練習問題２

1. 次の３人ゲームのコアを図を用いて求めよ．また，仁，シャープレイ値を求めよ．
$v(\{1,2,3\}) = 100$,
$v(\{1,2\}) = 70$, $v(\{1,3\}) = 60$, $v(\{2,3\}) = 50$,
$v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0$

2. 同じ方向に家のあるＡ，Ｂ，Ｃの３人が大岡山駅からタクシーに相乗りし，一番遠くに家のあるＣが料金を支払っておき，翌日清算することにした．メーターでは，Ａの家までは１２００円，Ｂの家までは２０００円であり，最終的にＣの家までは，２５００円かかった．この状況を費用軽減額に基づいて特性関数形表現し，コア，仁，シャープレイ値を求めよ．シャープレイ値に従えば，Ａ及びＢは，翌日いくらずつＣに支払えばよいか．仁の場合はどうか．

3. 左手の手袋を持っているプレイヤー１，２と右手の手袋を持っているプレイヤー３，４がいる．左手の手袋と右手の手袋がそろえば，１組につき１万円で売れる．
   (a) この状況を特性関数形ゲームとして定式化せよ．
   (b) このゲームのコア，仁，シャープレイ値を求めよ．
   (c) いま，左手の手袋を持つプレイヤー５が加わったとき，特性関数形ゲームはどう変化し，コア，仁，シャープレイ値はどうなるかを答えよ．
   (d) 右手の手袋を持つプレイヤーが m 人，左手の手袋を持つプレイヤーが n 人いるとき，コアを求めよ．

4. 特性関数が２つの値 0,1 だけをとり，$v(N) = 1$ となる特性関数形ゲーム (N, v) を単純ゲームという．単純ゲームのうち，（１）$S \subseteq T$ ならば，$v(S) \leq v(T)$,（２）$v(S) = 1$ ならば，$v(N \setminus S) = 0$，の２つの性質を満たすものを投票ゲームという．$v(S) = 1$ となる提携を勝利提携といい，その全体を $\mathbf{W}$ で表す．すべての勝利提携に含まれるプレイヤーが存在するとき，このプレイヤーを拒否権を持つプレイヤーという．投票ゲームにおいて，コアが非空であるための必要十分条件は拒否権を持つプレイヤーが存在することであることを示せ．さらに，拒否権を持つプレイヤーの集合を V とするとき，コアは
$$C = \{x \in A | x_i = 0 \ \ \forall i \in N \setminus V\}$$
で与えられることを示せ．

5. 投票ゲームにおいては，プレイヤー i のシャープレイ値は
$$\phi_i = \sum_{S \cup \{i\} \in \mathbf{W}, S \notin \mathbf{W}} \frac{s!(n-s-1)!}{n!}$$
で与えられることを示せ．これを，投票ゲームにおけるシャープレイ・シュービック指数という．

6. ３人ゲームにおけるコアの存在条件

- $x = (x_1, x_2, x_3) \in C \Longleftrightarrow$
$$x_1 + x_2 + x_3 = v(\{1,2,3\})$$
$$x_1 + x_2 \geq v(\{1,2\})$$
$$x_1 + x_3 \geq v(\{1,3\})$$
$$x_2 + x_3 \geq v(\{2,3\})$$
$$x_1 \geq v(\{1\})$$
$$x_2 \geq v(\{2\})$$
$$x_3 \geq v(\{3\})$$

- $C \neq \emptyset \Longleftrightarrow$
最小化線形計画問題
$$x_1 + x_2 + x_3 \longrightarrow min$$
subject to
$$x_1 + x_2 \geq v(\{1,2\})$$
$$x_1 + x_3 \geq v(\{1,3\})$$
$$x_2 + x_3 \geq v(\{2,3\})$$
$$x_1 \geq v(\{1\})$$
$$x_2 \geq v(\{2\})$$
$$x_3 \geq v(\{3\})$$
において最小値 $\leq v(\{1,2,3\})$

- 双対問題
双対変数を $\gamma_{12}, \gamma_{13}, \gamma_{23}, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ とする。
$$\gamma_{12}v(\{1,2\}) + \gamma_{13}v(\{1,3\}) + \gamma_{23}v(\{2,3\}) + \gamma_1 v(\{1\}) + \gamma_2 v(\{2\}) + \gamma_3 v(\{3\}) \longrightarrow max$$
$$\gamma_{12} + \gamma_{13} + \gamma_1 = 1$$
$$\gamma_{12} + \gamma_{23} + \gamma_2 = 1$$
$$\gamma_{13} + \gamma_{23} + \gamma_3 = 1$$
$$\gamma_{12}, \gamma_{13}, \gamma_{23}, \gamma_1, \gamma_2 \cdot \gamma_3 \geq 0$$
を考えると両問題ともに実行可能ゆえ，双対定理から主問題の最小値と双対問題の最大値は等しい。したがって，双対問題の最大値 $\leq v(\{1,2,3\})$ であることがコアが非空であるための必要十分条件となる。

- （問題）以上のことを用いて，$v(\{i\}) = 0 \ \forall i \in \{1,2,3\}$ となる優加法的な３人ゲームにおいて，非空なコアが存在するための必要十分条件が，$v(\{1,2\}) + v(\{1,3\}) + v(\{2,3\}) \leq 2v(\{1,2,3\})$ となることを示せ.

7. コアの存在条件

- コア　$C = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in A | \sum_{i \in S} x_i \geq v(S) \ \forall S \subset N, \ S \neq N, \emptyset\}$
ただし，$A = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \Re^n | \sum_{i \in N} x_i = v(N), \ x_i \geq v(\{i\}) \ \forall i \in N\}$

- 線形計画問題
$\sum_{i \in N} x_i \ \rightarrow$ 最小化

制約条件　$\sum_{i\in S} x_i \geq v(S)\ \forall S \subseteq N\ S \neq N, \emptyset$

- $C \neq \emptyset \iff$ 線形計画問題の最小値 $\leq v(N)$
- 双対問題

  $\sum_{S\subset N, S\neq N,\emptyset} \gamma_S v(S) \ \rightarrow$ 最大化

  制約条件　$\sum_{S:i\in S\subset N, S\neq N,\emptyset} \gamma_S = 1\ \forall i \in N$

  $\gamma_S \geq 0\ \forall S \subset N, S \neq N, \emptyset$
- $C \neq \emptyset \iff$ 双対計画問題の最大値 $\leq v(N)$
- 提携の集合族 $\{S_1, ..., S_m\}$ が平衡集合族　$\Leftrightarrow$

  ある正の実数 $\gamma_1, ..., \gamma_m$ が存在して，$\sum_{j:i\in S_j} \gamma_j S_j = 1\ \forall i \in N$

  $\gamma_1, ..., \gamma_m$：重み
- ゲーム (N, v) が平衡ゲーム $\iff$

  N の任意の平衡集合族 $\{S_1, ..., S_m\}$ とその任意の重み $\gamma_1, ..., \gamma_m$ に対して，

  $\sum_{j=1}^{m} \gamma_j v(S_j) \leq v(N)$
- $C \neq \emptyset \iff$ ゲーム (N, v) が平衡ゲーム

8. コア C と支配に基づくコア DC の関係について

- （問題）$C \subseteq DC$ であることを示せ．
- (N, v) が優加法的であれば，$DC \subseteq C$ となることの証明

  任意の配分 $x \in DC$ をとり，$x \notin C$ と仮定する．C の定義より，$\sum_{i\in S} x_i < v(S)$ となる提携 $S \subset N$ が存在する．$\epsilon = v(S) - \sum_{i\in S} x_i > 0$ とし，

  $$y_i = \begin{cases} x_i + \frac{\epsilon}{|S|} & i \in S \\ v(\{i\}) + \frac{v(N)-v(S)-\sum_{i\in N\setminus S} v(\{i\})}{|N\setminus S|} & i \in N \setminus S \end{cases}$$

  によって，n 次元ベクトル $y = (y_1, \ldots, y_n)$ を定義する．ただし，$|S|, |N \setminus S|$ は，それぞれ $S, N \setminus S$ に属するプレイヤーの数である．

  （問題）y が全体合理性を満たすことを示せ．

  （問題）(N, v) が優加法的であれば，y は個人合理性を満たすことを示せ．

  したがって，(N, v) が優加法的であれば，y は配分である．

  （問題）y は x を S を通して支配することを示せ．

  よって，$x \in DC$ に矛盾する．(証明終)

9. 仁の存在

- （問題）各配分 $x \in A$ について，$\theta_i(x),\ i = 1, ..., 2^n - 2$　は

  $$\theta_i(x) = max_{\mathbf{S}\subseteq \mathbf{2^N}\setminus\{\mathbf{N},\emptyset\}, |\mathbf{S}|=\mathbf{i}}(min_{s\in \mathbf{S}}\ e(S, x))$$

  と表されることを示せ．
- $e(S, x) = v(S) - \sum_{i\in S}\ x_i$ は x の連続関数であり，$\theta_i(x)$ は有限個の連続関数の max, min で定義されるからやはり x の連続関数である．

- いま，
  $A^1 = \{x \in A | \theta_1(x) = min_{y\in A}\theta_1(y)\}$
  $A^i = \{x \in A^{i-1} | \theta_i(x) = min_{y\in A^{i-1}}\theta_i(y)\} \quad i = 2, ..., 2^n - 2$
  とすると，A はコンパクトで $\theta_1(x)$ は連続関数ゆえ，最小値が存在し，$A^1 \neq \emptyset$，かつ A^1 はコンパクト集合になる．$\theta_2(x)$ は連続関数ゆえ，$A^2 \neq \emptyset$，かつ A^2 はコンパクト．このプロセスを繰り返していけば，最終的に $A^{2^n-2} \neq \emptyset$ が得られる．
  （問題）A^{2^n-2} が仁であることを示せ．

10. 仁の唯一性の証明

- 仁 L が複数の配分を含むとし，背理法で証明する．
  ２つの異なる配分 $x, y \in L$ をとり，$z = (x + y)/2$ とする．
- 以下のように，$\theta(x), \theta(y)$ を定義する．
  $\theta(x) = (\theta_1(x), ..., \theta_{2^n-2}(x)) = (e(S_1, x), ..., e(S_{2^n-2}, x))$
  $\theta(y) = (\theta_1(y), ..., \theta_{2^n-2}(y)) = (e(T_1, y), ..., e(T_{2^n-2}, y))$
  x, y ともに L に属するから，$\theta_i(x) = \theta_i(y) \ \forall i = 1, ..., 2^n - 2$ である．
  さらに，$\theta(z) = (\theta_1(z), ..., \theta_{2^n-2}(z))$ とする．
- （問題）$S_i = T_i \ \forall i = 1, ..., 2^n - 2$ であれば，$x = y$ となることを示せ．
- $x \neq y$ ゆえ，
  $S_i = T_i \ \forall i = 1, ..., k$，$S_{k+1} \neq T_{k+1}$ となる $k, 0 \leq k \leq 2^n - 4$ が存在する．ここで，k はできる限り大きくとっておくものとする．
- （問題）$\theta_i(x) = \theta_i(y) = \theta_i(z) \ \forall i = 1, ..., k$ であることを示せ．
- （問題）$S = S_{k+1} = T_j$ とすると，
  $j \geq k + 2$ であり，$\theta_{k+1}(y) > \theta_j(y)$ であることを示せ．
- （問題）$\theta_{k+1}(z) < \theta_{k+1}(x)(= \theta_{k+1}(y))$ であることを示せ．
- したがって，$x, y \in L$ に矛盾する．(証明終)

11. ３人ゲームにおけるシャープレイ値の公理系からの導出

- プレイヤーの集合を $N = \{1, 2, 3\}$ とする．７個の特性関数 $w_1, w_2, w_3, w_{12}, w_{13}, w_{23}, w_{123}$ を以下のように作る．

$$w_1(S) = \begin{cases} 1 & S = \{1\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,2,3\} \text{ の場合} \\ 0 & \text{その他の場合} \end{cases}$$

$$w_2(S) = \begin{cases} 1 & S = \{2\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,2,3\} \text{ の場合} \\ 0 & \text{その他の場合} \end{cases}$$

$$w_3(S) = \begin{cases} 1 & S = \{3\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\} \text{ の場合} \\ 0 & \text{その他の場合} \end{cases}$$

$$w_{12}(S) = \begin{cases} 1 & S = \{1,2\}, \{1,2,3\} \text{ の場合} \\ 0 & \text{その他の場合} \end{cases}$$

$$w_{13}(S) = \begin{cases} 1 & S = \{1,3\}, \{1,2,3\} \text{ の場合} \\ 0 & \text{その他の場合} \end{cases}$$

$$w_{23}(S) = \begin{cases} 1 & S = \{2,3\}, \{1,2,3\} \text{ の場合} \\ 0 & \text{その他の場合} \end{cases}$$

$$w_{123}(S) = \begin{cases} 1 & S = \{1,2,3\} \text{ の場合} \\ 0 & \text{その他の場合} \end{cases}$$

- （問題）この７つの特性関数をもつゲームそれぞれについて，そのシャープレイ値を４つの公理のいくつかを用いて求めよ．
- 任意の特性関数 v をとると，v は上の７個の特性関数の和（一次結合）で表される..まず，提携 $\{1\}$ について 0 でない値を与えているのは w_1 のみであることから，w_1 の係数は $v(\{1\})$ である．同様にして，w_2, w_3 の係数は，それぞれ $v(\{2\}), v(\{3\})$ である．次に，提携 $\{1,2\}$ について 0 でない値を与えているのは w_1, w_2, w_{12} で，w_1, w_2 の係数は，それぞれ $v(\{1\}), v(\{2\})$ であることから，w_{12} の係数は，$v(\{1,2\}) - v(\{1\}) - v(\{2\})$ である．
  （問題）w_{13}, w_{23}, w_{123} の係数を求めよ．
- （問題）以上のことと公理のいくつかを用いて，以下の特性関数を持つゲームのシャープレイ値を求め，公式を用いて求めた値と一致することを確かめよ。
  (a) $v(\{1,2,3\}) = 2$, $v(\{1,2\}) = 1$, $v(\{1,3\}) = 1$, $v(\{2,3\}) = v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0$
  (b) $v(\{1,2,3\}) = 3$, $v(\{1,2\}) = 2$, $v(\{1,3\}) = 2$, $v(\{2,3\}) = 1$, $v(\{1\}) = 1$, $v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0$
  (c) $v(\{1,2,3\}) = 6$, $v(\{1,2\}) = 4$, $v(\{1,3\}) = 1$, $v(\{2,3\}) = 2$, $v(\{1\}) = 1$, $v(\{2\}) = 2$, $v(\{3\}) = 0$
  (d) 問題１および問題２のゲーム

12. シャープレイ値の公理系からの導出

- 定理：全体合理性，ナルプレイヤーに関する性質，対称性，加法性の 4 つの公理を満たす関数 ϕ はただ一つに定まり，各ゲーム (N, v) に対して，
  $\phi_i(v) = \sum_{S:S\subseteq N, i\notin S} \frac{s!(n-s-1)!}{n!}(v(S\cup\{i\}) - v(S))\ \forall i \in N$
  で与えられる．
- （問題）シャープレイ値の２つの表現
  $\psi_i(v) = \frac{1}{n!}\sum_{\pi\in\Pi}(v(P^{\pi,i}\cup\{i\}) - v(P^{\pi,i}))$
  $\phi_i(v) = \sum_{S:S\subseteq N, i\notin S} \frac{s!(n-s-1)!}{n!}(v(S\cup\{i\}) - v(S))\ \forall i \in N$
  は同値であることを示せ．
- （問題）シャープレイ値 $\psi_i(v)$ は，パレート最適性，ナルプレイヤーに関する性質，対称性，加法性の４つの公理を満たすことを示せ．したがって，$\phi_i(v)$ も４つの公理を満たす．

- 任意の提携 $R \subseteq N$ に対して，特性関数 $w_R \in V$ を

$$w_R(S) = \begin{cases} 1 & R \subseteq S \text{ の場合} \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

と定義する．

- 任意の $v \in V$ に対して，$v = \sum_{R \subseteq N} c_R w_R$ となる $2^n - 1$ 個の実数 c_R，$R \subseteq N, R \neq \emptyset$, が一意に存在することを示す．$V$ は $2^n - 1$ 次元ユークリッド空間 $\Re^{2^n - 1}$ の部分集合ゆえ，$\{w_R | R \subseteq N\}$ が $\Re^{2^n - 1}$ の基底であることを示せばよい．そのためには，$\{w_R | R \subseteq N\}$ が１次独立であることを示せばよい．
- （問題）$\{w_R | R \subseteq N\}$ が１次独立であることを示せ．
- シャープレイ値 ϕ は４つの公理を満たすから，４つの公理を満たす V から $\Re^n$ への任意の関数 ϕ' が各 $v \in V$ に対してただ一つの値 $\phi'(v)$ を与えることを示せばよい．そうすれば，$\phi' = \phi$ となる．
- （問題）ゲーム $cw_R (c \geq 0)$ に対して

$$\phi'_i(cw_R) = \begin{cases} c/|R| & i \in R \\ 0 & i \notin R \end{cases}$$

であることを示せ．ただし，$|R|$ は提携 R に属するプレイヤーの数である．

- $\{w_R | R \subseteq N\}$ が $\Re^{2^n - 1}$ の基底ゆえ，任意の $v \in V$ は，$v = \sum_{R \subseteq N} \ c_R w_R$ と表される．$c_R, R \subseteq N,$ はただ一つに定まる．
- $v = \sum_{c_R \geq 0} c_R w_R - \sum_{c_R < 0} |c_R| w_R$, したがって，$v + \sum_{c_R < 0} |c_R| w_R = \sum_{c_R \geq 0} c_R w_R$ と表される．
- （問題）各 $i \in N$ について，

$$\phi'_i(v) = \sum_{c_R \geq 0} \phi'_i(c_R w_R) - \sum_{c_R < 0} \phi'_i(|c_R| w_R)$$

であることを示せ．

- したがって，各 $v \in V$ に対してただ一つのベクトル $\phi'(v)$ が定まる．