

2人協力ゲーム（交渉ゲーム）

1. 2人戦略形ゲーム

$$(N = \{1, 2\}, (S_1 = \{s_1, \dots, s_m\}, S_2 = \{t_1, \dots, t_n\}), (g_1, g_2))$$

$$g_1(s_i, t_j) = a_{ij}, g_2(s_i, t_j) = b_{ij}$$

(a) 相関（混合）戦略

$$r = (r_{11}, \dots, r_{mn}), \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n r_{ij} = 1, r_{ij} \geq 0, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$$

r_{ij} : 戦略の組 (s_i, t_j) をとる確率

(b) 期待利得

$$u_1 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} r_{ij}, u_2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n b_{ij} r_{ij}$$

(c) 実現可能集合

$$R = \{u = (u_1, u_2) | u_1 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} r_{ij}, u_2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n b_{ij} r_{ij}\}$$

(d) 交渉の基準点

$$u^0 = (u_1^0, u_2^0)$$

マックスミニ値, ミニマックス値, ナッシュ均衡

2. 交渉問題 (R, u^0)

(a) R は $\mathbb{R}^2$ (2次元ユークリッド空間) におけるコンパクト (有界かつ閉) で凸な集合

(b) $u^0 \in R$

(c) $u_1 > u_1^0, u_2 > u_2^0$ となる $u = (u_1, u_2)$ が存在する.

交渉問題の全体を $\mathcal{B}$ で表す.

- R が凸 $\Leftrightarrow$ 任意の $u, v \in R$ と任意の $\alpha (0 \leq \alpha \leq 1)$ に対して $\alpha u + (1 - \alpha)v \in R$
- R が有界 $\Leftrightarrow$ ある $M \in \mathbb{R}_+$ が存在して, すべての $u = (u_1, u_2) \in R$ に対して $-M \leq u_1, u_2 \leq M$
- R が閉 $\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} u^n \rightarrow u, u^n \in R \forall i = 1, 2, \dots$, となる点列 $\{u^n\}_{n=1,2,\dots}$ に対して, $u \in R$

3. ナッシュ交渉解

次の4つの性質を満たす関数 $f : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^2$

(a) パレート最適性

任意の $(R, u^0) \in \mathcal{B}$ に対して,

$f(R, u^0) = (f(R, u^0)_1, f(R, u^0)_2)$ は R において (強) パレート最適でなければならない.

((強) パレート最適性の定義)

$u = (u_1, u_2)$ が R において (強) パレート最適 $\Leftrightarrow$

もし $u'_1 \geq u_1, u'_2 \geq u_2, u' \in R$ であれば, $u' = u$

(b) 対称性

$(R, u^0) \in \mathcal{B}$ が対称であれば, $f(R, u^0)_1 = f(R, u^0)_2$

(対称性の定義)

$(R, u^0) \in \mathcal{B}$ が対称 $\Leftrightarrow$

(1) $(u_1, u_2) \in R$ ならば $(u_2, u_1) \in R$

(2) $u_1^0 = u_2^0$

(c) 利得の正アフィン変換からの独立性

任意の $(R, u^0) \in \mathcal{B}$ に対して, 実数 $\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0, \beta_1, \beta_2$ をとり, 交渉問題 (R', u'^0) を次のように定義する.

$$R' = \{u' = (u'_1, u'_2) | u'_1 = \alpha_1 u_1 + \beta_1, u'_2 = \alpha_2 u_2 + \beta_2, u = (u_1, u_2) \in R\}$$

$$u'^0_1 = \alpha_1 u^0_1 + \beta_1,$$

$$u'^0_2 = \alpha_2 u^0_2 + \beta_2$$

このとき,

$$f(R', u'^0)_1 = \alpha_1 f(R, u^0)_1 + \beta_1,$$

$$f(R', u'^0)_2 = \alpha_2 f(R, u^0)_2 + \beta_2$$

(d) 無関係な結果からの独立性

任意の $(R, u^0) \in \mathcal{B}$ と, $f(R, u^0) \in T, u^0 \in T$ となる任意の $T \subseteq R$ に対して,

$$f(T, u^0) = f(R, u^0)$$

4. ナッシュ交渉解の存在定理

上の4つの性質を満たす関数 $f : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^2$ はただ一つに定まり, 各交渉問題 (R, u^0) に対して,

$$\max\{(u_1 - u^0_1)(u_2 - u^0_2) | (u_1, u_2) \in R, u_1 \geq u^0_1, u_2 \geq u^0_2\}$$

の最大値を実現する (u_1, u_2) を与える. (u_1, u_2) はただ一つに定まる.

このような f をナッシュ交渉解という.