

第7章(続き)

ビット誤り率(3)

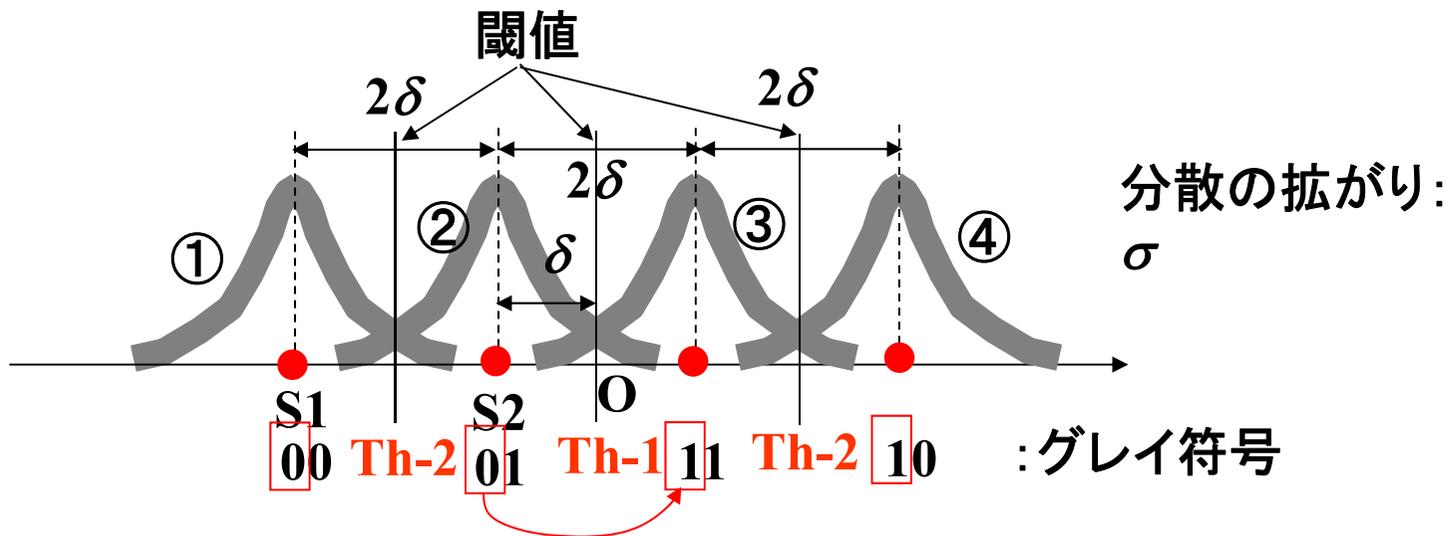
2012年1月30日(月)

多値変調のBER

多値変調のSNRペナルティ(原理)(1)

受信信号に熱雑音のみが付加されている場合を参考:

I・Q信号は独立と見なせ、1次元信号のみによってBERを導出。



※原点対象のためS1、S2の信号のみを考慮して導出

上位ビットの誤り確率:

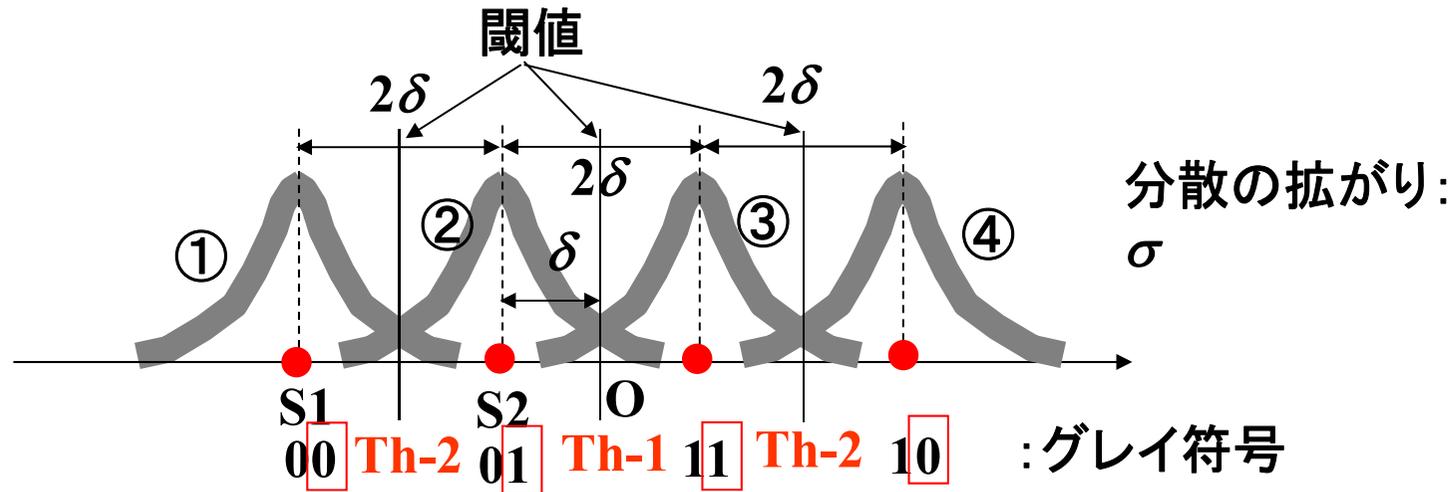
$$P_{e1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_0^\infty \exp\left\{-\frac{(x+\delta)}{2\sigma^2}\right\} dx + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_0^\infty \exp\left\{-\frac{(x+3\delta)}{2\sigma^2}\right\} dx$$

$\xrightarrow{\text{②がTh-1を超える誤り率}}$
 $\xrightarrow{\text{①がTh-1を超える誤り率}}$

Th-1を超えるときに誤りになる

$$\approx \frac{1}{4} \operatorname{erfc} \sqrt{\frac{\gamma_{CNR}}{10}}$$

多値変調のSNRペナルティ(原理)(2)



下位ビットの
誤り確率:

$$P_{e2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-2\delta}^{\infty} \exp\left\{-\frac{(x+3\delta)}{2\sigma^2}\right\} dx \rightarrow \text{①がTh-2 (-2}\delta\text{) 超える誤り率}$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \left[\int_{-\infty}^{-2\delta} \exp\left\{-\frac{(x+\delta)}{2\sigma^2}\right\} dx + \int_{2\delta}^{\infty} \exp\left\{-\frac{(x+\delta)}{2\sigma^2}\right\} dx \right]$$

$$\approx \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \sqrt{\frac{\gamma_{CNR}}{10}} \rightarrow \begin{array}{l} \text{②がTh-2 (-2}\delta\text{)を} \\ \text{下回る誤り率} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{②がTh-2 (2}\delta\text{)} \\ \text{を超える誤り率} \end{array}$$

全
誤り確率:

$$\therefore P_{e,16QAM} = \frac{1}{2} (P_{e1} + P_{e2}) \approx \frac{3}{8} \operatorname{erfc} \sqrt{\frac{\gamma_{CNR}}{10}} \quad \left(\gamma_{CNR} = \frac{5\delta^2}{\sigma^2} \right) \quad \text{(16QAMの平均CNR)}$$

多値変調のSNRペナルティ(数値)

$$P_{e,BPSK} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \sqrt{\frac{\gamma_{SNR}}{2}} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \sqrt{\gamma_{CNR}}$$

$$P_{e,QPSK} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \sqrt{\frac{\gamma_{CNR}}{2}}$$

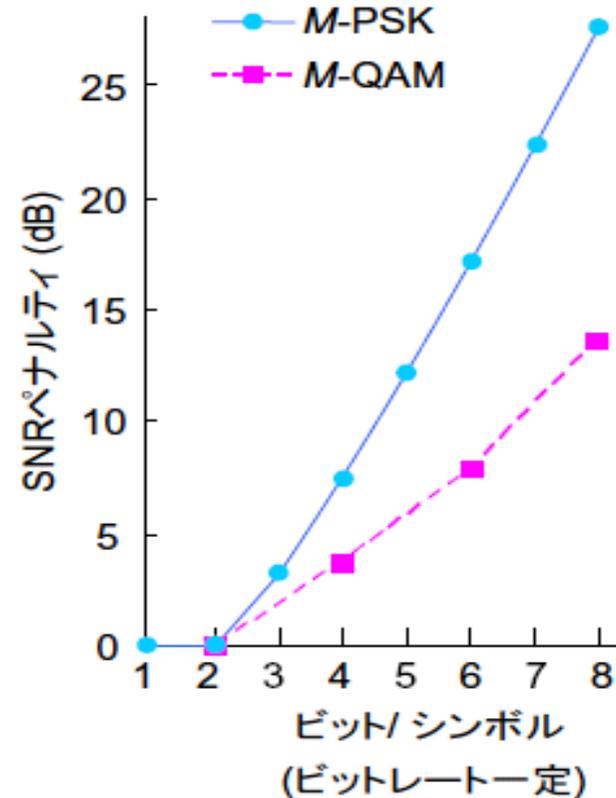
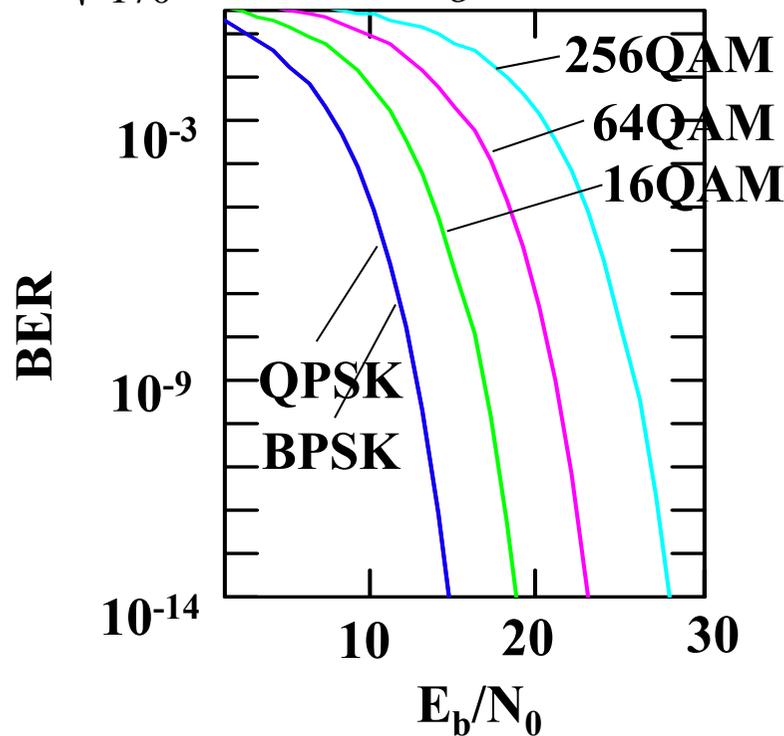
$$P_{e,64QAM} \approx \frac{7}{24} \operatorname{erfc} \sqrt{\frac{\gamma_{CNR}}{42}}$$

$$P_{e,256QAM} \approx \frac{15}{64} \operatorname{erfc} \sqrt{\frac{\gamma_{CNR}}{170}}$$

$$\left. \begin{aligned} (\gamma_{CNR} &= \frac{21\delta^2}{\sigma^2}) \\ (\gamma_{CNR} &= \frac{85\delta^2}{\sigma^2}) \end{aligned} \right\}$$

$$E_b/N_0 = \text{CNR} - 10\log k + 10\log(B_n T) \quad [\text{dB}]$$

k: 1シンボル当たり情報量(ビット)



第8章

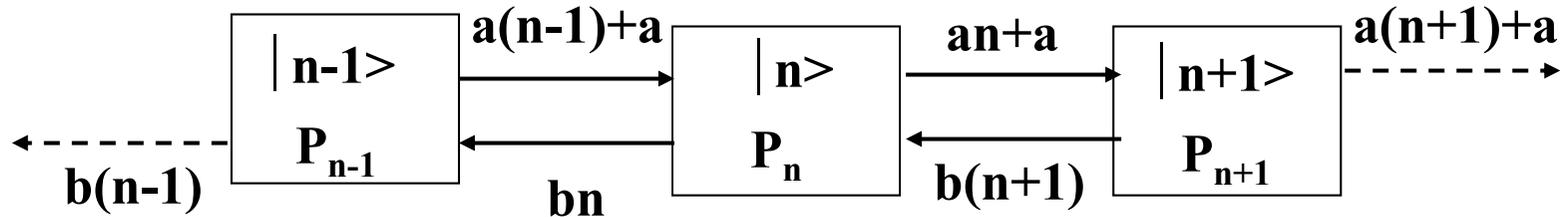
光増幅器技術(1)

1. 光増幅器の雑音
2. ASE雑音によるSN比と伝送限界
3. 光ファイバ増幅器の種類

光増幅器の雑音

光増幅器の雑音特性(1)

n個の光子数を持つ状態 $|n\rangle$ と $|n+1\rangle, |n-1\rangle$ 間の遷移図



$a=A\Gamma N_2$: 誘導放出の遷移確率 = 自然放出確率

$b=A\Gamma N_1$: 誘導吸収の遷移確率

ただし A : アインシュタインの A 係数

N_1 : 下準位の密度

N_2 : 上準位の密度

n個あった光子数がn+1個に増える確率は、 $a+an$

n+1個からn個になる確率は、 $b(n+1)$

従って、光子数がn個になる存在確率 $P_n(t)$ の時間変化は以下の方程式で表される。

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = -[a(n+1) + bn]P_n(t) + [a(n-1) + a]P_{n-1}(t) + [b(n+1)]P_{n+1}(t) \quad (8.1)$$

光増幅器の雑音特性(2)

光子数の平均値 $\langle n \rangle$, 2乗平均値 $\langle n^2 \rangle$ は $P_n(t)$ を用いて表現される光子数のk次モーメント $\langle n^k \rangle = \sum n_k P_n$ において $k=1, 2$ の場合であるから、式(8.1)より

$$\frac{d \langle n \rangle}{dt} = (a - b) \langle n \rangle + a \quad (8.2)$$

$$\frac{d \langle n^2 \rangle}{dt} = 2(a - b) \langle n^2 \rangle + (3a + b) \langle n \rangle + a \quad (8.3)$$

一つのモード当たりの入射信号光子数に対応する初期条件 $\langle n(0) \rangle = \langle n_0 \rangle$, $\langle n^2(0) \rangle = \langle n_0^2 \rangle$ で解くと、

$$\langle n \rangle = \langle n_0 \rangle \exp[(a-b)t] + n_{sp} \{ \exp[(a-b)t] - 1 \} \quad (8.4)$$

$$\begin{aligned} \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2 = & \langle n_0 \rangle \exp[(a-b)t] + n_{sp} \{ \exp[(a-b)t] - 1 \} \\ & + 2n_{sp} \{ \exp[(a-b)t] - 1 \} \langle n_0 \rangle \exp[(a-b)t] \\ & + n_{sp}^2 \{ \exp[(a-b)t] - 1 \}^2 \\ & + \exp[2(a-b)t] (\langle n_0 \rangle - \langle n_0 \rangle^2 - \langle n_0 \rangle) \end{aligned} \quad (8.5)$$

ただし、
$$n_{sp} = \frac{a}{a-b} = \frac{N_2}{N_2 - N_1} \quad : \text{反転分布パラメータ or 自然放出光係数}$$

$$\exp[(a-b)t] \quad : \text{単一通過の利得Gと等価}$$

式(8.4)、(8.5)をすべてのモードに対する和を取る。

入射光に対する和

$$\left. \begin{aligned} \langle n_0 \rangle^2 &\rightarrow \langle n_{in} \rangle^2 \\ \langle n_0^2 \rangle &\rightarrow \langle n_{in}^2 \rangle \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{入射光の全スペクトル領域の和を取る。} \\ &\text{ただし入射光は単一モードの条件。} \\ &\langle n_{in} \rangle : \text{全入射光子数の平均値} \end{aligned}$$

自然放出光に対する和

$$\left. \begin{aligned} &\cdot \text{利得媒質の等価的な周波数帯域幅(波長フィルタを使用する場合はその帯域幅)} \Delta f \\ &\cdot \text{導波される横モードの総数 } m_t \text{ (直交偏波を含む)} \end{aligned} \right\} n_{sp} \rightarrow n_{sp} m_t \Delta f$$

光増幅器の雑音特性(4)

- ・式(8.5)中の第3項 $n_{sp}\langle n_0 \rangle \rightarrow$ 自然放出光と信号光の各モードが一致している前提なので、 $n_{sp}\langle n_{in} \rangle$ とする。
- ・式(8.5)中の第4項 $n_{sp}^2 \rightarrow$ 一つのモードの自乗和なので、 $n_{sp}^2 m_t \Delta f$ とする。

以上から、光増幅器出力端での平均光子数 $\langle n_{out} \rangle$ と分散 $\sigma_{out}^2 (\langle n_{out}^2 \rangle - \langle n_{out} \rangle^2)$ は、

$$\langle n_{out} \rangle = G\langle n_{in} \rangle + (G-1)n_{sp}m_t\Delta f \quad (8.6)$$

$$\sigma_{out}^2 = G\langle n_{in} \rangle + (G-1)n_{sp}m_t\Delta f + 2G(G-1)n_{sp}\langle n_{in} \rangle + (G-1)^2n_{sp}^2m_t\Delta f + G^2\beta\langle n_{in} \rangle \quad (8.7)$$

式(8.6)中の項の意味

第1項: 増幅された信号光

第2項: 発生したASE (Amplified Spontaneous Emission)

式(8.7)中の項の意味

第1項: 信号光のショット雑音

第2項: ASEのショット雑音

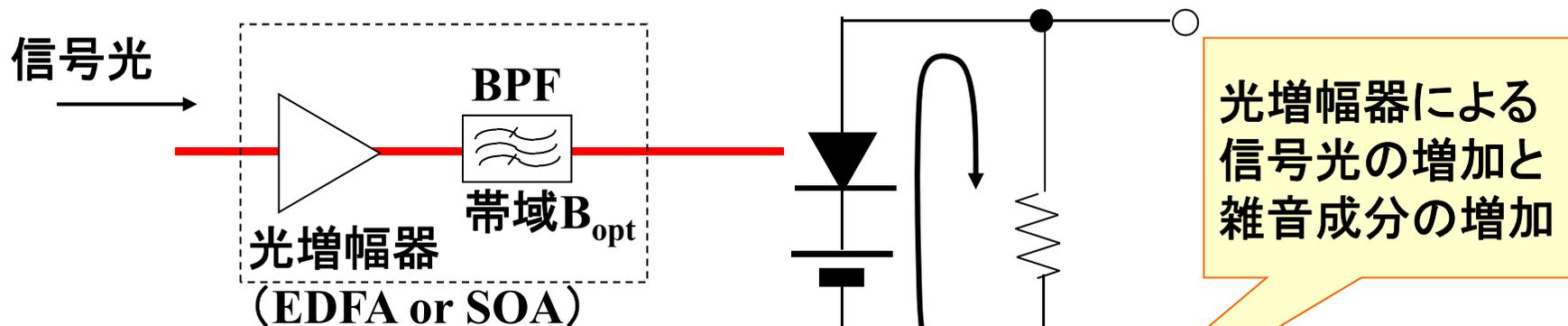
第3項: 信号光-ASE間のビート雑音

第4項: ASE-ASE間のビート雑音

第5項: 信号光の持つ過剰雑音(相対強度雑音など)

光増幅器による 伝送特性・限界

光前置増幅器による最小受信感度の改善



$$SNR = \left[\frac{e\eta_i \frac{GP_s}{\hbar\omega}}{\frac{\sqrt{\sigma_{s,shot}^2 + \sigma_{sp,shot}^2} + \sigma_{s-sp} + \frac{\sigma_{sp-sp} + \sigma_{th}^2}{2} + \sqrt{\sigma_{sp,shot}^2 + \sigma_{sp-sp}^2} + \sigma_{th}^2}} \right]^2$$

① 信号光のショット雑音

$$\sigma_{s,shot}^2 = 2e\left\{e\eta_i \frac{GP_s}{\hbar\omega}\right\} \left(\frac{B}{2}\right)$$

② ASEのショット雑音

$$\sigma_{sp,shot}^2 = 2e\left\{e\eta_i \frac{\hbar\omega(G-1)n_{sp}}{\hbar\omega} m_t B_{opt}\right\} \left(\frac{B}{2}\right)$$

③ 信号光-ASE間ビート雑音

$$\sigma_{s-sp}^2 = 4\left(e\eta_i \frac{GP_s}{\hbar\omega}\right) \left(e\eta_i \frac{\hbar\omega(G-1)n_{sp}}{\hbar\omega}\right) \left(\frac{B}{2}\right)$$

④ ASE間ビート雑音

$$\sigma_{sp-sp}^2 = 4\left(e\eta_i \frac{\hbar\omega(G-1)n_{sp}}{\hbar\omega}\right)^2 m_t B_{opt} \left(\frac{B}{2}\right)$$

雑音帯域NRZを想定 (RZではB/2 → B)

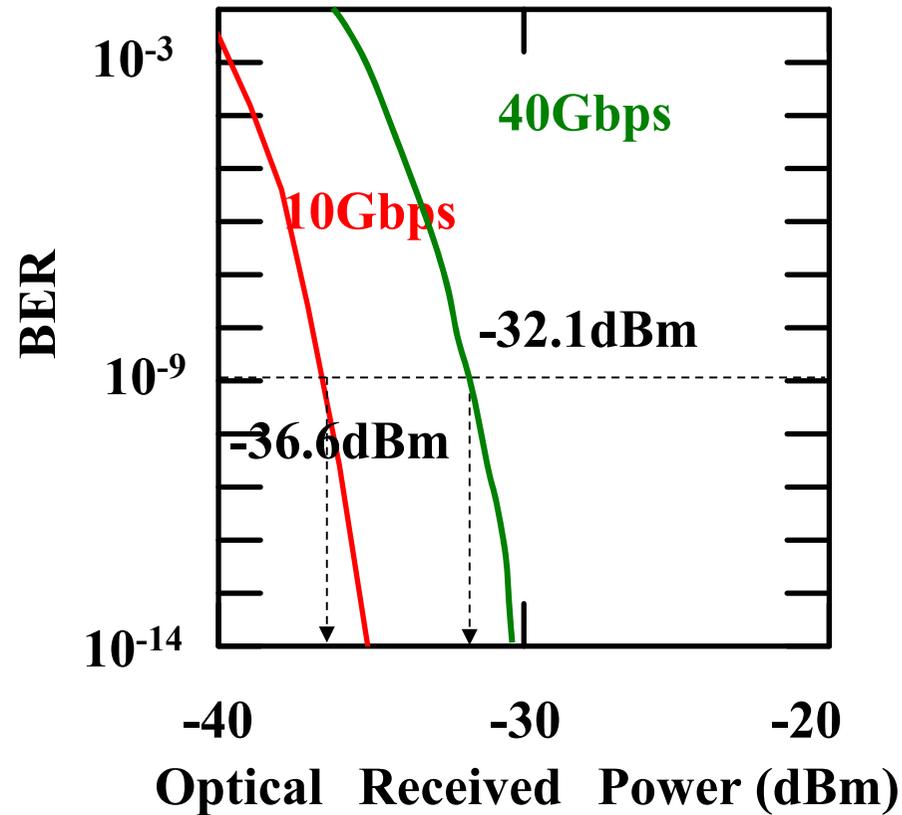
B_optの単位は[Hz]

⑤ 熱雑音

$$\sigma_{th}^2 = \frac{4kT}{RL} \left(\frac{B}{2}\right)$$

光前置増幅器による最小受信感度の改善(解析例)

NRZ, 300K, $\eta_i=0.8$, $R_L=50\Omega$



※横軸はNRZのマーク率1/2
として平均パワーで換算
(ピークパワーは3dB大きくなる)

光前置増幅器によるSNR改善効果(1)

光増幅器(OAMP)の有無によるSNRの比較 (増幅 G +伝送損失 L)

OAMPなし

熱雑音が支配的のとき

$$SNR = \frac{(e\eta_i \frac{P_s}{\hbar\omega} L)^2}{\left(\left(\sqrt{\frac{4kT}{R_L} \left(\frac{B}{2}\right)} + \sqrt{\frac{4kT}{R_L} \left(\frac{B}{2}\right)} \right) / 2 \right)^2} = (e\eta_i \frac{P_s}{\hbar\omega} L)^2 \cdot \left(\frac{R_L}{2kTB} \right)$$

光パワーの減衰とともに
SNR劣化

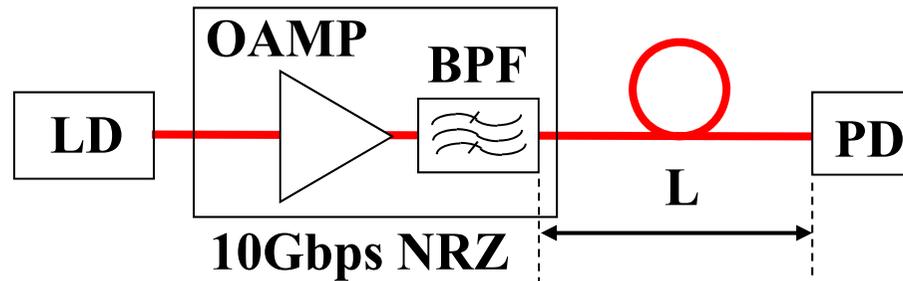
OAMPあり

光パワーが強く利得の大きい領域では信号-ASE間ビート雑音が支配的

$$SNR = \frac{(e\eta_i \frac{GLP_s}{\hbar\omega})^2}{\left(\sqrt{4(e\eta_i \frac{GLP_s}{\hbar\omega})(e\eta_i \frac{\hbar\omega(G-1)L_{sp}}{\hbar\omega}) \left(\frac{B}{2}\right)} / 2 \right)^2} \Rightarrow SNRが損失によらず一定$$

$$= \frac{2GP_s}{(G-1)\hbar\omega_{sp}B} \cong \frac{2P_s}{\hbar\omega_{sp}B}$$

光前置増幅器によるSNR改善効果(2)

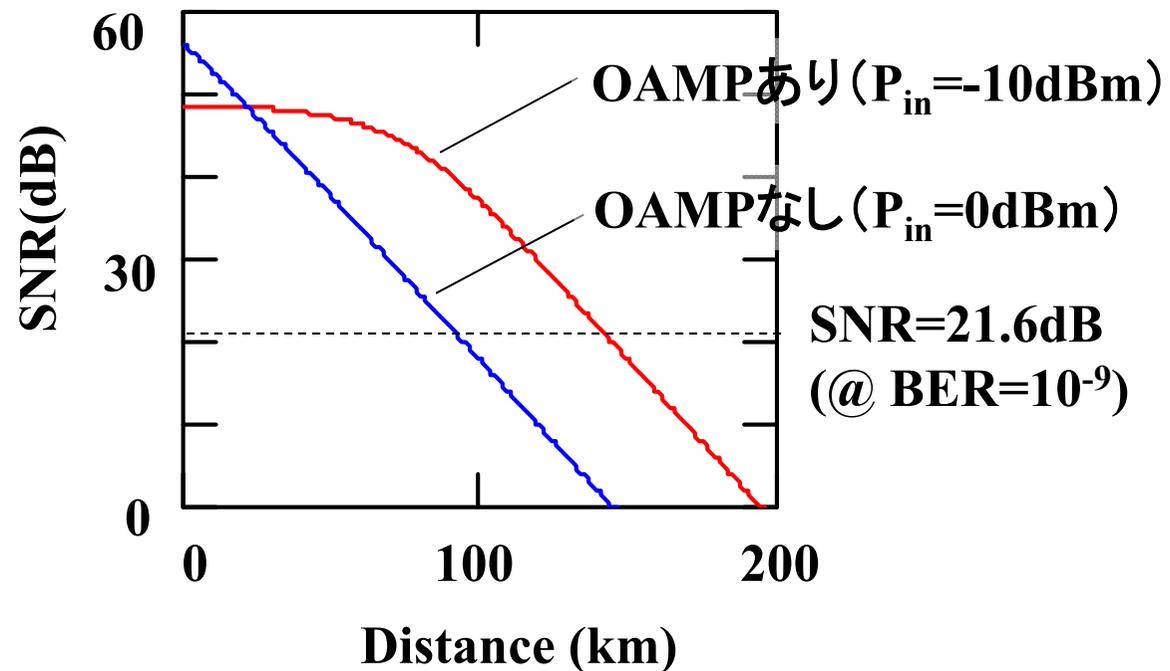


10Gbps NRZ

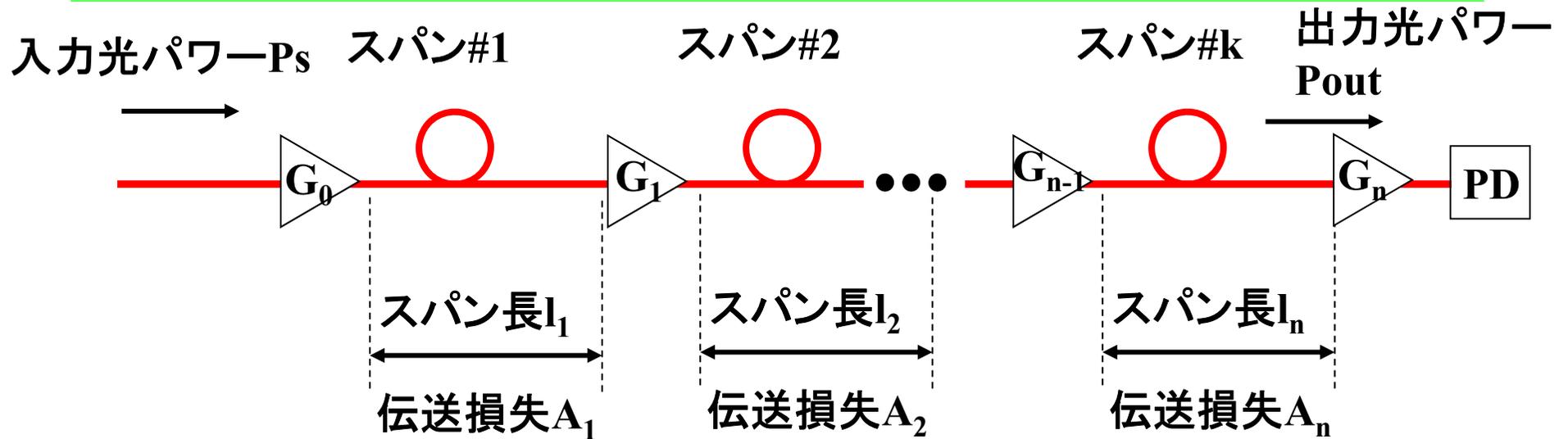
300K

$G=100$

$B_{opt}=100\text{GHz}$ (0.8nm)



SNRを考慮した長距離伝送設計(1)



信号光成分

$$\left(e\eta_i \frac{P_s}{h\omega} \right) G_0 (A_1 G_1) (A_2 G_2) \cdots (A_n G_n)$$

雑音成分

$$\sigma_{tot}^2 = \sigma_{s, shot}^2 + \sigma_{sp, shot}^2 + \sigma_{s-sp}^2 + \sigma_{sp-sp}^2 + \sigma_{th}^2$$

① 信号光のショット雑音

$$\sigma_{s, shot}^2$$

$$= \left\{ 2e \cdot e \eta_i \left(\frac{P_s}{\hbar \omega} \right) \left(\frac{B}{2} \right) \right\} G_0 \underbrace{(A_1 G_1)} \underbrace{(A_2 G_2)} \cdots \underbrace{(A_n G_n)}$$

1スパンの損失×増幅を各スパンで繰り返す

② ASEのショット雑音

$$\sigma_{sp, shot}^2$$

$$= \left\{ 2e \cdot e \eta_i n_{sp} B_{opt} \left(\frac{B}{2} \right) \right\} \left[\underbrace{(G_0 - 1)} (A_1 G_1) (A_2 G_2) \cdots (A_n G_n) + (G_1 - 1) (A_2 G_2) (A_3 G_3) \cdots (A_n G_n) + \cdots \right]$$

$$(G_{n-1} - 1) (A_n G_n) + (G_n - 1)$$

スパン#1で発生するASE

スパン#1で発生したASEが
次段以降で増幅×損失を繰り返す成分

以下、各スパンで発生する
ASEごとに計算し、加算

③ 信号光とASEのビート雑音

$$\begin{aligned} & \sigma_s - sp^2 \\ & = \left\{ 2e\eta_i \left(\frac{Ps}{h\omega} \right) \right\} (2e\eta_i n_{sp}) \left(\frac{B}{2} \right) \\ & \times \left[(G_0 A_1 G_1 A_2 G_2 \cdots A_n G_n) (G_0 - 1) A_1 G_1 A_2 G_2 \cdots A_n G_n \right. \\ & + (G_0 A_1 G_1 A_2 G_2 \cdots A_n G_n) (G_1 - 1) A_2 G_2 \cdots A_n G_n + \cdots \\ & \left. + (G_0 A_1 G_1 A_2 G_2 \cdots A_n G_n) (G_{n-1} - 1) A_n G_n + (G_0 A_1 G_1 A_2 G_2 \cdots A_n G_n) (G_n - 1) \right] \end{aligned}$$

スパン#1～#nまで
損失×増幅を繰り返す
信号光成分

G₀で発生したASEが
次段以降損失×増幅を繰り返す
成分

以下、各スパン
ごとに計算し、加算

④ ASE間ビート雑音

$$\sigma_{sp-sp}^2$$

$$= \{2e\eta_i n_{sp}\}^2 m_t B_{opt} \left(\frac{B}{2}\right)$$

$$\times [\{(G_0 - 1)A_1G_1A_2G_2 \cdots A_nG_n\} + \{(G_1 - 1)A_2G_2 \cdots A_nG_n\} + \cdots + \{(G_{n-1} - 1)A_nG_n\} + (G_n - 1)]^2$$

G_0 で発生したASEが
次段以降で損失×増幅を繰り返す成分

以下、各スパン
ごとに計算し、加算

⑤ 熱雑音

$$\sigma_{th} = \frac{4kT}{RL} \left(\frac{B}{2}\right)$$

もし $G_1 = G_2 = \dots = G_n$, $A_1 = A_2 = \dots = A_n$,
 $A_1 G_1 = A_2 G_2 = \dots = A_n G_n = 1$ と仮定すると、

信号光成分 $(e\eta_i \frac{P_s}{\hbar\omega})G_0$

雑音成分

$$\sigma_{tot}^2 = \sigma_{s,shot}^2 + \sigma_{sp,shot}^2 + \sigma_{s-sp}^2 + \sigma_{sp-sp}^2 + \sigma_{th}^2$$

- ① 信号光のショット雑音 $\sigma_{s,shot}^2 = \{2e \cdot e\eta_i (\frac{P_s}{\hbar\omega}) (\frac{B}{2})\}G_0$
- ② ASEのショット雑音 $\sigma_{sp,shot}^2 = \{2e \cdot e\eta_i n_{sp} B_{opt} (\frac{B}{2})\}[(G_0 - 1) + n(G_1 - 1)]$
- ③ 信号光とASEのビート雑音 $\sigma_{s-sp}^2 = \{2e\eta_i (\frac{P_s}{\hbar\omega})\} (2e\eta_i n_{sp}) (\frac{B}{2}) G_0 [(G_0 - 1) + n(G_1 - 1)]$
- ④ ASE間ビート雑音 $\sigma_{sp-sp}^2 = \{2e\eta_i n_{sp}\}^2 B_{opt} (\frac{B}{2}) [(G_0 - 1) + n(G_1 - 1)]^2$
- ⑤ 熱雑音 $\sigma_{th}^2 = \frac{4kT}{R_L} (\frac{B}{2})$

信号光－ASE間ビート雑音が支配的のとき、

$$\begin{aligned}\sigma_{tot}^2 &= \sigma_{s,shot}^2 + \sigma_{sp,shot}^2 + \sigma_{s-sp}^2 + \sigma_{sp-sp}^2 + \sigma_{th}^2 \\ &\cong \sigma_{s-sp}^2 = \left\{2e\eta_i \left(\frac{P_s}{\hbar\omega}\right)\right\} (2e\eta_i n_{sp}) \left(\frac{B}{2}\right) G_0 [(G_0 - 1) + n(G_1 - 1)] \\ &\quad 4 \cdot \left\{e\eta_i \left(\frac{P_s}{\hbar\omega}\right) G_0\right\}^2 \\ \therefore SNR &= \frac{4 \cdot \left\{e\eta_i \left(\frac{P_s}{\hbar\omega}\right) G_0\right\}^2}{\left\{2e\eta_i \left(\frac{P_s}{\hbar\omega}\right)\right\} \left\{2e\eta_i n_{sp}\right\} \left(\frac{B}{2}\right) G_0 [(G_0 - 1) + n(G_1 - 1)]} \\ &= \frac{2P_s G_0}{\hbar\omega n_{sp} B [(G_0 - 1) + n(G_1 - 1)]} \cong \frac{2P_s G_0}{\hbar\omega n_{sp} B [G_0 + nG_1]} \quad (8.8)\end{aligned}$$

BER<10⁻⁹を満たすときSNR>144 (21.6dB)なので、最大中継段数nが求まる。

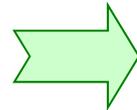
ただし実際は他の雑音成分の影響も考慮しないといけない。

雑音指数: Noise Figure (NF)

$$NF = \frac{SN_{in}}{SN_{out}}$$

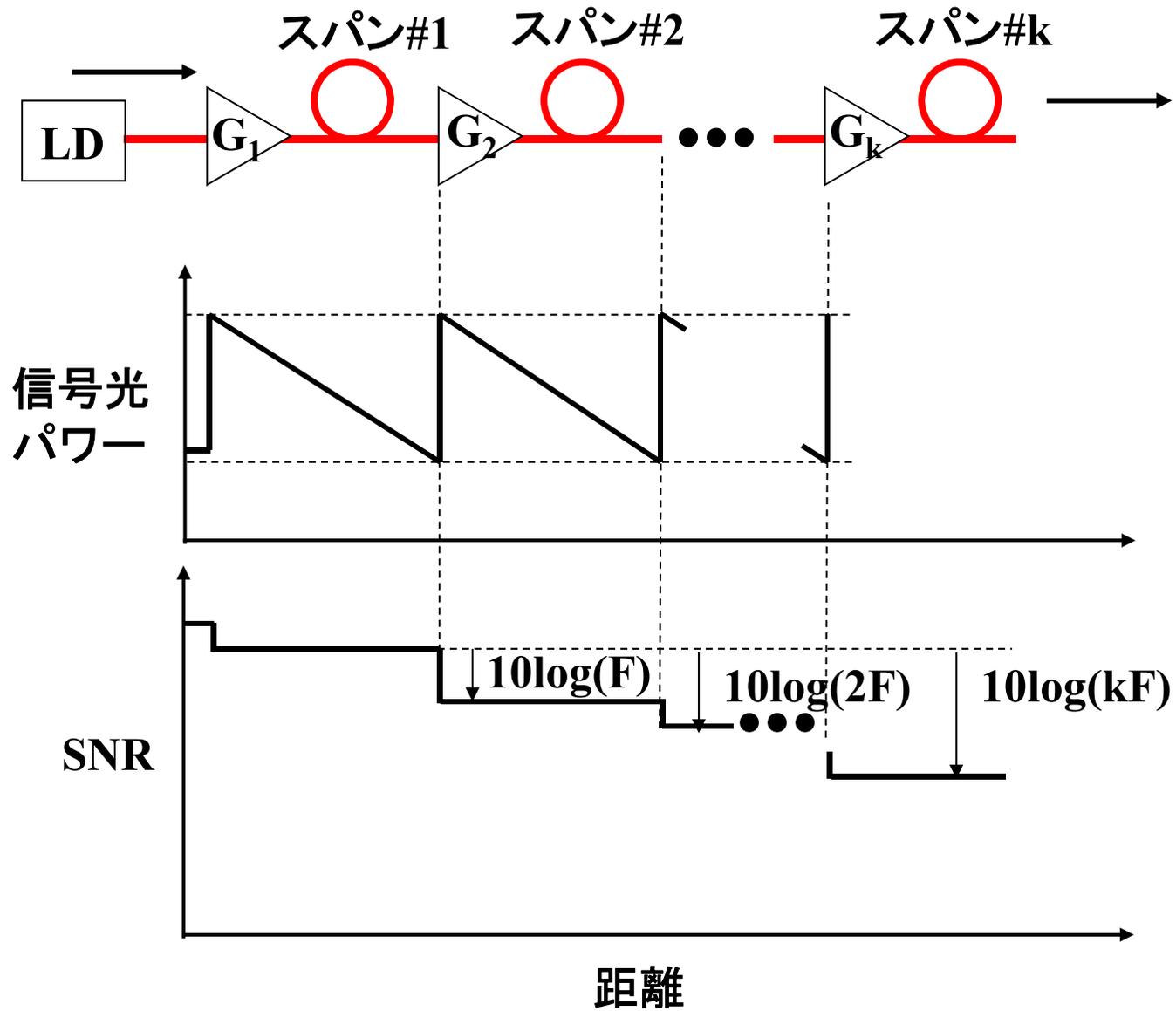
$$\cong 2 \frac{G-1}{G} n_{sp}$$

$$\cong 2n_{sp}$$



$n_{sp} \geq 1$ だから $NF \geq 2$ (3dB)
増幅後のSN比は入力に
対して必ず3dB以上劣化

多段接続時のSNR変化

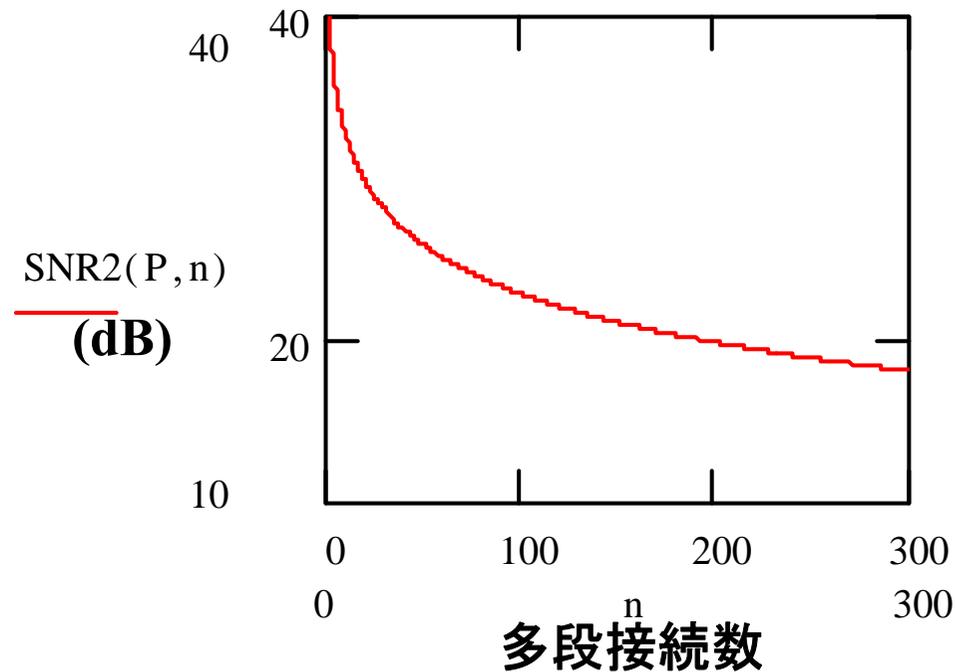


計算結果

10Gbps NRZ, 1スパン長100km

$P_{in}=0\text{dBm}$, $G_0=10$, $G_0=100$, $B_{opt}=100\text{GHz}$,

$n_{sp}=2$, 300K



光増幅器による伝送距離の長距離化

