\therefore \pm ab = -A_xA_y\sin\delta \qquad ⑲$$

⑱÷⑲ $\therefore \dfrac{\pm ab}{a^2 + b^2} = -\dfrac{A_xA_y}{A_x{}^2 + A_y{}^2}\sin\delta$

$\tan\chi = \mp\dfrac{b}{a}$ とおくと、

$$\therefore \frac{\mp ab}{a^2 + b^2} = \mp\frac{\left(\frac{b}{a}\right)}{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} = \frac{\tan\chi}{1 + \tan^2\chi} = \frac{\sin\chi\tan\chi}{\cos\chi}\cos^2\chi$$

$$= \sin\chi\cos\chi$$

偏波状態の数式表現(9)

$$\frac{1}{2}\sin 2\chi = \frac{A_x A_y}{{A_x}^2 + {A_y}^2}\sin\delta$$

$$\chi = \frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{2AxAy\sin\delta}{Ax^2 + Ay^2}\right)$$

よって、式⑤は以下のようにできる。

$$\boxed{\frac{{E_X}^2}{A^2} + \frac{{E_Y}^2}{B^2} = 1}$$

ただし

$$\left.\begin{aligned} A &= \sqrt{Ax^2 + Ay^2}\cos\chi \\ B &= \sqrt{Ax^2 + Ay^2}\sin\chi \\ \chi &= \frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{2AxAy\sin\delta}{Ax^2 + Ay^2}\right) \end{aligned}\right\} ⑳$$

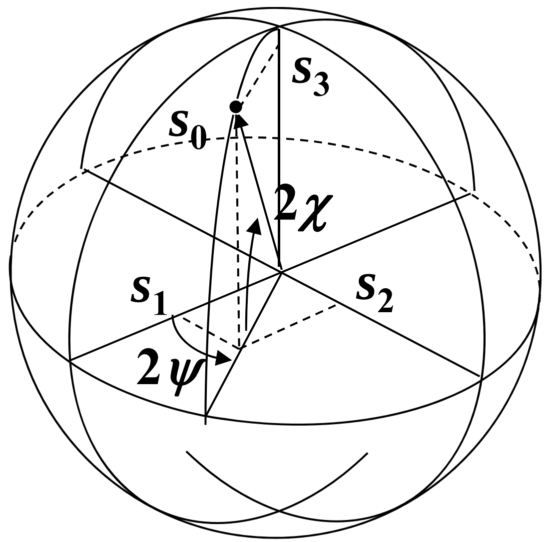
(参考)『光波工学』 栖原 敏明著 コロナ社

ストークスパラメータ

偏光状態は3つのパラメータAx, Ay, δで表現されるがδ の直接的な観測が困難。

⇒ 偏光子、波長板などで測定可能な値を用いた間接的な測定

$$\left.\begin{aligned} s_0 &= Ax^2 + Ay^2 \\ s_1 &= Ax^2 - Ay^2 \\ s_2 &= 2AxAy\cos\delta \\ s_3 &= 2AxAy\sin\delta \\ &\text{ただし}\, s_0^2 = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 \end{aligned}\right\} \text{㉑}$$



式⑨、㉑ 、㉒ より

$$\left.\begin{aligned} s_1 &= s_0\cos 2\chi\cos 2\psi \\ s_2 &= s_0\cos 2\chi\sin 2\psi \\ s_3 &= s_0\sin 2\chi \end{aligned}\right\} \text{㉒}$$

s_0：光パワーに比例
2ψ：電界の長短軸の傾き（＝偏光子透過光パワー最大の角度）
2χ：楕円率（＝偏光子透過光パワー最大と最小の比の正接）

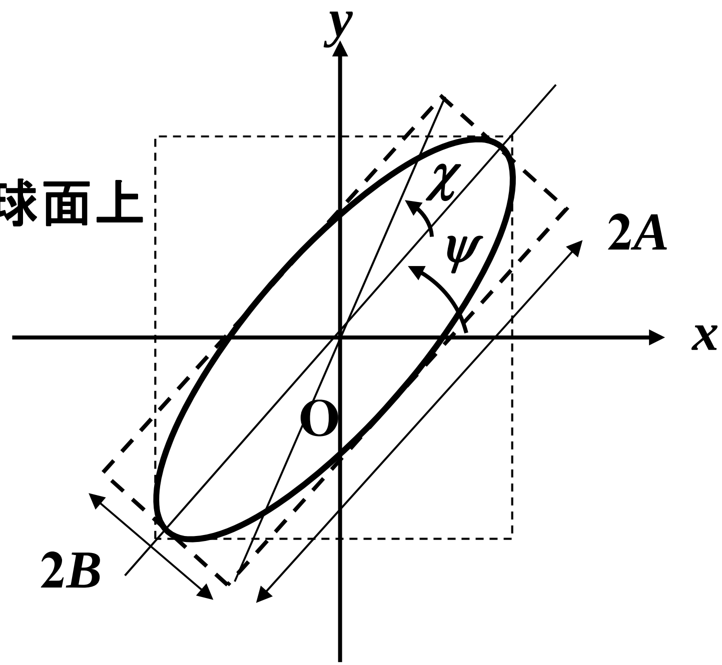
観測可能

ポアンカレ球

楕円の主軸が水平軸となす角ψと

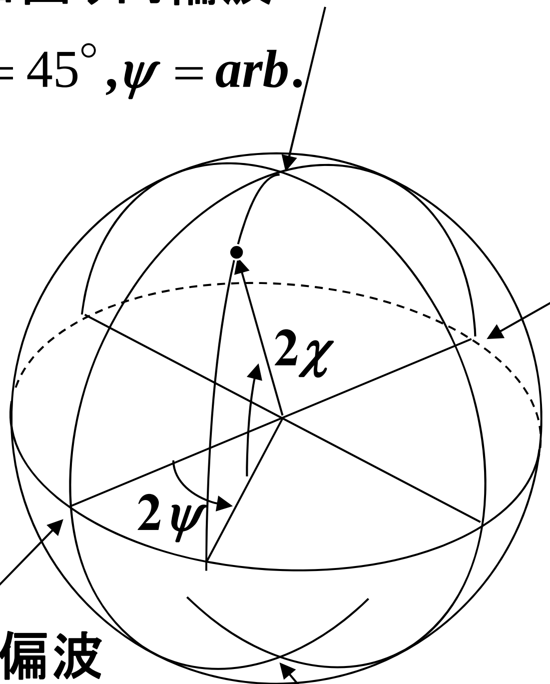
$|\chi| = \tan^{-1}(\frac{B}{A})$ をパラメータとして球面上

に偏波状態を表す。



右回り円偏波

$\chi = 45^\circ, \psi = arb.$



垂直直線偏波

$\chi = 90^\circ, \psi = 0^\circ$

水平直線偏波

$\chi = 0^\circ, \psi = 0^\circ$

左回り円偏波$\chi = -45^\circ, \psi = arb.$

第６章

光ファイバ伝送特性（１）

講義内容

１．光ファイバ中の信号伝搬

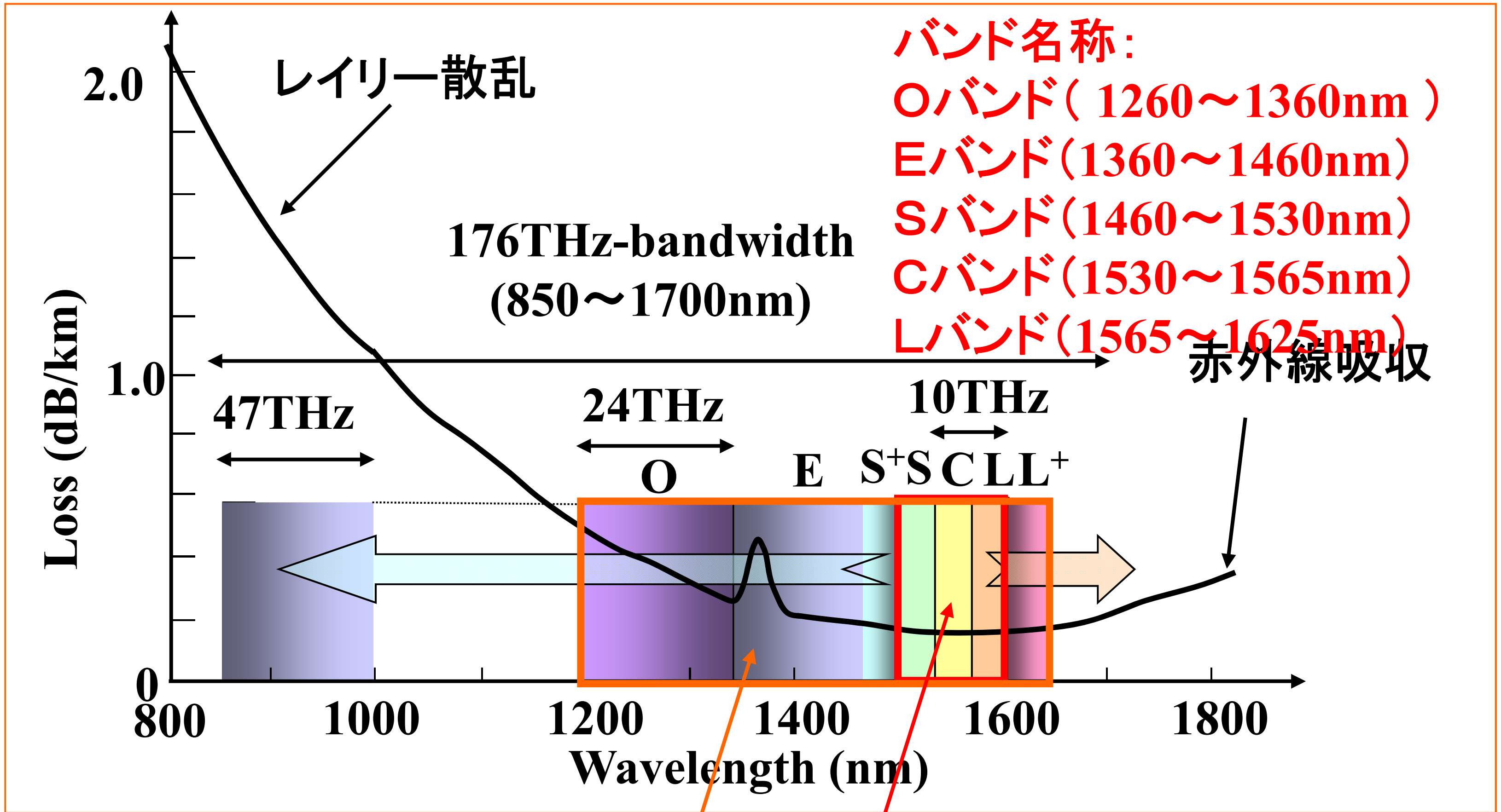
２．波長分散特性

３．伝送帯域

４．光ファイバの研究動向

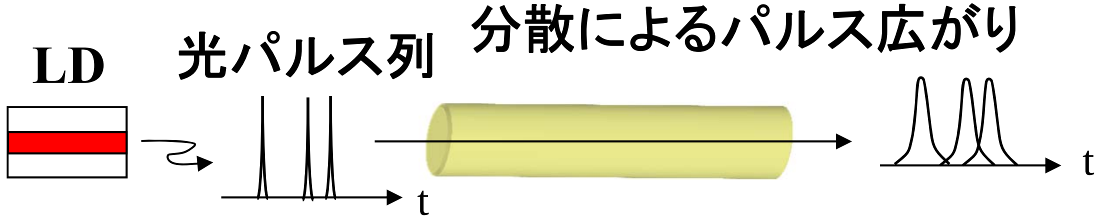
低損失・広帯域光ファイバ

メタル線（同軸線5C-FV）：300dB/km @ 2GHz
光ファイバ：<0.2dB/km @ > 10GHz



DWDM(Dense WDM)
CWDM(Coarse WDM)

波長分散による影響
波形広がりによる信号品質劣化

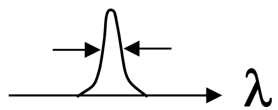


※波長分散:
光ファイバの屈折率波長依存性
による光の到達時間(群遅延)差

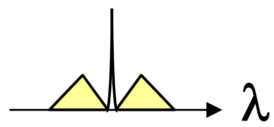
パルス広がりによる信号劣化 ⇒ 波長分散を抑えることが望ましい

LD光スペクトル広がりの原因

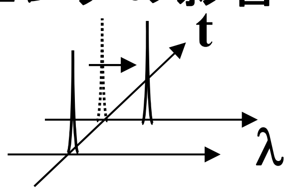
① LD自身の持つ波長広がり



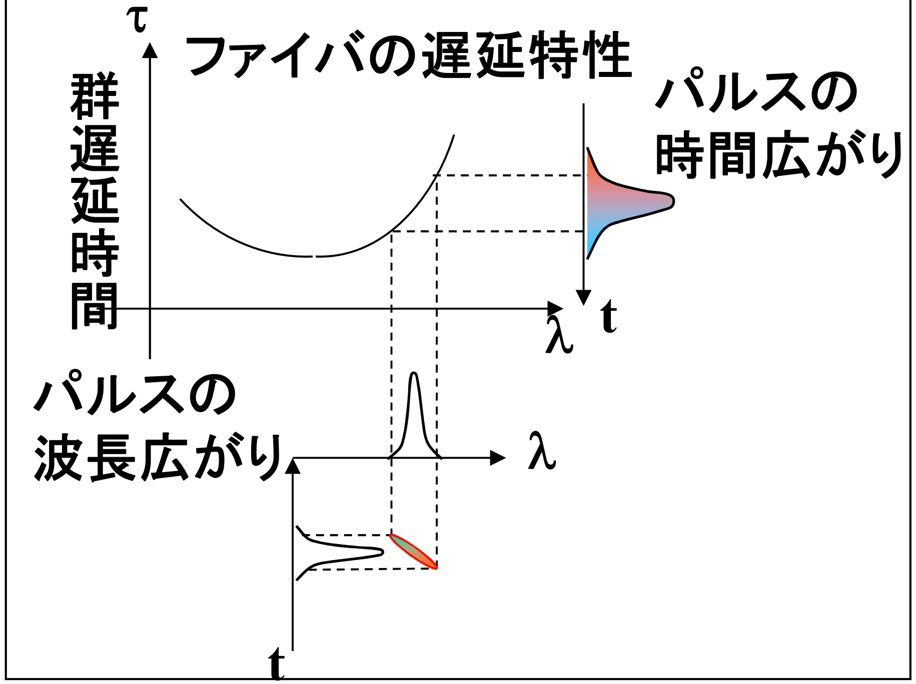
② 変調によるサイドバンドの発生



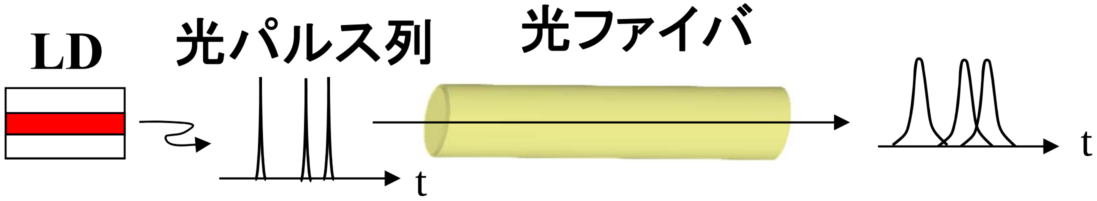
③ 変調によるチャーピングの影響で波長が変動



パルスの時間広がりの原因



光ファイバ中の信号伝搬(1)



入射光波形

$$E(x,y,0;t) = A(x,y,0;t)e^{j\omega_0 t} \quad \textbf{(6.1)}$$

(単一モードファイバを扱うので、
以下x, y座標は省略)

フーリエ変換スペクトルは、

$$E_F(0;\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} E(0;t)e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} A(0;t)e^{-j(\omega-\omega_0)t}dt = A_F(0;\omega-\omega_0) \quad \textbf{(6.2)}$$

距離z伝搬した時、位相変化exp[-jβz](βは伝搬定数)が加わるので
(振幅の減衰は無視)、出射端でのフーリエスペクトルは、

$$A_F(z;\omega) = A_F(0;\omega-\omega_0)\exp[-j\beta z] \qquad \textbf{(6.3)}$$

光ファイバ中の信号伝搬(2)

距離z伝搬した時間波形は$A_F(Z;\omega)$の逆フーリエ変換なので、

$$E(z;t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}A_F(z;\omega)e^{j\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}A_F(0;\omega-\omega_0)\exp[-j\beta z]e^{j\omega t}d\omega \quad (6.4)$$

$\omega-\omega_0=u$と変数変換して

$$E(z;t)=\frac{1}{2\pi}e^{j\omega_0 t}\int_{-\infty}^{\infty}A_F(0;u)\exp[j(ut-\beta(u)z)]du \quad (6.5)$$

βをω₀近傍でテーラー級数展開した式

$$\beta(\omega)=\beta(\omega_0)+\left.\frac{d\beta}{d\omega}\right|_{\omega_0}(\omega-\omega_0)+\frac{1}{2}\left.\frac{d^2\beta}{d\omega^2}\right|_{\omega_0}(\omega-\omega_0)^2+\cdots \quad (6.6)$$

をE(z;t)の式に代入

$$\frac{1}{v_g}=\left.\frac{d\beta}{d\omega}\right|_{\omega_0}$$ (v_g:群速度)

$$\beta''=\left.\frac{d^2\beta}{d\omega^2}\right|_{\omega_0}$$ (分散に関係)

$$E(z;t)=\frac{1}{2\pi}e^{j[\omega_0 t-\beta(\omega_0)z]}\int_{-\infty}^{\infty}A_F(0;u)\exp[ju(t-\frac{z}{v_g})-j\frac{\beta''}{2}zu^2]du \quad (6.7)$$

光ファイバ中の信号伝搬(3)

β”=0(分散が零)としたとき、

$$E(z;t) = A(0;t-\frac{z}{v_g})e^{j[\omega_0 t-\beta(\omega_0)z]} \quad (6.8)$$

⇒ $t-\dfrac{z}{v_g}$ におけるz=0の波形と同じ

$$\boxed{\tau \equiv \frac{z}{v_g} = z\frac{d\beta}{d\omega} \quad \text{:群遅延}} \quad (6.9)$$

入力光をガウス型波形と仮定: $A(0;t) = A_0 \exp[-(\frac{t}{\tau_0})^2]$ (6.10)

フーリエ変換: $A_F(0;\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} A(0;t)e^{-j\omega t}dt = A_0\sqrt{\pi}\tau_0 \exp[-\frac{\tau_0{}^2\omega^2}{4}]$ (6.11)

ただし、$\exp\left[-\alpha t^2\right]$ のフーリエ変換が $\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\exp\left[-\frac{\omega^2}{4\alpha}\right]$ となる(ガウス関数のフーリエ変換はガウス関数)ことを利用した。

光ファイバ中の信号伝搬（4）

(6.10)の強度 $\left|A(0;t)\right|^2$ の半値全幅T_0は

$$\left(\exp[-(\frac{t}{\tau_0})^2]\right)^2 = \frac{1}{2} \quad \text{より} \quad T_0 = \tau_0\sqrt{2\ln 2} \quad \textbf{(6.12)}$$

(6.11)の強度 $\left|A_F(0;\omega)\right|^2$ の半値全幅$\Delta\omega$は

$$\left(\exp[-\frac{\tau_0{}^2\omega^2}{4}]\right)^2 = \frac{1}{2} \quad \text{より}$$

$$\varDelta\omega = \frac{2\sqrt{2\ln 2}}{\tau_0} \quad \textbf{(6.13)}$$

$$T_0\varDelta\omega = \frac{4\ln 2}{2\pi} \approx 0.441 \quad \textbf{(6.14)}$$

チャーピングを起こしていないパルスについて成立(<u>Transform-limited pulse</u>)

光ファイバ中の信号伝搬(5)

次にβ"≠0(分散が零でない)としたときを考える。

(6.11)を(6.7)に代入

$$E(z;t) = \underbrace{A_0 \frac{\tau_0}{\sqrt{\tau_0{}^2 + j2\beta'' z}} \exp[-\frac{(t-\frac{z}{v_g})^2}{\tau_0{}^2 + j2\beta'' z}]}_{A(z;t-\frac{z}{v_g})} e^{j[\omega_0 t - \beta(\omega_0) z]} \quad \textbf{(6.15)}$$

$A(z;t) = |A(z;t)| e^{j\Phi(z;t)}$ としたときの波形と位相について考える。

波形

$$|A(z;t)| = A_0 \frac{\tau_0}{\left[\tau_0{}^4 + (2\beta'' z)^2\right]^{\frac{1}{4}}} \exp\left[-\frac{t^2}{\tau_0{}^2 + \frac{(2\beta'' z)^2}{\tau_0{}^2}}\right] \quad \textbf{(6.16)}$$

位相

$$\Phi(z;t) = \frac{2\beta'' z}{\tau_0{}^4 + (2\beta'' z)^2} t^2 - \frac{1}{2} \tan^{-1}[\frac{2\beta'' z}{\tau_0{}^2}] \quad \textbf{(6.17)}$$

光ファイバ中の信号伝搬(6)

(6.16)の波形の振幅が1/2になる半値全幅T_{FWHM}は

$$T_{FWHM} = T_0 \sqrt{1 + (4(\ln 2)\frac{\beta'' z}{{T_0}^2})^2} \qquad (T_0 = \tau_0 \sqrt{2 \ln 2}) \qquad \textbf{(6.18)}$$

Transform-limited pulseでも伝送するに従い拡がる。

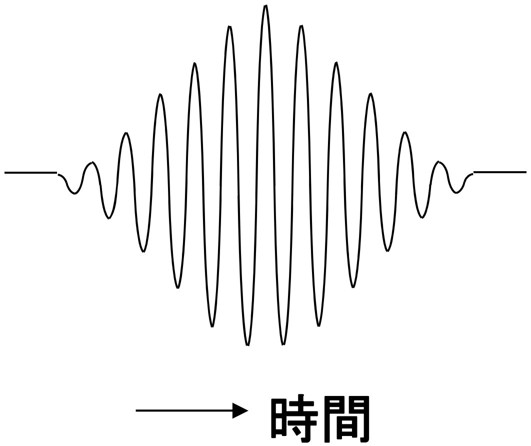
(6.17)を(6.15)に代入し位相項の時間微分をとると、瞬時角周波数ω(t)は

$$\omega(t) = \omega_0 + \frac{4\beta'' z}{{\tau_0}^4 + (2\beta'' z)^2} t \qquad \textbf{(6.19)}$$

パルス波形中の瞬時角周波数が変化:<u>チャーピング</u>

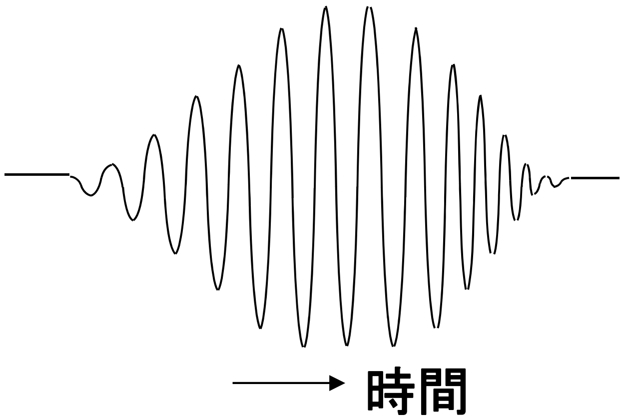
ファイバの分散による波形歪の影響

入射波形



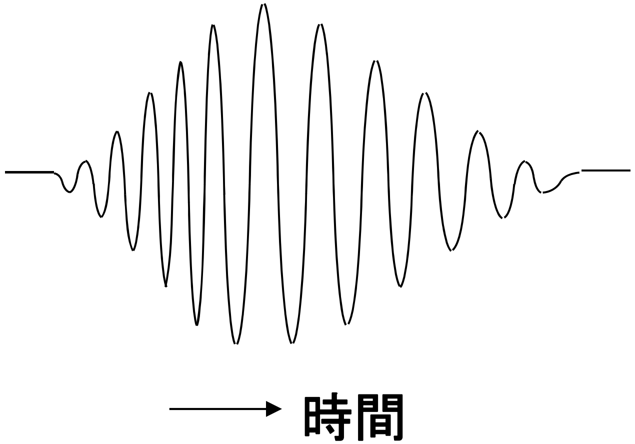
負分散による波形歪

$\beta'' > 0 (\sigma_T < 0)$



正分散による波形歪

$\beta'' < 0 (\sigma_T > 0)$



σ_T: 後に出てくる光ファイバの波長分散

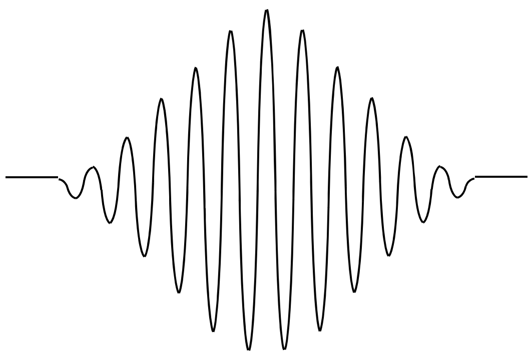
光ファイバ中の信号伝搬(7)

入射パルスが初めからチャープしている場合 : $A(0;t) = A_1 \exp[-(1+\boxed{jC_p})\dfrac{t^2}{\tau_0^2}]$

位相の時間変化　(6.20)

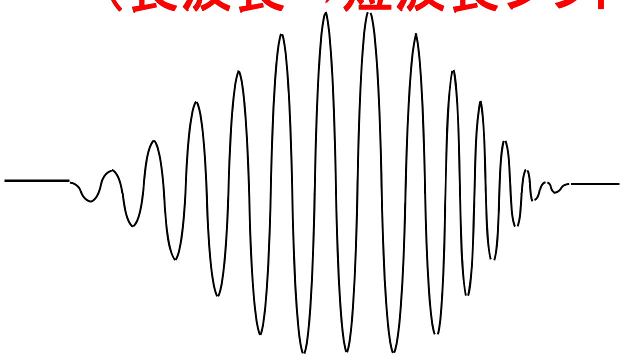
$$E(0;t) = A(0;t)e^{j\omega_0 t} = A_1 \underbrace{\exp[-\frac{t^2}{\tau_0^2}]}_{\text{ガウス関数の強度}} \underbrace{\exp[(j(\omega_0 t - C_p\frac{t^2}{\tau_0^2})]}_{\text{ガウス関数の位相変化}}$$

$C_p = 0$
チャープ無し



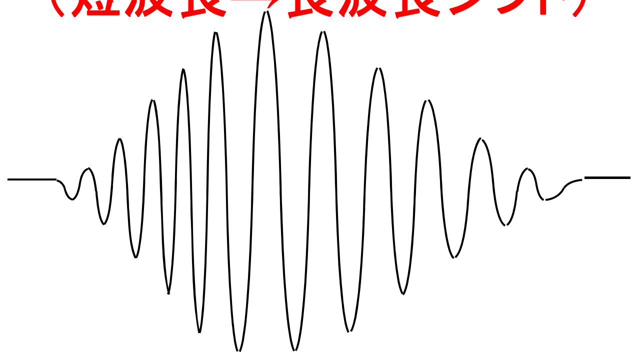
→ 時間

$C_p < 0$(位相進み)
ブルーチャープに相当
(長波長→短波長シフト)



→ 時間

$C_p > 0$(位相遅れ)
レッドチャープに相当
(短波長→長波長シフト)



→ 時間

光ファイバ中の信号伝搬(8)

距離 z 伝搬された後の半値全幅T_{FWHM}は

$$T_{FWHM} = T_0 \sqrt{\left(1 - 4(\ln 2)\frac{\beta'' C_p z}{T_0{}^2}\right)^2 + \left(4(\ln 2)\frac{\beta'' z}{T_0{}^2}\right)^2} \quad \textbf{(6.21)}$$

⇒ チャープの符号と大きさによりパルス幅の拡がり方が異なる。

$$\begin{cases} \beta'' C_p > 0 & : T_{FWHM}\text{は一旦減少し、極小値を経て拡大} \\ \beta'' C_p < 0 & : T_{FWHM}\text{は単調増加} \end{cases}$$

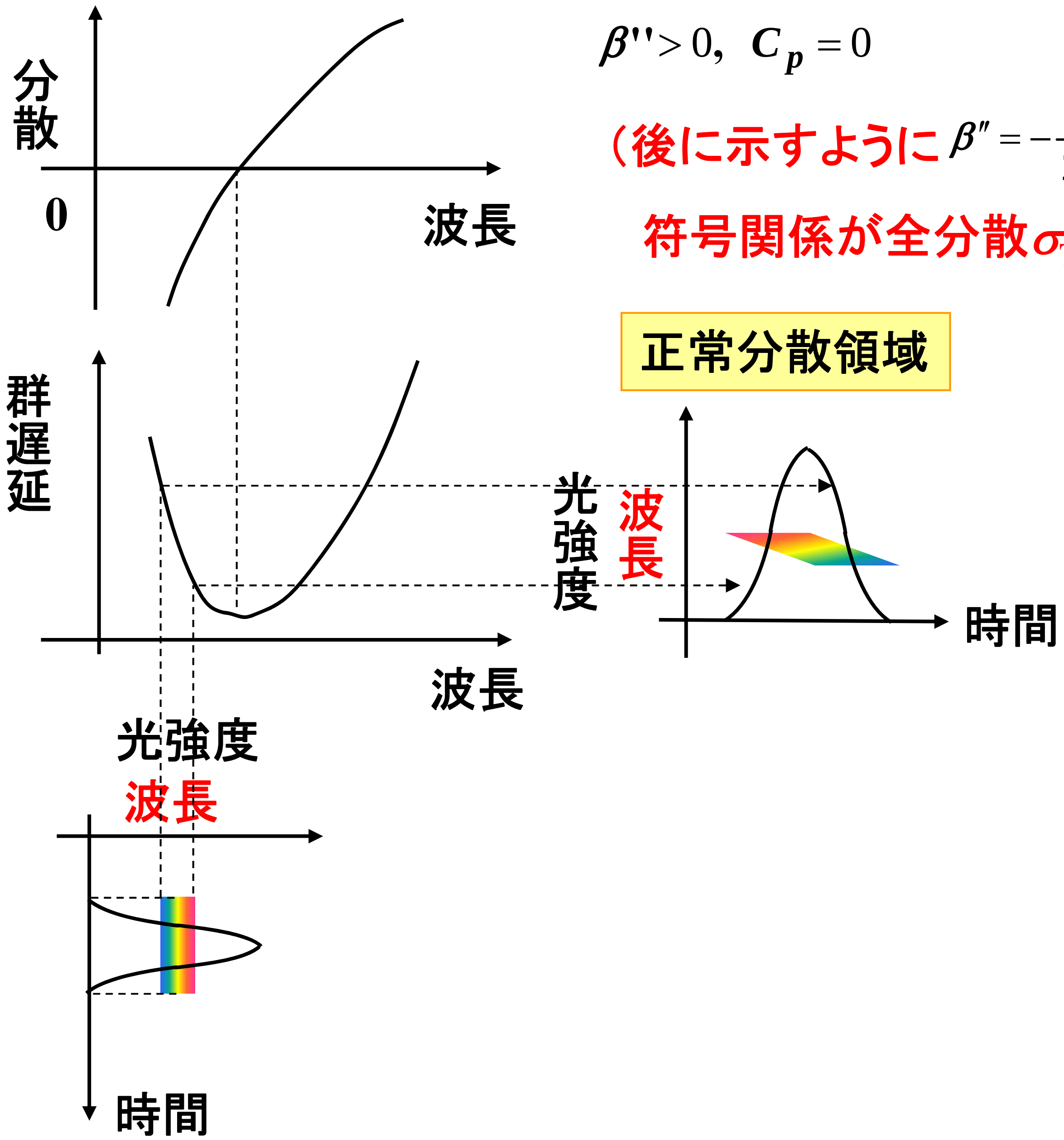
波形拡がりとチャーピングとの関係の解釈（Transform-limited pulseの場合（1））

$\beta'' > 0, \ C_p = 0$

（後に示すように $\beta'' = -\dfrac{\lambda^2}{2\pi c}\sigma_T$ のため

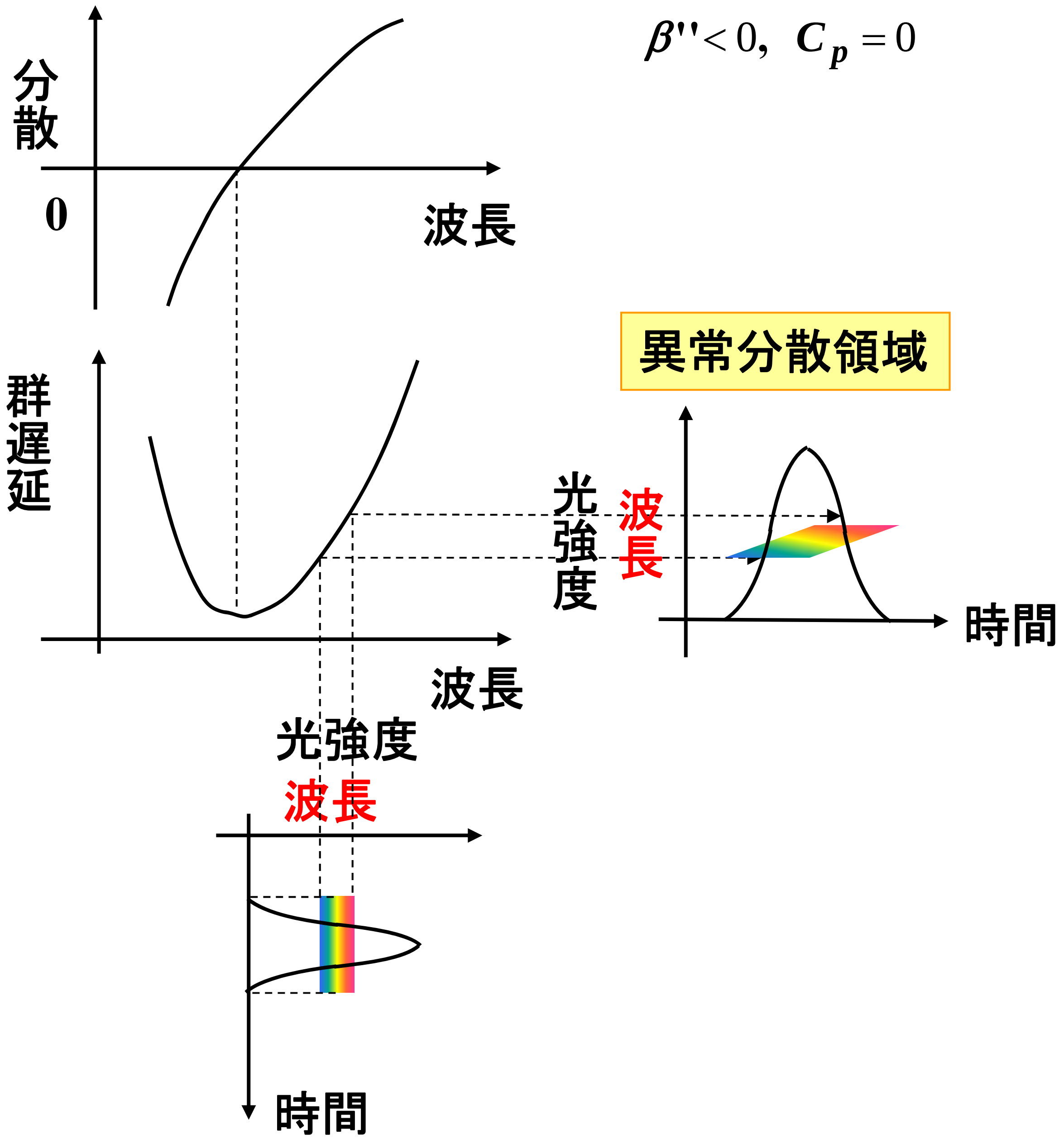
符号関係が全分散σ_Tと逆になる）

正常分散領域



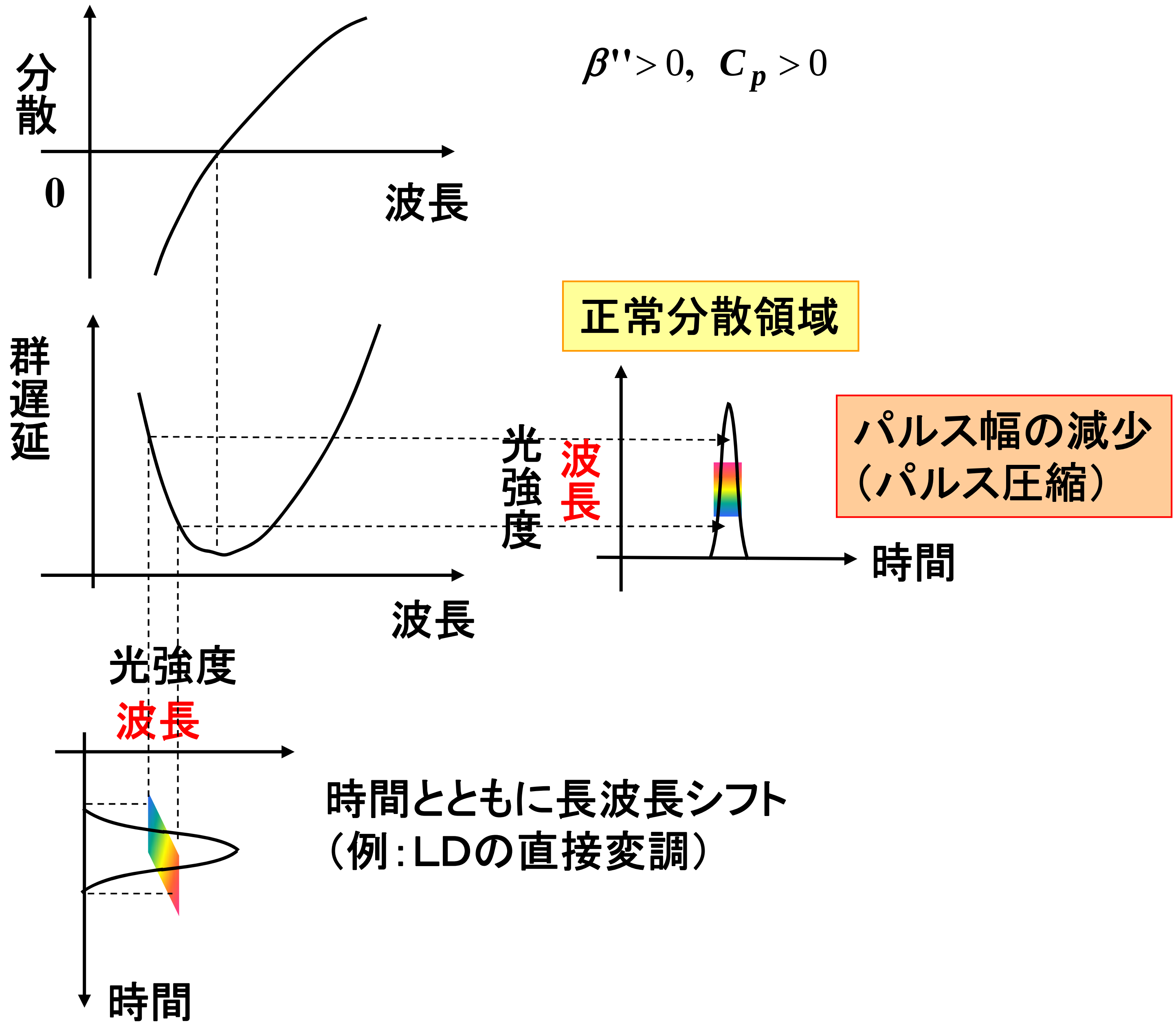
波形拡がりとチャーピングとの関係の解釈（Transform-limited pulseの場合（2））

$\beta'' < 0,\ C_p = 0$



波形拡がりとチャーピングの関係の解釈（チャープのあるパルスの場合（1））

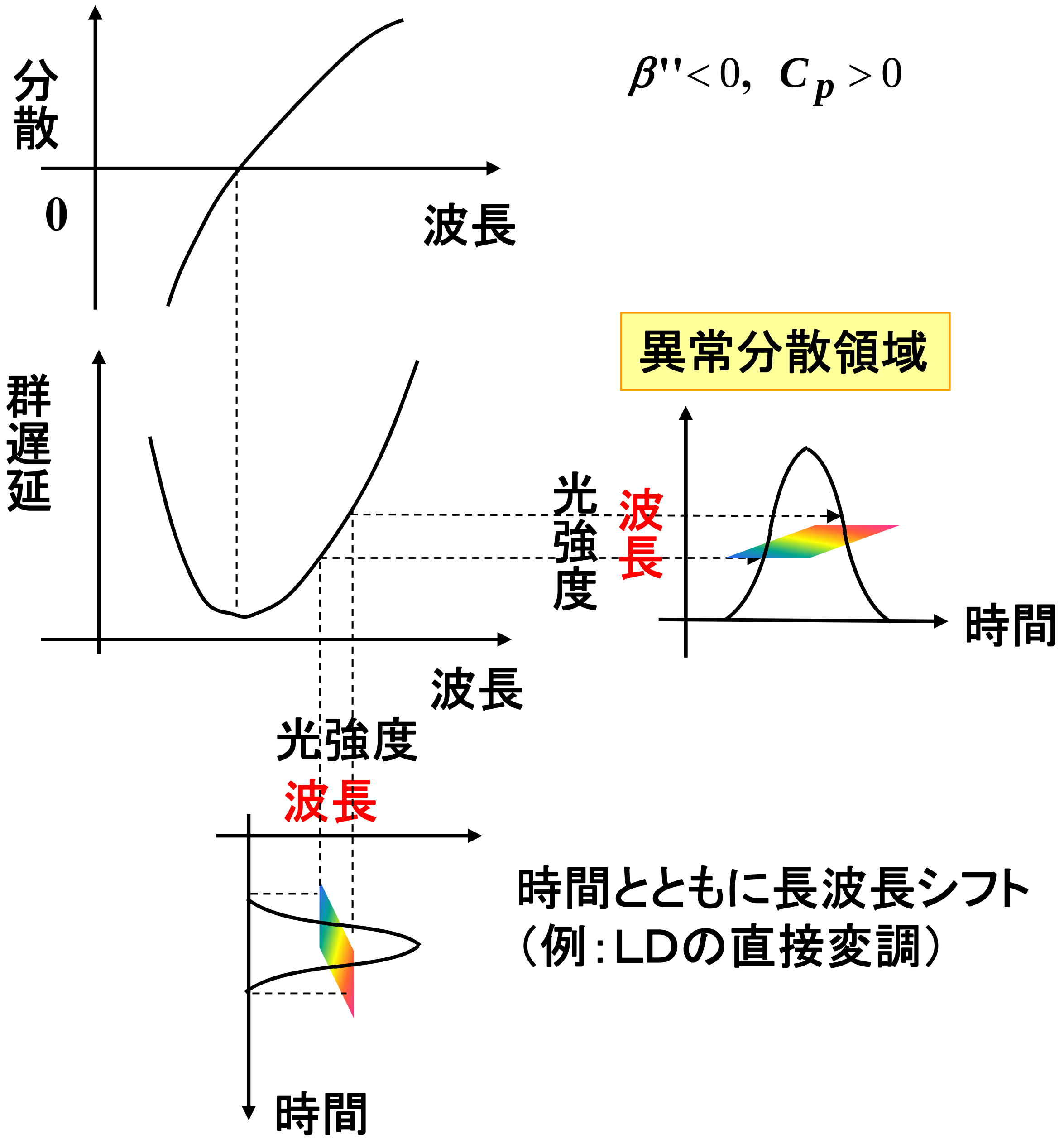
$\beta'' > 0,\ C_p > 0$



時間とともに長波長シフト
（例：LDの直接変調）

波形拡がりとチャーピングの関係の解釈（チャープのあるパルスの場合(2)）

$\beta'' < 0,\ C_p > 0$



時間とともに長波長シフト
（例：LDの直接変調）

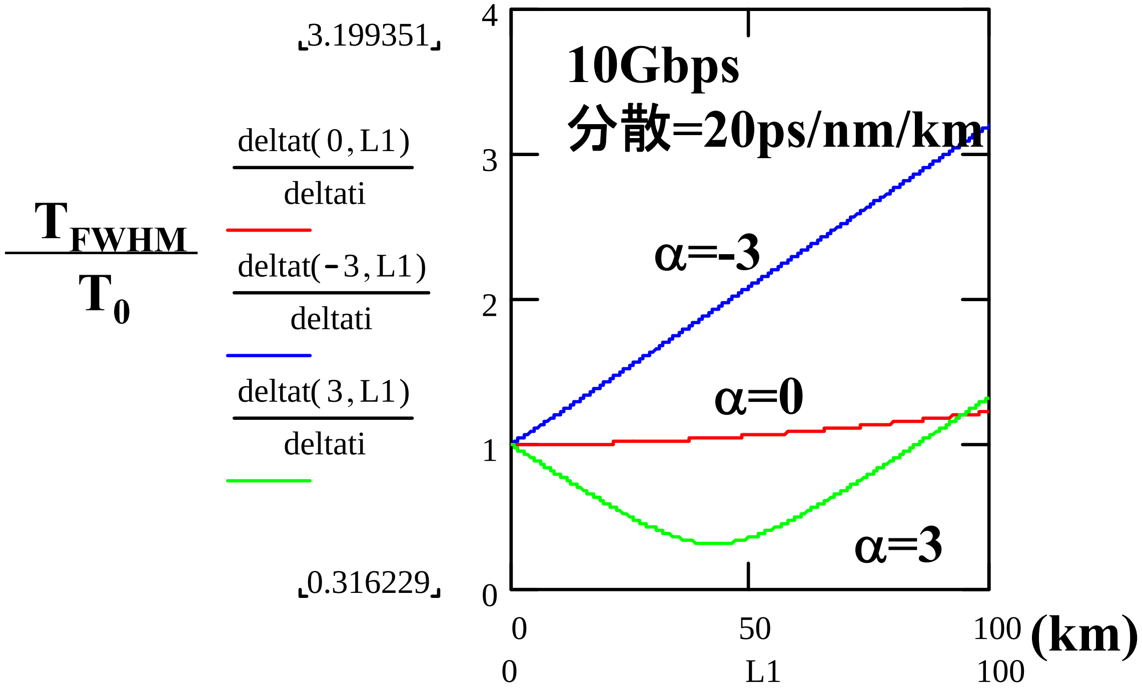
光ファイバ中の信号伝搬(8)

（参考）

K. no and K. Aida, J. Lightwave Technol., vol.6, No.11, pp.1678-1685 (1988).

$$\Delta t^2 = (\Delta t_i - \alpha \cdot \frac{2\ln 2}{\pi} \cdot \frac{1}{\Delta t_i} \frac{\lambda^2}{c} \cdot m \cdot L)^2 + (\frac{2\ln 2}{\pi} \cdot \frac{1}{\Delta t_i} \frac{\lambda^2}{c} \cdot m \cdot L)^2$$

(Δt_i:初期状態のパルス幅、α: αパラメータ、m:分散(ps/nm/km単位)、L:伝送距離



光ファイバ中の信号伝搬(9)

(6.18)において $4\ln 2\dfrac{\beta'' z}{T_0{}^2} >> 1$ **のとき、**

$$T_{FWHM} \approx \frac{4(\ln 2)\beta'' z}{T_0} = \beta'' z \Delta\omega = 2\pi\beta'' z \Delta\nu \quad \textbf{(6.22)}$$

$T_{FWHM} = \delta\tau$, z = L, $2\pi\Delta\nu = \Delta\omega$とおいて、

$$\delta\tau = L\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\left(\omega\frac{d^2\beta}{d\omega^2}\right)_{\omega=\omega_0} = -\frac{L}{c}\frac{\delta\lambda}{\lambda_0}\left(k\frac{d^2\beta}{dk^2}\right)_{\lambda=\lambda_0} \quad \textbf{(6.23)}$$

（波長分散の計算の時に使用する式）

光ファイバの波長分散

（光ファイバの分散）
＝（材料分散）＋（導波路分散）

材料の屈折率の波長依存性

導波路の構造（屈折率分布）に依存

分散は導波路の構造（屈折率分布）によって制御可能

『光通信工学(1)』
羽鳥　光俊、青山　友紀　監修
（コロナ社）より

光ファイバの分散の計算（1）

(6.9）の群遅延をテーラー級数展開して、

$$\tau(\omega) = L\frac{d\beta}{d\omega} = L[\frac{d\beta}{d\omega}\Big|_{\omega_0}(\omega-\omega_0) + \frac{d^2\beta}{d\omega^2}\Big|_{\omega_0}(\omega-\omega_0)^2 + \cdots \quad \text{(6.24)}$$

(6.24)を規格化伝搬定数b, Vパラメータで表現する。

$\beta = k[n_1{}^2 b + n_2{}^2(1-b)]^{1/2}$ と表して、

$$\tau = \frac{L}{v_g} = L\frac{d\beta}{d\omega} = \frac{L}{c}\frac{d\beta}{dk} = \frac{L}{c}\frac{[n_2 N_2 + (n_1 N_1 - n_2 N_2)(b + \frac{1}{2}V\frac{db}{dV})]}{[n_2{}^2 + (n_1{}^2 - n_2{}^2)b]^{1/2}} \quad \text{(6.25)}$$

ただし、$N_i = n_i + k\frac{dn_i}{dk}\Big|_{\omega=\omega_0} = n_i - \lambda\frac{dn_i}{d\lambda}\Big|_{\lambda=\lambda_0}$ (6.26)

（群屈折率または実効屈折率）
※注：分散方程式から求められる伝搬定数に基づく等価屈折率とは異なる。波長依存性を含んだ値。

光ファイバの分散の計算（2）

弱導波路近似（Δ<<1）が成り立つ場合、(6.25)は

$$\tau \approx \frac{L}{c}[N_2 + (N_1 - N_2)\frac{d(Vb)}{dV}] \qquad (6.27)$$

$\dfrac{d\beta}{dk}$ を再度kで微分して2階微分を計算し、(6.23)に代入する。

$$\delta\tau = L\delta\lambda[\underbrace{(-\frac{1}{c\lambda_0})\{k\frac{dN_2}{dk} + (k\frac{dN_1}{dk} - k\frac{dN_2}{dk})(b + \frac{1}{2}V\frac{db}{dV})\}}_{\sigma_m\text{：材料分散}}$$

$$+ \underbrace{(-\frac{1}{c\lambda_0})\frac{1}{2}\frac{(n_1N_1 - n_2N_2)^2}{n_2(n_1^2 - n_2^2)}V\frac{d^2(Vb)}{dV^2}}_{\sigma_w\text{：導波路分散}} \qquad (6.28)$$

光ファイバの材料分散

ステップ・インデックス型ファイバにおける光閉じ込め係数Γは

$$\Gamma = b + \frac{1}{2} V \frac{db}{dV} = \frac{1}{2}[b + \frac{d(Vb)}{dV}] \quad \textbf{(6.29)}$$

材料分散σ_mは以下で表される。

$$\sigma_m = -\frac{1}{c}[\Gamma\lambda \frac{d^2 n_1}{d\lambda^2} + (1-\Gamma)\lambda \frac{d^2 n_2}{d\lambda^2}]_{\lambda=\lambda_0} \quad \textbf{(6.30)}$$

セルマイヤーの式（Sellmeir's formula）

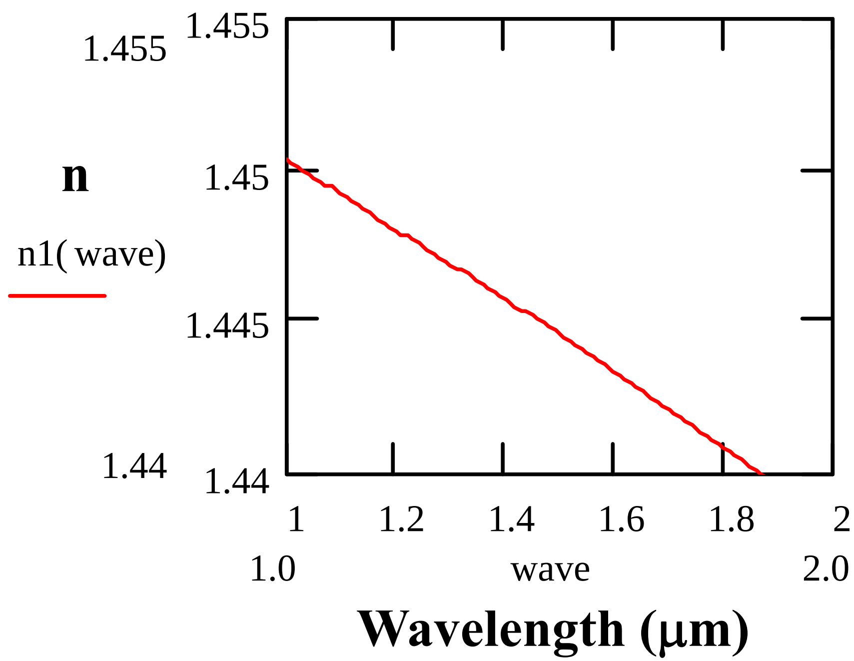
屈折率の波長依存性

$$n^2 = 1 + \sum_{i=1}^{3} \frac{A_i \lambda^2}{\lambda^2 - (l_i)^2}$$

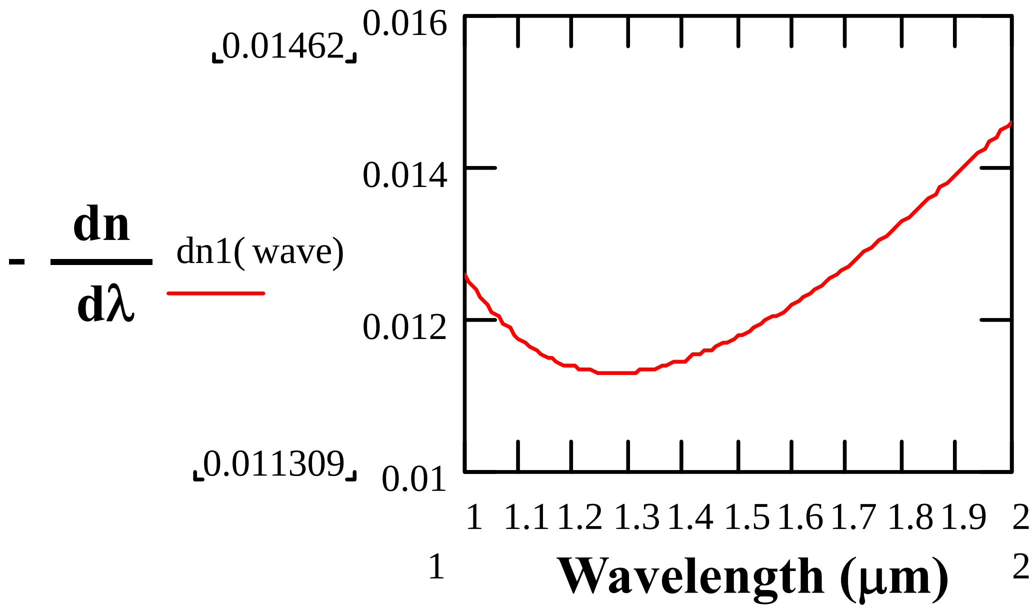
λ: [μm]単位

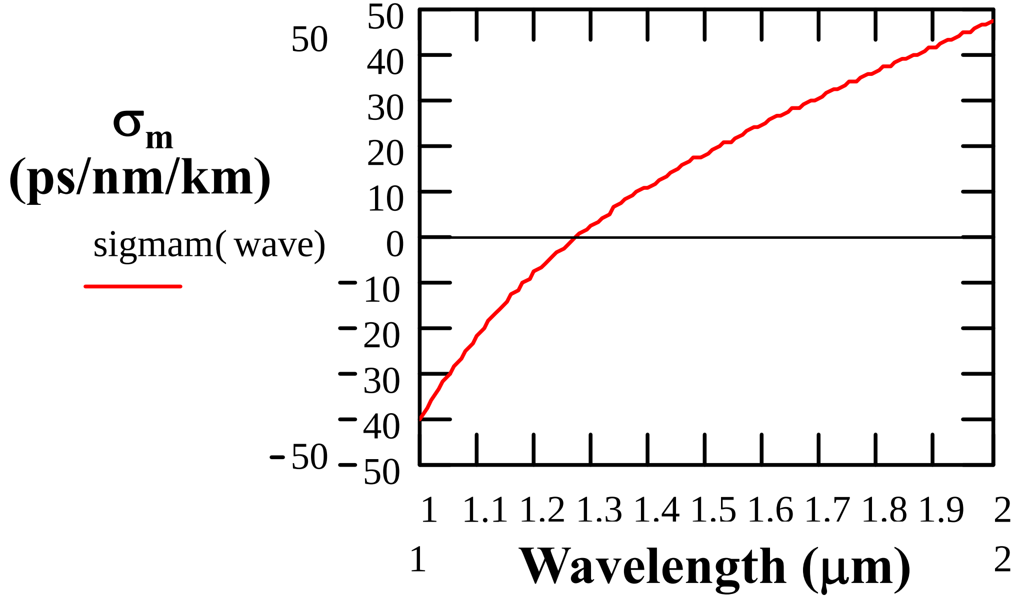
例） SiO2に対して以下の数値が知られている。

$A_1 = 0.6961663$
$A_2 = 0.4079426$
$A_3 = 0.8974794$
$l_1 = 0.0684043$
$l_2 = 0.1162414$
$l_3 = 9.896161$



材料分散の計算結果


0.01462
0.011309
0.016
0.014
0.012
0.01
$-\frac{dn}{d\lambda}$
dn1(wave)
1 1.1 1.2 1.3 1.4 1.5 1.6 1.7 1.8 1.9 2
1
2
Wavelength (μm)


50
−50
50
40
30
20
10
0
−10
−20
−30
−40
−50
σ_m
(ps/nm/km)
sigmam(wave)
1 1.1 1.2 1.3 1.4 1.5 1.6 1.7 1.8 1.9 2
1
2
Wavelength (μm)

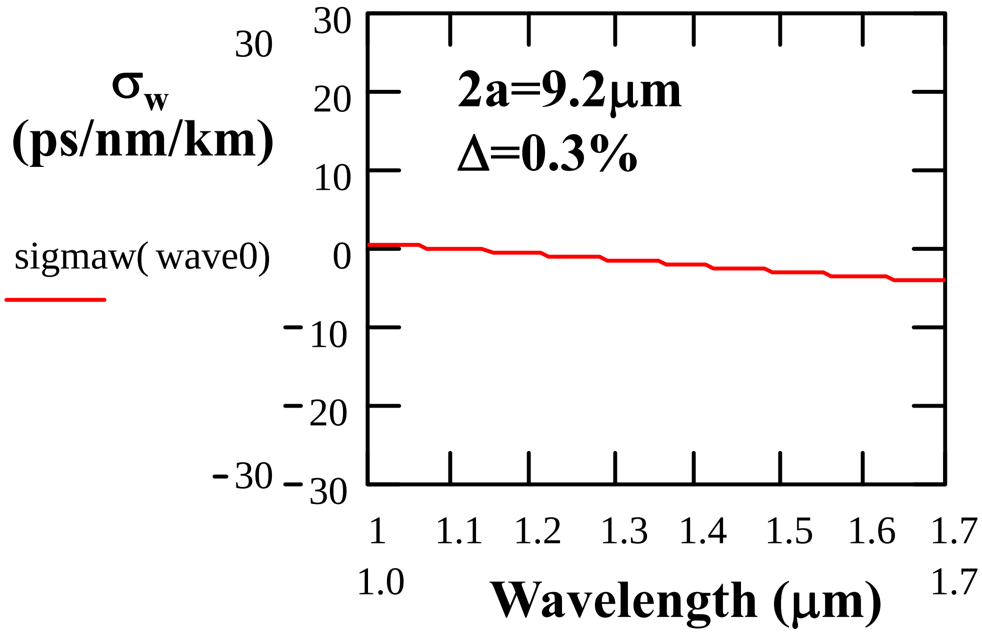
光ファイバの導波路分散

導波路分散σ_wは、

$$\sigma_w = -\frac{1}{c\lambda_0}\frac{1}{2}\frac{(n_1N_1 - n_2N_2)^2}{n_2(n_1^{\ 2} - n_2^{\ 2})}V\frac{d^2(Vb)}{dV^2} \quad \textbf{(6.31)}$$

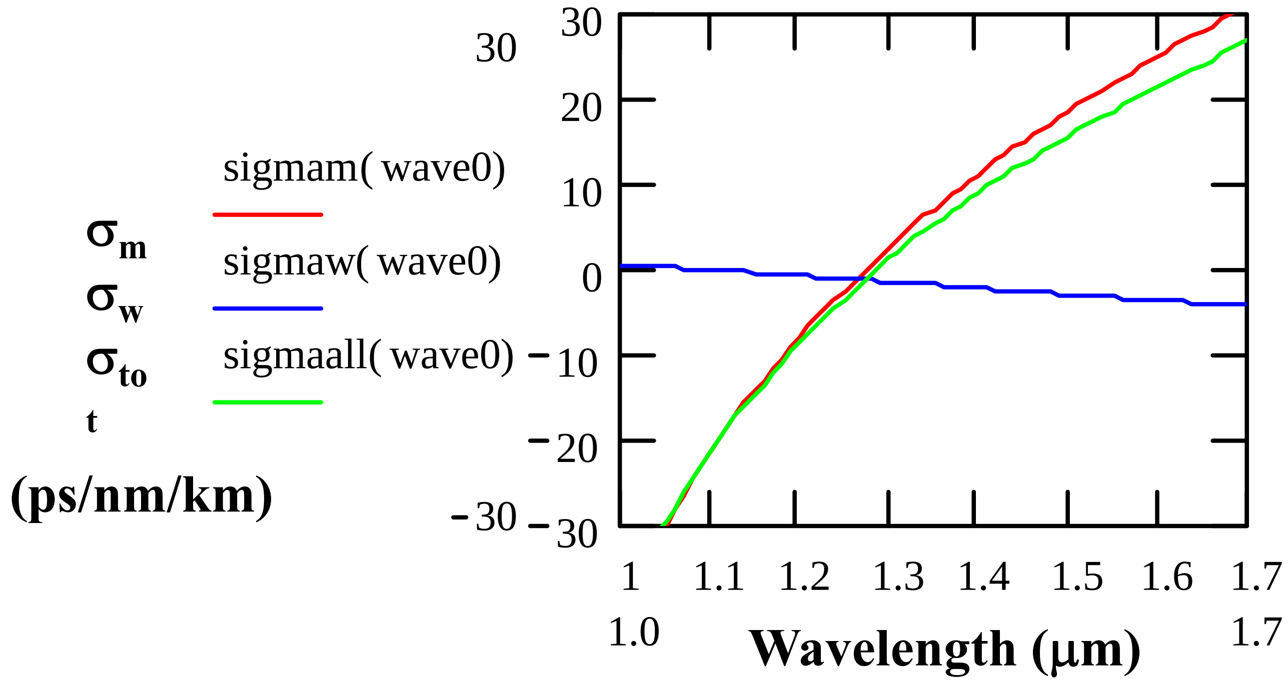
弱導波路近似（Δ<<1）が成り立つ場合は

$$\sigma_w \approx -\frac{1}{c\lambda}(N_1 - N_2)V\frac{d^2(Vb)}{dV^2} \quad \textbf{(6.32)}$$



光ファイバの全分散

$$\sigma_{tot} = \sigma_m + \sigma_w$$



単一モード光ファイバの伝送帯域（分散制限）（1）

(6.11)（ガウス型パルスの伝送前のフーリエ変換）と(6.15) のフーリエ変換（ガウス型パルスの伝送後のフーリエ変換）を比較して、変調信号の伝達関数を求める。

$$\left|H(\omega)\right|^2 = \frac{1}{\tau_0}\sqrt{{\tau_0}^2 + \frac{(2\beta'' z)^2}{{\tau_0}^2}}\exp\left[-2\underbrace{\left(\frac{2\beta'' z}{\tau_0}\right)^2}_{}\omega^2\right] \quad \textbf{(6.33)}$$

(6.22)を代入

$$\left|H(\omega)\right|^2 = \frac{1}{\tau_0}\sqrt{{\tau_0}^2 + \frac{(2\beta'' z)^2}{{\tau_0}^2}}\exp\left[-\frac{\delta\tau^2}{\ln 2}\omega^2\right] \quad \textbf{(6.34)}$$

(6.34)の伝達関数の値がω=0の1/2（-3dB）になる周波数Δν（3dB帯域B）は、

$$B = \Delta\nu = \frac{\Delta\omega}{2\pi} = \frac{\ln 2}{2\pi\left|\delta\tau\right|} \quad \textbf{(6.35)}$$

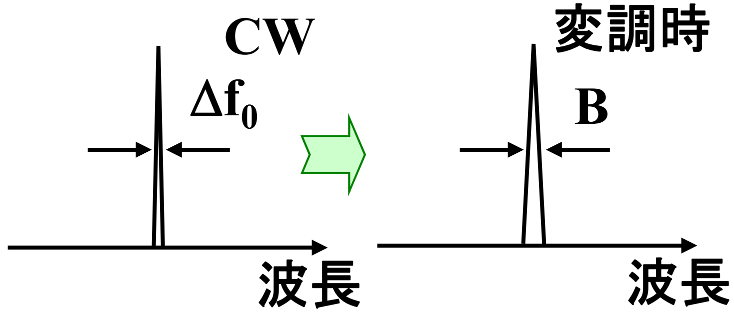
単一モード光ファイバの伝送帯域（分散制限）（2）

(6.35)をレーザの周波数幅Δf_0と変調周波数帯域Bの相対関係に対して場合分けして考える。

（1） 光源の周波数幅が変調周波数帯域より狭い場合（Δf_0<<B:DFB-LD）

(6.35)の$\delta\tau$は(6.22)のT_{FWHM}に等しいので、
(6.22)を(6.35)に代入して、

$$B\sqrt{L} = \frac{\sqrt{\ln 2}}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{|\beta''|}} \qquad (6.36)$$



(6.22)、(6.28)よりβ”を求めると、

$$\beta'' = \frac{1}{2\pi L}\frac{\delta\tau}{\Delta\nu} = \frac{1}{2\pi L}\delta\tau\left(-\frac{\lambda^2}{c\Delta\lambda}\right) = \frac{1}{2\pi L}L\Delta\lambda\sigma_T\left(-\frac{\lambda^2}{c\Delta\lambda}\right) = -\frac{\lambda^2}{2\pi c}\sigma_T \qquad (6.37)$$

(6.37)を(6.36)に代入して、

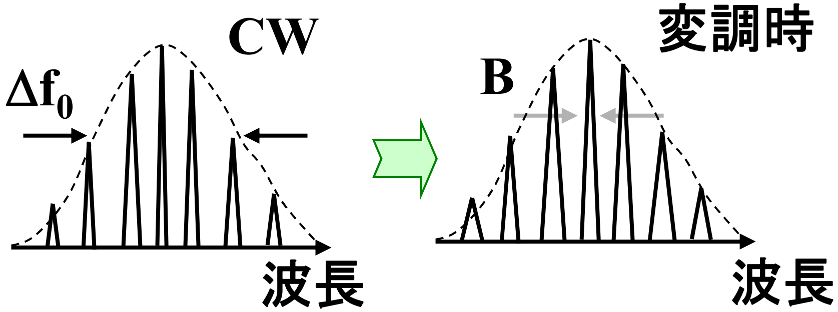
$$\boldsymbol{B\sqrt{L}} = \sqrt{\frac{\ln 2}{2\pi}}\frac{\sqrt{c}}{\lambda\sqrt{|\sigma_T|}} = \frac{181.9}{\lambda\sqrt{|\sigma_T|}}\ [\mathrm{GHz}\cdot\sqrt{\mathrm{km}}] \qquad (6.38)$$

λ[μm],
σ_T [ps/nm/km]単位

➡ 距離の平方根に帯域が制限される

単一モード光ファイバの伝送帯域(分散制限)(3)

（2） 光源の周波数幅が変調周波数帯域より広い場合(Δf_0>B：FP-LD)

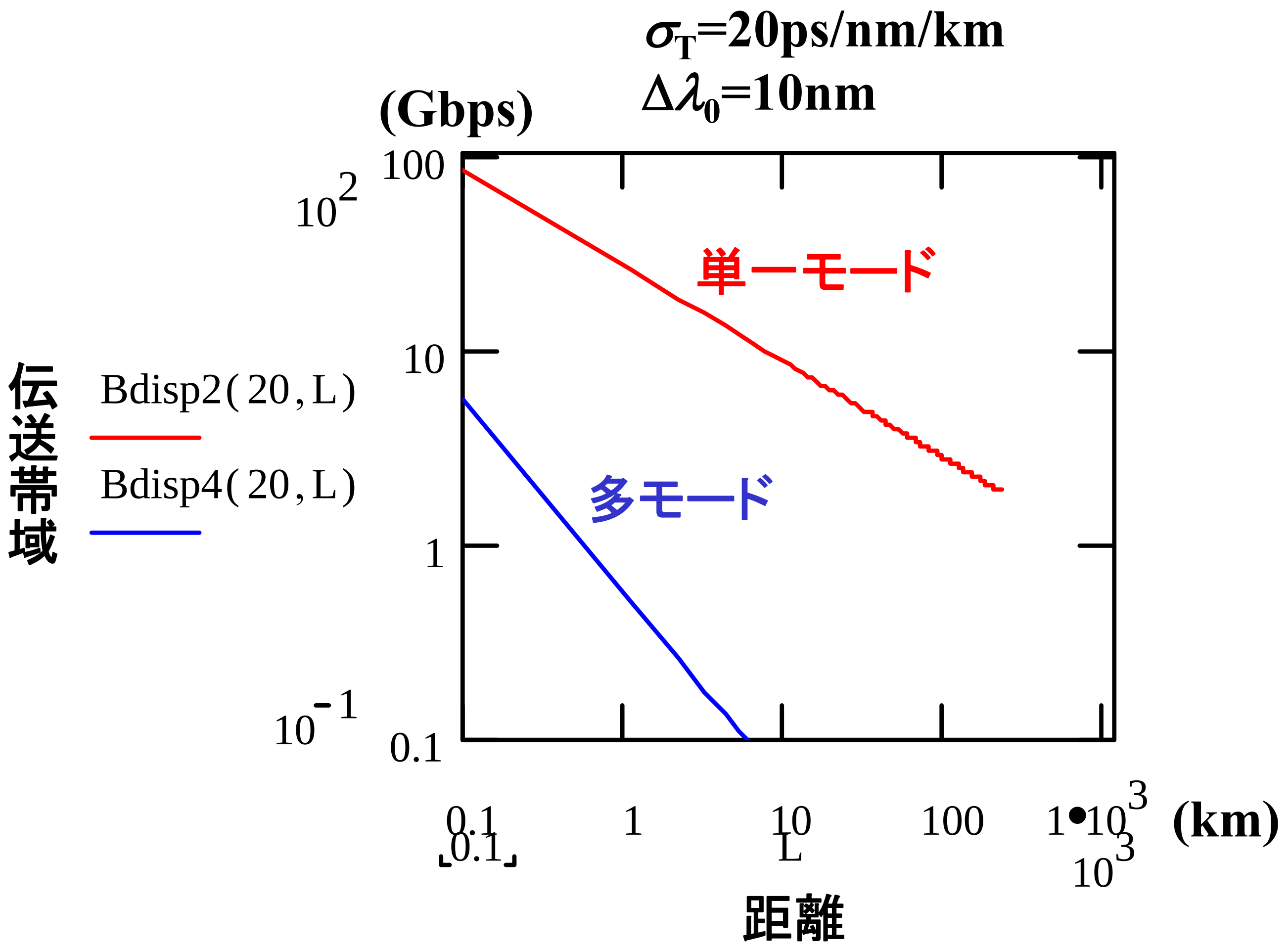


(6.28)の$\delta\lambda$は光源のスペクトル幅$\Delta\lambda_0$となるので、

$$BL = \frac{\ln 2}{2\pi\Delta\lambda_0|\sigma_T|} = \frac{110.3}{\Delta\lambda_0|\sigma_T|} \quad \text{[GHz・km]} \qquad (6.39)$$

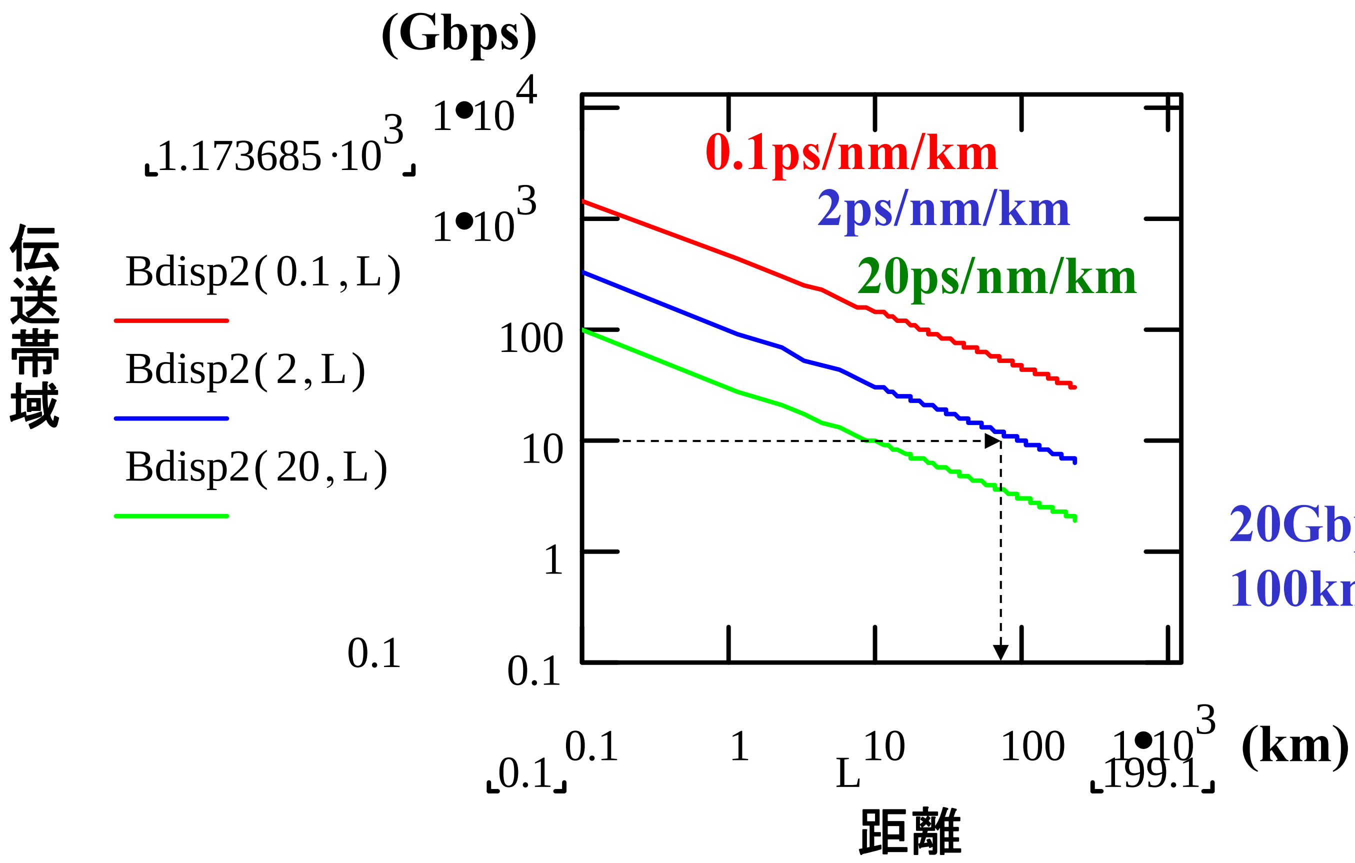
$\Delta\lambda_0$ [nm],
σ_T [ps/nm/km]単位

単一モードと多モード(LD縦モード)の伝送特性比較



伝送帯域の分散制限（ $\Delta f_0 << B$ の条件 ）

ファイバの分散依存性の解析結果

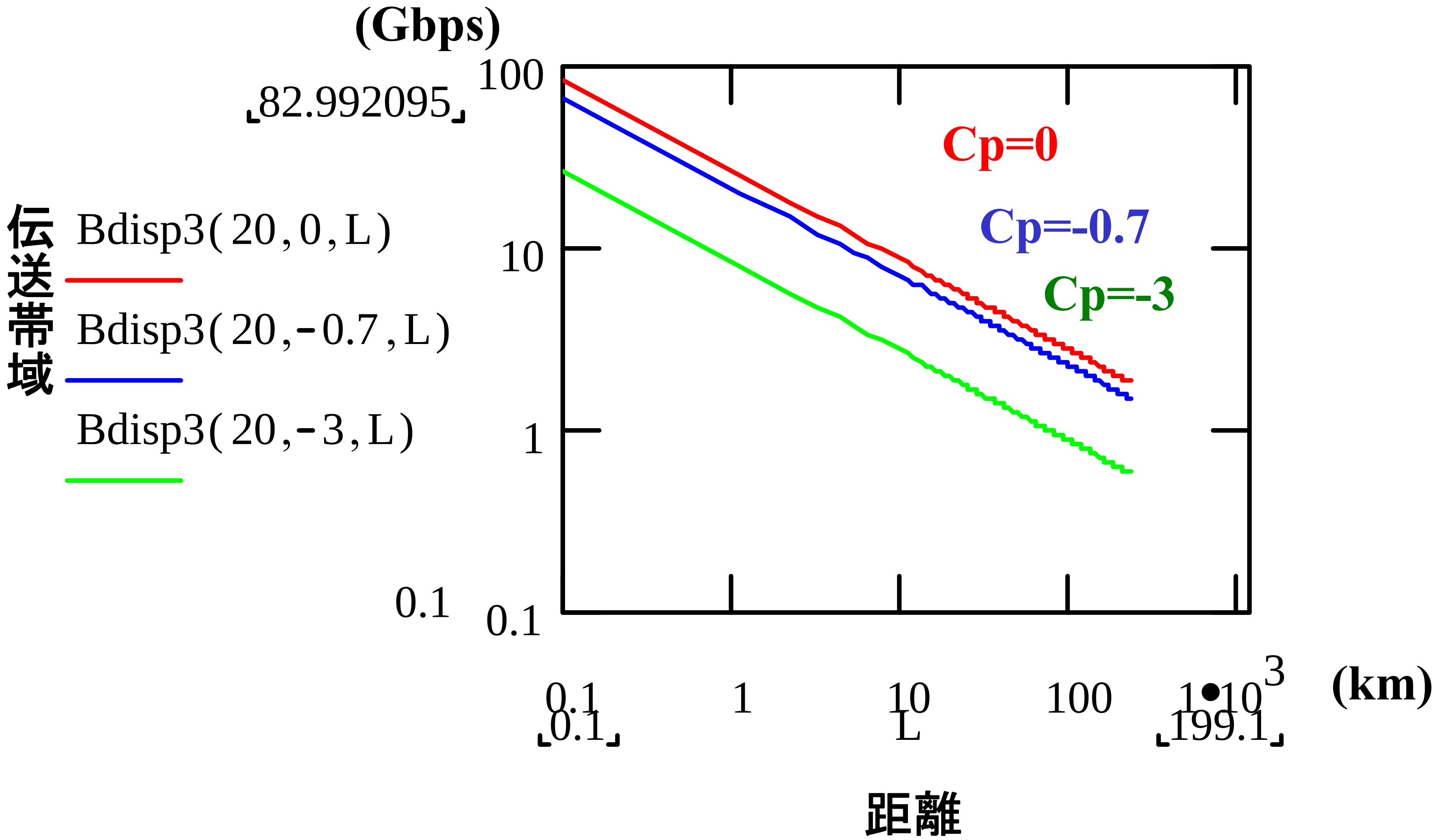


20Gbps NRZ
100km伝送可能

チャープによる帯域制限

信号のチャープ量依存性の解析結果

式(6.21)よりパルス幅はほぼチャープなしの場合の $\sqrt{1+C_p{}^2}$ 倍
（帯域は $\sqrt{1+C_p{}^2}$ 分の1）



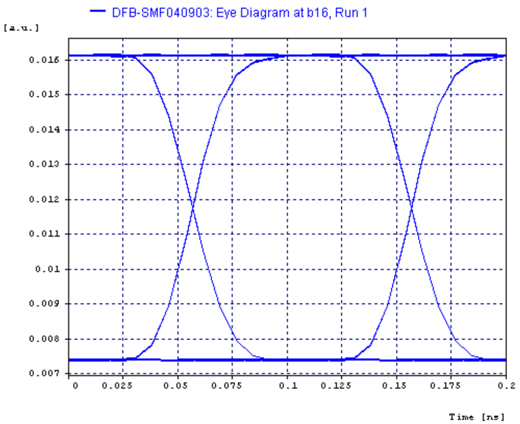
チャープによるパルス拡がりの解析例（直接変調）

DFB — チャープ量：20GHz（レッドシフト） — PD

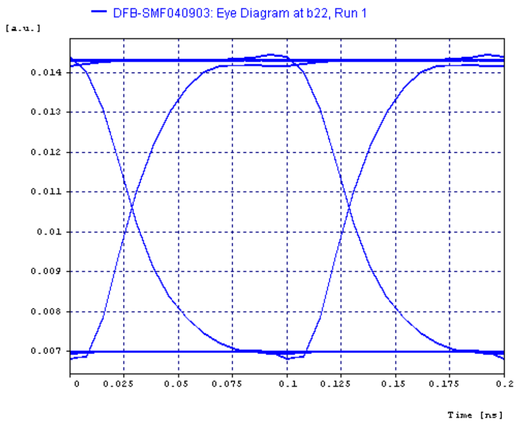
SMF（分散16ps/nm/km @ 1550nm）

10Gbps

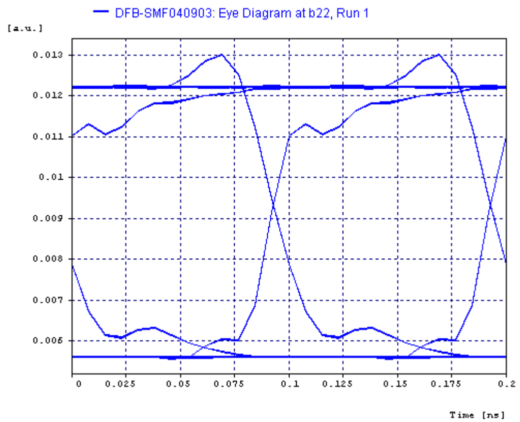
Back-to-Back



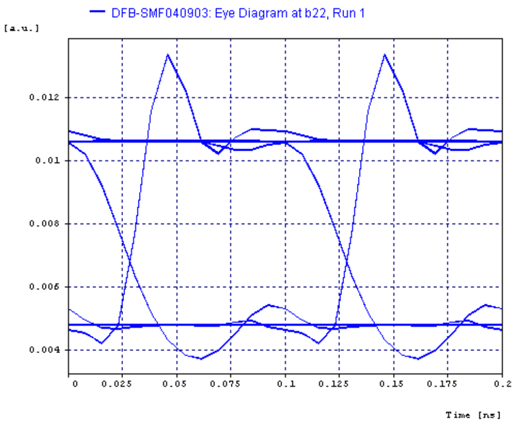
2km



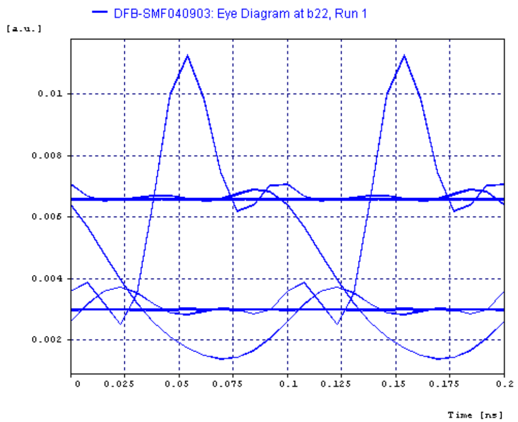
5km



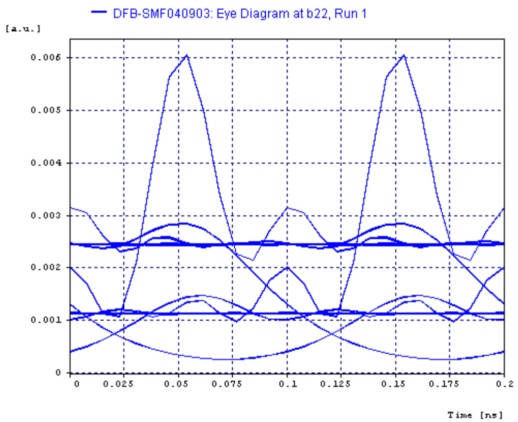
10km



20km

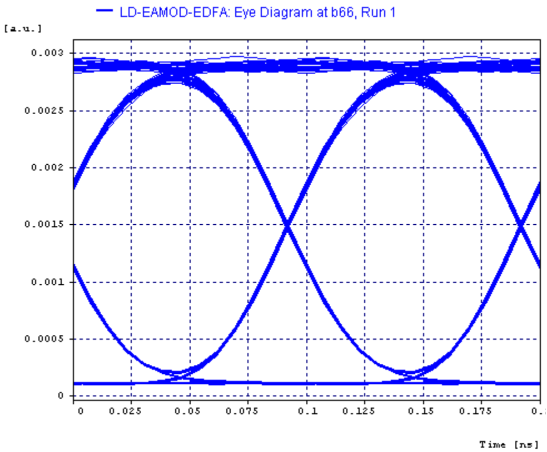


40km

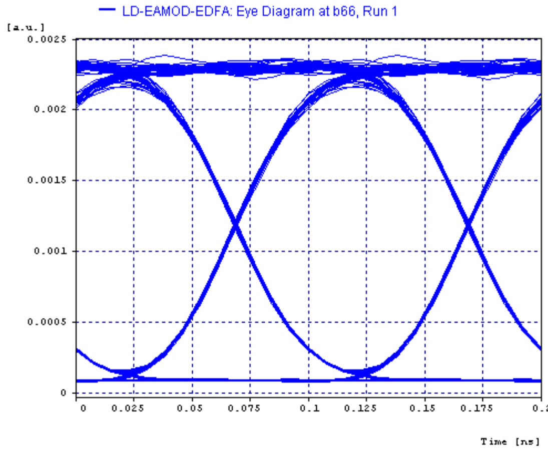


チャープによるパルス拡がりの解析例（外部変調）

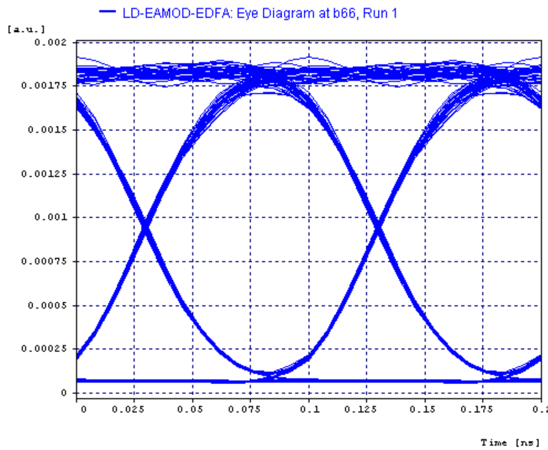
Back-to-Back



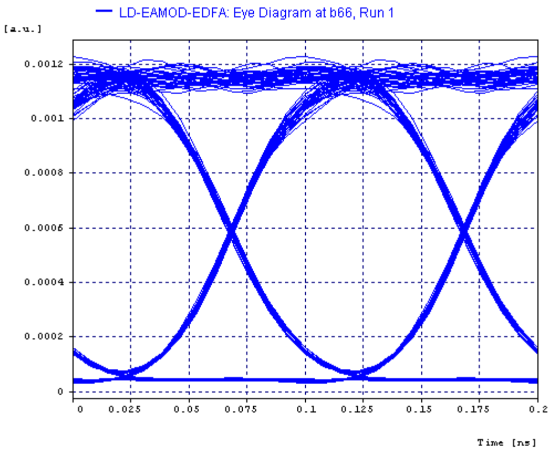
5km



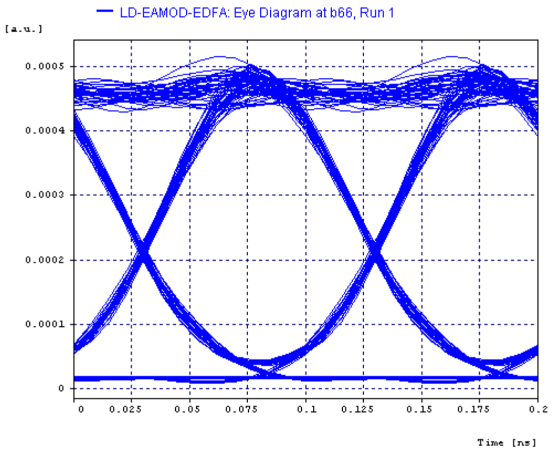
10km



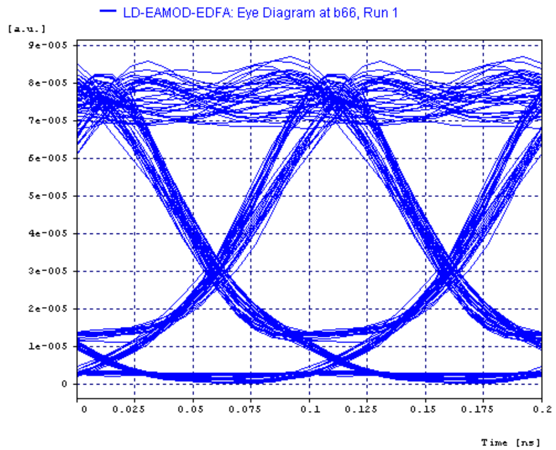
20km



40km



80km



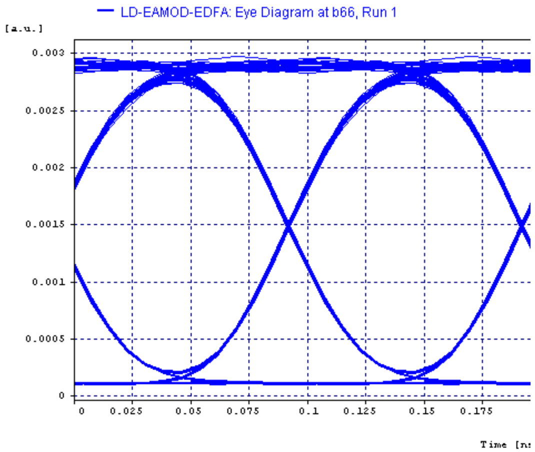
2011年度
光通信システム

分散シフトファイバによる波形広がり抑制効果

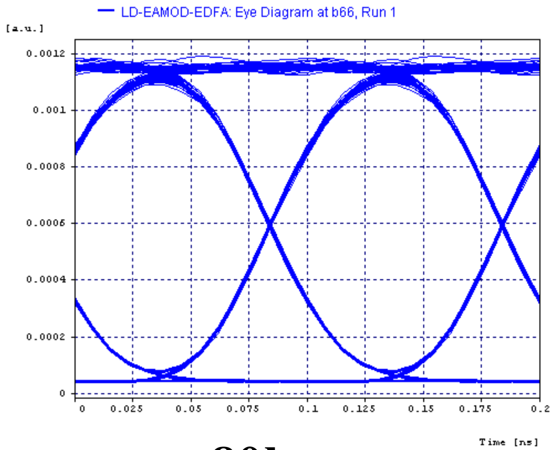
DFB/EA — DSF（分散-2ps/nm/km） — PD

チャープ量：4GHz（ブルーシフト）

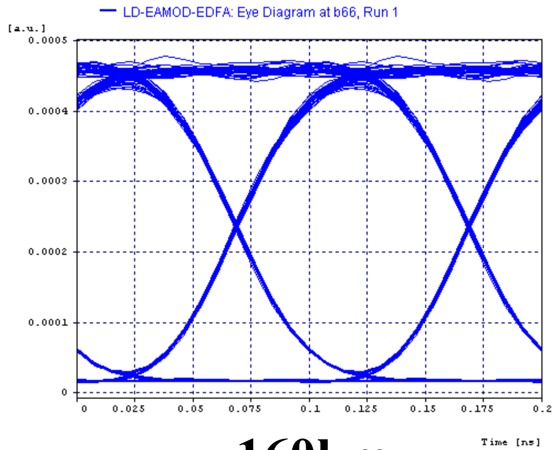
Back-to-Back



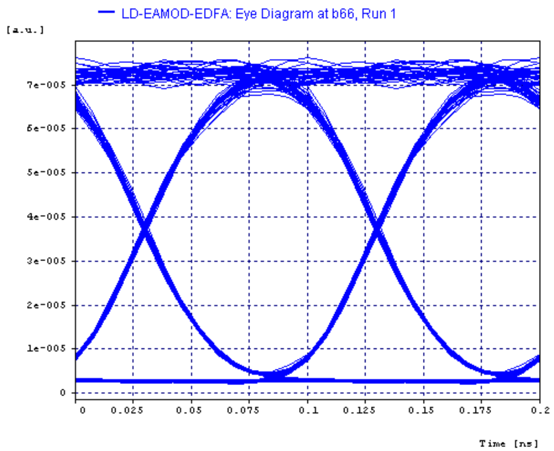
20km



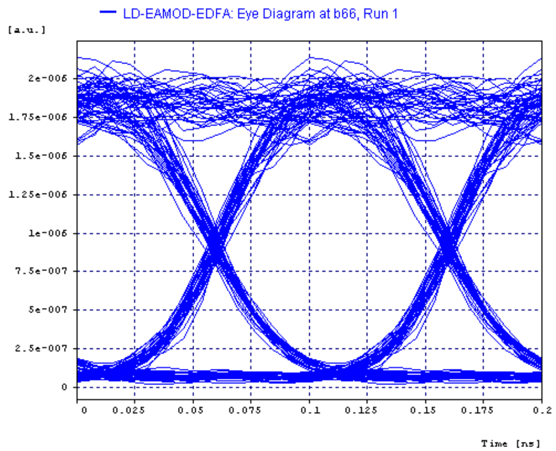
40km



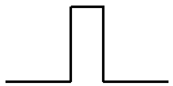
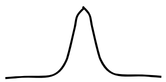
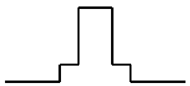
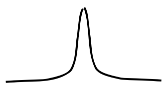
80km



160km



分散シフトファイバ仕様

タイプ	屈折率分布	電界分布	A_{eff} (μm^2) @ 1550nm	MFD (μm) @ 1550nm	波長分散 (ps/nm/km)	分散スロープ ($ps/nm^2/km$) @ 1550nm
標準SMF			80～85	10	+17	0.06
階段型 DSF			40～50	7.5～8.5	-5～+5	0.07～0.1

『光通信工学(1)』
羽鳥　光俊、青山　友紀　監修
（コロナ社）より