練習問題 1

1. 次の交渉ゲームのナッシュ交渉解を，公式を用いる方法，公理を用いての導出する方法，の 2 通りの方法で求め一致することを確かめよ。

- (a) 実行可能集合が $(0, 0), (9, 0), (0, 6)$ を頂点とする三角形の辺上および内部で，交渉の基準点が $(0, 0)$.
- (b) 実行可能集合が $(0, 0), (9, 0), (0, 6)$ を頂点とする三角形の辺上および内部で，交渉の基準点が $(3, 2)$.
- (c) 実行可能集合が $(0, 0), (8, 0), (0, 8)$ を頂点とする三角形の辺上および内部で，交渉の基準点が $(2, 1)$.
- (d) 実行可能集合が $(0, 0), (0, 6), (6, 3), (8, 0)$ を頂点とする四角形の辺上および内部で，交渉の基準点が $(0, 0)$.
- (e) 実行可能集合が $(0, 0), (0, 6), (6, 3), (8, 0)$ を頂点とする四角形の辺上および内部で，交渉の基準点が $(2, 2)$.

2. ナッシュ交渉解の存在証明について

ナッシュ交渉解の存在定理

パレート最適性，対称性，正のアフィン変換からの独立性，無関係な結果からの独立性の 4 つの公理を満たす関数 $f : B \rightarrow \mathbb{R}^2$ はただ一つに定まり，各交渉問題 (R, u^0) に対して，

$$\max\{(u_1 - u_1^0)(u_2 - u_2^0) \mid (u_1, u_2) \in R, u_1 \geq u_1^0, u_2 \geq u_2^0\}$$

の最大値を実現する (u_1, u_2) を与える． (u_1, u_2) はただ一つに定まる．

このような f をナッシュ交渉解という．ただし， B は，

- R は， $\mathbb{R}^2$ の凸かつコンパクトな集合．
- $u^0 = (u_1^0, u_2^0) \in R$.
- $u_1 > u_1^0, u_2 > u_2^0$ となる $(u_1, u_2) \in R$ が存在する．

を満たす (R, u^0) の集合である．

(証明)

(a) 上のような関数 f が定義できること

$$H(u_1, u_2) = (u_1 - u_1^0)(u_2 - u_2^0), R' = \{u \in R \mid u_1 \geq u_1^0, u_2 \geq u_2^0\} \text{ とおく.}$$

R がコンパクトゆえ， R' もコンパクト．

H は R' において連続関数ゆえ， R' において最大値をもつ．

(問題) このとき，以下を示せ．

- i. 最大値を達成する点を $u^* = (u^*_1, u^*_2)$ とすると， $u^*_1 > u_1^0, u^*_2 > u_2^0$
- ii. R' は凸集合．
- iii. $u^* = (u^*_1, u^*_2)$ はただ一つに定まる．従って， f は関数として定義できる．

(ヒント) 最大値を達成する点が複数あるとし，その中の u^* 以外の点 $t^* = (t^*_1, t^*_2)$ をとり， $r^* = (r^*_1, r^*_2) = ((u^*_1 + t^*_1)/2, (u^*_2 + t^*_2)/2)$ とする．

このとき， $H(r^*_1, r^*_2) > H(u^*_1, u^*_2)$ ，かつ $(r^*_1, r^*_2) \in R'$ であることが示せる．これは u^* の定義に矛盾．

(b) (問題) f がパレート最適性, 対称性, 正のアフィン変換からの独立性, 無関係な結果からの独立性の4つの公理を満たすことを示せ.

(c) 上の f が4つの公理を満たす唯一の解であること.

$g: B \rightarrow \mathbb{R}^2$ を4つの公理を満たすもう1つの解とする.

任意の (R, u^0) に対して, $f(R, u^0) = g(R, u^0)$ を示せばよい.

任意の (R, u^0) をとり, $u^* = f(R, u^0)$ とする.

i. $(u_1, u_2) \in R$ に対して, 次の正アフィン変換を考え, (u_1'', u_2'') の全体を R'' とする.

$$u_1'' = \frac{u_1}{2(u^*_{11} - u_1^0)} - \frac{u_1^0}{2(u^*_{11} - u_1^0)}$$

$$u_2'' = \frac{u_2}{2(u^*_{22} - u_2^0)} - \frac{u_2^0}{2(u^*_{22} - u_2^0)}$$

ii. (問題) この変換のもとで,

- (u^*_{11}, u^*_{22}) は $(1/2, 1/2)$ に変換され,

- (u_1^0, u_2^0) は $(0, 0)$ に変換される.

となることを示せ.

iii. したがって, $f(R'', (0, 0)) = (1/2, 1/2)$ であり, f も g も公理3 (正アフィン変換からの独立性) を満たすから, $g(R'', (0, 0)) = (1/2, 1/2)$ を示せばよい.

iv. 任意の $u'' = (u_1'', u_2'') \in R''$ に対して, $u_1'' + u_2'' \leq 1$ であることを示す.

- $u_1'' + u_2'' > 1$ とする.

- ごく小さな実数 $\epsilon, 0 \leq \epsilon \leq 1$, に対して, $(1 - \epsilon)(1/2, 1/2) + \epsilon(u_1'', u_2'')$ を作る.

- (問題) これが R'' に属することを示せ.

- (問題) ϵ が十分に小さければ, この利得ベクトルにおいて, 第1成分と第2成分の積は $1/4$ より大であることを示せ.

- これは, $f(R'', u^0) = (1/2, 1/2)$ に矛盾.

v. 45° 線に関して対称で R'' を含み, かつ $(1/2, 1/2)$ が T においてパレート最適となるような三角形の辺上および内部を T とする. R' は有界ゆえこのような T はとれる. 公理1 (パレート最適性) と公理2 (対称性) から, $g(T, (0, 0)) = (1/2, 1/2)$ とならなければならない. $R'' \subseteq T$ でかつ $(0, 0), (1/2, 1/2) \in R''$ ゆえ, 公理4 (無関係な結果からの独立性) により, $g(R'', (0, 0)) = (1/2, 1/2)$.

3. ナッシュ交渉解に対する非協力ゲームからのアプローチについて

「ゲーム理論入門」68ページ練習問題2を用いて説明する.

問題「2人のプレイヤー1, 2が共同事業で得た100万円をどのように分配するかを協議している。合計が100万円以下になるようなわけ方も可能である。話し合いが決着しなければ, 2人とも何も得られない。」

(a) 交渉ゲームとしての定式化

実現可能集合 $R = \{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 \mid u_1 + u_2 \leq 100\}$

交渉の基準点 $u^0 = (u_1^0, u_2^0) = (0, 0)$ したがって, パレート最適性と対称性から, ナッシュ

交渉解は $u^* = (u_1^*, u_2^*) = (50, 50)$ である。

(b) Nash の非協力ゲームからのアプローチ

2人のプレイヤー1, 2が, それぞれ自分の要求額 $u_1, u_2 \geq 0$ を同時に提示する。もし,

$u_1 + u_2 \leq 100$ であれば、それぞれ自分の要求額を得る。もし、 $u_1 + u_2 > 100$ であれば、両者はいずれも交渉の基準点の額 0 を得る。

このゲームにおいて、ナッシュ交渉解 (50, 50) も 1 つのナッシュ均衡になるが、それ以外に多数のナッシュ均衡が存在する。

(練習問題) このゲームのナッシュ均衡をすべて求めよ。

(c) Rubinstein のアプローチ

1 期目：一方のプレイヤー（以下ではプレイヤー 1 とする）が自分と相手の取り分 (u_1^1, u_2^1) を提示する。プレイヤー 2 は、これを受け入れるか拒否するかを決める。受け入れた場合には、プレイヤー 1 は u_1^1 、プレイヤー 2 は u_2^1 を得て、ゲームは終了する。拒否した場合には、2 期目に入る。

2 期目：プレイヤー 2 が自分と相手の取り分 (u_1^2, u_2^2) を提示する。プレイヤー 1 は、これを受け入れるか拒否するかを決める。受け入れた場合には、プレイヤー 1 は u_1^2 、プレイヤー 2 は u_2^2 を得て、ゲームは終了する。拒否した場合には、3 期目に入る。

3 期目：プレイヤー 1 が自分と相手の取り分 (u_1^3, u_2^3) を提示し、プレイヤー 2 は、これを受け入れるか拒否するかを決める。

以下このようにして、提示されたプレイヤーが受け入れるまで続ける。

無限に続く場合の両者の利得はともに 0 としておく。時間の経過を考慮に入れるために、割引因子 δ , $0 < \delta < 1$ を導入し、各期の利得の 1 期目における価値を考える。2 期目の利得は ($\delta u_1^2, \delta u_2^2$)、3 期目の利得は ($\delta^2 u_1^3, \delta^2 u_2^3$) である。

このゲームの部分ゲーム完全均衡点は、 $\delta \rightarrow 1$ であるとき、ナッシュ交渉解 (50, 50) に収束する。

(証明) 全体のゲームの部分ゲーム完全均衡点が存在するとし、そのもとでのプレイヤー 1, 2 の利得の 1 期目における価値をそれぞれ u_1^*, u_2^* とする。

全体のゲームと 3 期目から始まる部分ゲームは、利得がすべて δ^2 倍になることを除けば、同じ構造を持つ。そこで、全体のゲームと 3 期目から始まる部分ゲームが同じ戦略を持つ部分ゲーム完全均衡を考える。

まず、3 期目まで続いた場合の、この部分ゲーム完全均衡におけるプレイヤー 1, 2 の利得の 1 期目における価値は、 $\delta^2 u_1^*, \delta^2 u_2^*$ である。以下、両プレイヤーの利得は、すべて 1 期目における価値である。

2 期目から始まる部分ゲーム：プレイヤー 1 は、プレイヤー 2 の提案 (u_1^2, u_2^2) を受け入れれば、 δu_1^2 の利得、拒否すれば 3 期目に入るから、 $\delta^2 u_1^*$ の利得である。したがって、 $\delta u_1^2 \geq \delta^2 u_1^*$ 、すなわち $u_1^2 \geq \delta u_1^*$ であれば、受け入れる。よって、プレイヤー 2 が要求しプレイヤー 1 が受け入れうる最低額は δu_1^* である。残りの $100 - \delta u_1^*$ がプレイヤー 2 が 2 期目に得られる最高額である。

プレイヤー 2 は、 δu_1^* を 1 に提示しておけば、プレイヤー 1 は受け入れ、 $\delta(100 - \delta u_1^*)$ の利得を得ることができる。プレイヤー 1 が拒否する場合には、 $\delta^2 u_2^*, u_2^*$ は最大でも $100 - u_1^*$

であるから，1が拒否した場合の2の最大の利得は， $\delta^2(100 - u_1^*)$ である。いま， $0 < \delta < 1$ ゆえ， $\delta(100 - \delta u_1^*) > \delta^2(100 - u_1^*)$ が成り立つ。したがって，2期目から始まる部分ゲームにおける部分ゲーム完全均衡における結果は，「プレイヤー2が $(\delta u_1^*, 100 - \delta u_1^*)$ を提示し，プレイヤー1がこれを受け入れる」となる。

1期目から始まるゲーム（全体のゲーム）:

（練習問題）2期目から始まるゲームに関するうえの議論をもとに，以下を示せ。

- i. プレイヤー1が要求しプレイヤー2が受け入れうる最低額は $\delta(100 - \delta u_1^*)$ である。
- ii. プレイヤー2が受け入れるような提示の中で，プレイヤー1が得られる最大の利得を求め，これがプレイヤー2が拒否した場合に2期目から始まるゲームで1が得られる利得よりも大きいことを示せ。
- iii. $u_1^* \rightarrow 5$ であることを示せ。

4. 交渉ゲームの応用例：経営者と労働者の交渉

経営者と労働組合が，賃金 w と雇用者数 k について団体交渉を行う。労働組合は K 人の労働者を代表しており，各労働者はこの企業に雇用されない場合， w^0 の賃金を得ることができる。この企業は k 人の労働者を雇用した場合， $f(k)$ 単位の製品を生産することができ，製品1単位は価格 p で売れる。 $f(k)$ は以下の3つの性質を満たす。

- $f(k)$ は強い凹関数である。つまり，任意の s, t と任意の $\alpha, 0 < \alpha < 1$ ，に対して，
$$f(\alpha s + (1 - \alpha)t) > \alpha f(s) + (1 - \alpha)f(t).$$
- $f(0) = 0$.
- $pf(k) > wk$ となる $k, 1 \leq k \leq K$ が存在する。

賃金と雇用者の組 (w, k) に対して，経営者と労働組合の利得は，それぞれ

$$u_1(w, k) = pf(k) - wk, u_2(w, k) = wk + w^0(K - k)$$

で与えられる。交渉の基準点は， $(0, w^0K)$ である。

経営者と労働組合の利得の和は，

$$u_1(w, k) + u_2(w, k) = pf(k) - wk + wk + w^0(K - k) = pf(k) + w^0(K - k)$$

であるから， k の値のみに依存する。

- (a) パレート最適な，つまり経営者と労働組合の利得の和を最大にするような k が満たす条件を求め，その意味を述べよ。
- (b) ナッシュ交渉解を求め，その意味を述べよ。