多人数協力ゲーム（特性関数形ゲーム，提携形ゲーム）

1. 特性関数形ゲーム

- $(N = \{1, 2, ..., n\}, v)$
  $N = \{1, 2, ..., n\}$ ：プレイヤーの集合
  $v : 2^N \to \Re$ ：特性関数
  2^N は N の部分集合の全体, $S \subseteq N$：提携
- $v(S)$：提携 S のメンバーが協力したときに必ず獲得できる最大の利得の値
- (N, v) が優加法的ゲーム $\Leftrightarrow$
  任意の $S, T \subseteq N, S \cap T = \emptyset,$ に対して，$v(S) + v(T) \leq v(S \cup T)$

2. 配分

- $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ ：利得ベクトル
  利得ベクトル $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ が配分 $\Leftrightarrow$
  $\sum_{i=1}^{n} x_i = v(N)$ （全体合理性）
  $x_i \geq v(\{i\})\ \forall i = 1, ..., n$ （個人合理性）
- 配分の集合を，以下 A で表す.
  $A = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \Re^n | \sum_{i=1}^{n} x_i = v(N), x_i \geq v(\{i\})\ \forall i = 1, ..., n\}$

3. コア

- 配分の集合 C がコア $\Leftrightarrow$
  $C = \{x \in A | \sum_{i \in S} x_i \geq v(S)\ \forall S \subseteq N\}$
- $\sum_{i \in S} x_i \geq v(S)$：提携合理性
- $e(S, x) = v(S) - \sum_{i \in S} x_i$：配分 x に対する提携 S の不満
- コア $\Leftrightarrow$ どの提携も不満を持たない配分の集合
- コアの支配を用いた定義
  - 支配：
    ２つの配分 $x, y \in A$ に対して，ある提携 $S \subseteq N$ が存在して，以下の２つの条件が成り立つとき，x は y を S を通して支配するといい，$x\ dom_S\ y$ と表す。
    * $x_i > y_i\ \forall i \in S$
    * $\sum_{i \in S} x_i \leq v(S)$

    $x\ dom_S\ y$ となる S が少なくとも１つ存在するとき，単に x は y を支配するといい，$x\ dom\ y$ と表す
  - どの配分からも支配されない配分の全体 DC を支配に基づくコアという。すなわち，

$$DC = \{x \in A | y\ dom\ x \text{ となる } y \in A \text{ が存在しない }\}$$

  - $C \subseteq DC$ が常に成り立つ。
  - (N, v) が優加法的であれば，$DC \subseteq C$ も成り立ち，$C = DC$ となる。

4. 仁

- 各配分 $x \in A$ に対して，$e(S,x)$　$(S \subseteq N, S \neq N, \emptyset)$　を大きなものから並べたベクトルを $\theta(x)$ とする．
  $\theta(x) = (e(S_1,x), e(S_2,x), ..., e(S_{2^n-2}))$
  　$e(S_1,x) \geq e(S_2,x) \geq ... \geq e(S_{2^n-2}))$
- ２つの配分 $x, y \in A$ に対して，
  x が y よりも許容的 $\Leftrightarrow$
  ある $k = 1, ..., 2^n - 2$ が存在して，
  $\theta_i(x) = \theta_i(y)\ \forall i = 1, ..., k-1$
  $\theta_k(x) < \theta_k(y)$
- 配分の集合 L が仁
  $L = \{x \in A | x$ よりも許容的な $y \in A$ が存在しない $\}$
- 仁は必ず存在し，１つの配分からなる．
- コアが空でなければ，仁はコアに属する．

5. シャープレイ値

- プレイヤー $i \in N$ の提携 $S, i \notin S,$ に対する貢献度
  $v(S \cup \{i\}) - v(S)$
- プレイヤーの順列 $\pi = (\pi(1), \pi(2), ..., \pi(n))$ におけるプレイヤー $\pi(k)$ の貢献度
  $v(\{\pi(1), ..., \pi(k-1), \pi(k)\}) - v(\{\pi(1), ..., \pi(k-1)\})$
  　$\pi(1), ..., \pi(k-1)$：順列 π における $\pi(k)$ の先行者
- プレイヤー i の順列 π における貢献度
  $v(P^{\pi,i} \cup \{i\}) - v(P^{\pi,i})$
  　$P^{\pi,i}$：π における i の先行者の集合
- プレイヤー i のシャープレイ値
  $\psi_i = \frac{1}{n!}\sum_{\pi \in \Pi}(v(P^{\pi,i} \cup \{i\}) - v(P^{\pi,i}))$
  　Π：プレイヤーの順列の全体

  シャープレイ値
  $\psi = (\psi_1, ..., \psi_n)$
  n 人のプレイヤーの順列（$n!$ 個）がすべて同じ確率で起こる場合の各プレイヤーの貢献度の期待値
- シャープレイ値は全体合理性を満たす．
  (N,v) が優加法的であれば，個人合理性も満たし，配分になる．
- シャープレイ値の別表現
  $\psi_i = \sum_{S:S \subseteq N, i \notin S} \frac{s!(n-s-1)!}{n!}(v(S \cup \{i\}) - v(S))$
  　$s = |S|$：S に含まれるプレイヤーの数

6. シャープレイ値の公理系からの導出

- プレイヤーの集合 N は固定し，優加法的な特性関数 $v: 2^N \rightarrow \Re$ の全体を V とする．
  各ゲーム $(N,v), v \in V,$ に対して，n 次元の実数ベクトルを与える関数を $\phi: V \rightarrow \Re^n$ とし，$\phi(v) = (\phi_1(v), ..., \phi_n(v))$ とする．
- 公理系

(a) 全体合理性

任意の $v \in V$ に対して，$\sum_{i \in N} \phi_i(v) = v(N)$

(b) ナルプレイヤーに関する性質

プレイヤー $i \in N$ がナルプレイヤー $\Leftrightarrow v(S \cup \{i\}) - v(S) = 0 \ \forall S \subseteq N, i \notin S$

プレイヤー i がナルプレイヤーであれば，$\phi_i(v) = 0$

(c) 対称性

プレイヤー $i, j \in N$ が対称 $\Leftrightarrow v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\}) \ \forall S \subseteq N, i, j \notin S$

プレイヤー i, j が対称であれば，$\phi_i(v) = \phi_j(v)$

(d) 加法性

任意の 2 つの特性関数 $v, u \in V$ に対して，特性関数 $w \in V$ を
$w(S) = v(S) + u(S) \ \forall S \subseteq N$ によって定義する．
このとき，$\phi(w) = \phi(v) + \phi(u)$

- 定理

全体合理性，ナルプレイヤーに関する性質，対称性，加法性の 4 つの公理を満たす関数 ϕ はただ一つに定まり，各ゲーム (N, v) に対して，

$$\phi_i(v) = \sum_{S: S \subseteq N, i \notin S} \frac{s!(n-s-1)!}{n!}(v(S \cup \{i\}) - v(S)) \ \forall i \in N$$