和空間と共通部分の例題

K^n の部分空間とその基底: K^n の部分空間を与え, その基底を求めるには主として次の方法がある：

(1) $m\times n$ K-行列 A に対する同次連立一次方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ の解空間 $W_A=\{\boldsymbol{x}\in K^n \mid A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\}$.
その基底は基本解 $\boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{x}_{n-r}$, $r=\operatorname{rank}A$.

(2) $\boldsymbol{b}_1,\dots,\boldsymbol{b}_k\in K^n$ の生成する部分空間 $\langle\boldsymbol{b}_1,\dots,\boldsymbol{b}_k\rangle$. ($B=[\boldsymbol{b}_1,\cdots,\boldsymbol{b}_k]$ として $\langle B\rangle$ と表す事にする.)
その基底は B の軸列を全て取り出したもの. (B を階段行列に変形したときの「段」に当る列.)

いずれも A,B を階段行列に変形することにより求められる.

I. 共通部分 1 (2 つの解空間): $m\times n$ K-行列 A と $\ell\times n$ K-行列 A' に対し, $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ の解空間 W_A と $A'\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ の解空間 $W_{A'}$ の共通部分はこれらを連立させた方程式の解空間, 即ち

$$W_A\cap W_{A'}=\left\{\boldsymbol{x}\in K^n \;\middle|\; \begin{bmatrix}A\\A'\end{bmatrix}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\right\}$$

なので, この基底として連立させた方程式の基本解が取れる. 特に, A や $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ を行分割すれば

$$A=\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}^1\\ \vdots\\ \boldsymbol{a}^m\end{bmatrix},\quad A\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}^1\boldsymbol{x}\\ \vdots\\ \boldsymbol{a}^m\boldsymbol{x}\end{bmatrix},\quad A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\iff\begin{cases}\boldsymbol{a}^1\boldsymbol{x}=a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=0\\ \qquad\vdots\\ \boldsymbol{a}^m\boldsymbol{x}=a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n=0\end{cases}$$

であり, W_A は $\boldsymbol{a}^i\boldsymbol{x}=0$ の解空間 $W_{\boldsymbol{a}^i}=\{\boldsymbol{x}\in K^n|\boldsymbol{a}^i\boldsymbol{x}=0\}$ $(i=1,\dots,m)$ の共通部分になる. 即ち,

$$W_A=W_{\boldsymbol{a}^1}\cap\cdots\cap W_{\boldsymbol{a}^m}=\textstyle\bigcap_{i=1}^m\{\boldsymbol{x}\in K^n|\boldsymbol{a}^i\boldsymbol{x}=0\}$$

II. $\langle B\rangle,\langle B'\rangle$ の和空間: 部分空間 W_1,W_2 に生成系 (基底) $B=[\boldsymbol{b}_1\cdots\boldsymbol{b}_k]$, $B'=[\boldsymbol{b}'_1\cdots\boldsymbol{b}'_\ell]$ が与えられている場合: このとき, これらを合わせたものが和空間 W_1+W_2 の生成系になる. 即ち

$$W_1=\langle B\rangle=\langle\boldsymbol{b}_1,\dots,\boldsymbol{b}_k\rangle,\ W_2=\langle B'\rangle=\langle\boldsymbol{b}'_1,\dots,\boldsymbol{b}'_\ell\rangle\quad\text{のとき,}$$
$$W_1+W_2=\langle B,B'\rangle=\langle\boldsymbol{b}_1,\dots,\boldsymbol{b}_k,\ \boldsymbol{b}'_1,\dots,\boldsymbol{b}'_\ell\rangle$$

この基底は行列 $[B,B']=[\boldsymbol{b}_1\cdots\boldsymbol{b}_k\ \boldsymbol{b}'_1\cdots\boldsymbol{b}'_\ell]$ を階段行列に変形すれば求まる.

- W_1,W_2 の一方あるいは両方が同次方程式の解空間として与えられているときに和空間の基底を求めるには, 方程式を解いて基本解 (=基底) を求めてから上記 II の方法で求められる.

例題 1 次の $\mathbb{R}^3$ の部分空間 W_1,W_2 およびこれらの共通部分と和空間の基底と次元を求めよ.

$$W_1=\left\{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\;\middle|\;x_1-x_2=0\right\},\qquad W_2=\left\{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\;\middle|\;x_1+x_2+2x_3=0\right\}$$

解 これらの基底としてこれらの方程式の基本解が取れるので,

$$W_1=\left\langle\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\rangle\left(\text{基底は}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right),\ \dim W_1=2,\quad W_2=\left\langle\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-2\\0\\1\end{bmatrix}\right\rangle\left(\text{基底は}\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-2\\0\\1\end{bmatrix}\right),\ \dim W_2=2$$

共通部分 $W_1\cap W_2$ は連立させた方程式の解空間 W_A であり, 基底として基本解が取れるので

$$\begin{cases}x_1-x_2=0\\x_1+x_2+2x_3=0\end{cases}\qquad\left(A=\begin{bmatrix}1&-1&0\\1&1&2\end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}\right)\text{ より, 基底は }{}^t[-1\ -1\ 1].\quad\dim W_A=1.$$

和空間の基底としては軸列をとれば良いので

$$\begin{bmatrix}1&0&-1&-2\\1&0&1&0\\0&1&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{階段行列}}\begin{bmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\end{bmatrix}\quad\text{より}\quad\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}\right\}\quad(\text{第 1,2,3 列が軸列.})$$

例 1 (次の III,IV の為の例) 例題 1 の $W_1,W_2,W_1\cap W_2$ の基底を $B_1=[\boldsymbol{b}_1\,\boldsymbol{b}_2]$, $B_2=[\boldsymbol{b}'_1\,\boldsymbol{b}'_2]$, $C=[\boldsymbol{c}]$ とする.

III. 例題 1 の W_2, $W_1\cap W_2$ の基底から W_2, $W_1\cap W_2$ を与える方程式を求める:
これらの基底 B_2,C の行列の転置行列 ${}^tB_2,{}^tC$ を係数行列とする方程式の基本解をそれぞれ求めると:

$$W_2:{}^tB_2=\begin{bmatrix}-1&1&0\\-2&0&1\end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix}1&0&-1/2\\0&1&-1/2\end{bmatrix}\text{ より基本解は }{}^t[1/2,\,1/2,1].$$

この転置行列を係数行列とする方程式は $1/2x_1+1/2x_2+x_3=0$. (W_2 の方程式の 1/2 倍.)

$$W_1\cap W_2:{}^tC=[-1\ -1\ 1]\mapsto[1\ 1\ -1]\text{ より基本解は }{}^t[-1,\,1,0],\ {}^t[1,\,0,1]$$

この基本解の転置行列を係数行列とする方程式は $\begin{cases}-x_1+x_2=0\\x_1+\quad x_3=0\end{cases}$, $A=\begin{bmatrix}-1&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}$

この係数行列 A の階段行列は元の方程式の係数行列の階段行列と一致し, 基底 $\boldsymbol{c}$ を与える事が分かる.

IV. 和空間の基底を求めたときの行列 $[B_1,B_2]=[\boldsymbol{b}_1\,\boldsymbol{b}_2\,\boldsymbol{b}'_1\,\boldsymbol{b}'_2]$ の階段行列の軸列でない列 (第 4 列 ${}^t[-1,\,1\,1]$) から

$$\boldsymbol{b}'_2=-\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_2+\boldsymbol{b}'_1.\quad\therefore\ \boldsymbol{b}'_2-\boldsymbol{b}'_1=-\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_2={}^t[-1\ -1\ 1]\ (=\boldsymbol{c})$$

により共通部分 $W_1\cap W_2$ の基底 $\boldsymbol{c}$ が得られる.

III. 共通部分 2 (W_1, W_2 の一方あるいは両方が生成系で与えられている場合): W に生成系 B が与えられているとき, $W = W_A = \{\boldsymbol{x} \in K^n \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$ となる方程式の係数行列 A は, 次の様に ${}^tB\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の基本解 $X = [\boldsymbol{x}_1 \cdots \boldsymbol{x}_m]$ の転置行列 ${}^tX = A$ になるので, I に帰着させることが出来る.

• $B = [\boldsymbol{b}_1 \cdots \boldsymbol{b}_k]$ が満たすべき方程式の係数を $\boldsymbol{a} = [a_1 \cdots a_n]$ とする．即ち，各 $\boldsymbol{b}_j = {}^t[b_{1j} \ \cdots \ b_{nj}]$ が方程式 $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$ の解になるとして $\boldsymbol{a}$ を求める事を考える．このとき，$\boldsymbol{b}_j$ は $0 = a_1b_{1j} + \cdots + a_nb_{nj} = \boldsymbol{a}\boldsymbol{b}_j$ を満たす．従って,

$$ {}^t\boldsymbol{0} = [0 \cdots 0] = [\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}_1 \cdots \boldsymbol{a}\boldsymbol{b}_k] = \boldsymbol{a}[\boldsymbol{b}_1 \cdots \boldsymbol{b}_k] = \boldsymbol{a}B $$

即ち，$\boldsymbol{a}$ は方程式 ${}^t\boldsymbol{x}B = {}^t\boldsymbol{0}$ の解．これを解けばよいが，転置を取れば $({}^tB)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ なので，(慣れている）こちらを解いてから もう一度転置を取れば $\boldsymbol{a}$ が求まる． このとき $({}^tB)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の 基本解の作る行列 $X = [\boldsymbol{x}_1 \cdots \boldsymbol{x}_m]$ の転置行列 A が求める方程式の係数行列になる，即ち次が成り立つ.

補題 1 $B = [\boldsymbol{b}_1 \cdots \boldsymbol{b}_k]$ ($n \times k$ 行列) とし, B の生成する K^n の部分空間を $W = \langle \boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_k \rangle$, とするとき，$({}^tB)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の基本解を $X = [\boldsymbol{x}_1, \ \ldots, \ \boldsymbol{x}_m]$, $A = {}^tX$ とすれば $W = W_A = \{\boldsymbol{x} \in K^n \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$ が成り立つ.

(∵) $({}^tB)({}^tA) = ({}^tB)X = [({}^tB)\boldsymbol{x}_1 \cdots ({}^tB)\boldsymbol{x}_m] = [\boldsymbol{0} \cdots \boldsymbol{0}] = O_{km}$ より両辺の転置を取れば
$AB = [A\boldsymbol{b}_1 \cdots A\boldsymbol{b}_k] = O_{mk}$ ∴ $A\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{0}, \ \ldots, \ A\boldsymbol{b}_k = \boldsymbol{0}$. 従って， $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_k$ は $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解，即ち，$W = \langle \boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_k \rangle \subset W_A$. $\{\boldsymbol{x}_1, \ \ldots, \ \boldsymbol{x}_m\}$ は基本解なので一次独立，よって $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} {}^tA = \operatorname{rank} [\boldsymbol{x}_1, \ \ldots, \ \boldsymbol{x}_m] = m$ であり，方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解空間 W_A の次元は $n - \operatorname{rank} A = n - m = n - (n - \operatorname{rank} B) = \operatorname{rank} B$，即ち，$\dim\langle B \rangle = \operatorname{rank} B = \dim W_A$. よって [4.6](2)* より $W = \langle B \rangle = W_A$ となる.

IV. 共通部分 3 (両方が基底で与えられている場合): $B = [\boldsymbol{b}_1 \cdots \boldsymbol{b}_k]$, $B' = [\boldsymbol{b}'_1 \cdots \boldsymbol{b}'_\ell]$ を W_1, W_2 の**基底**とする.
$\boldsymbol{v} \in W_1 \cap W_2$ は $\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^k \boldsymbol{b}_i x_i = \sum_{i=1}^\ell \boldsymbol{b}'_i y_i$ と表されるので，$\boldsymbol{x} = {}^t[x_1 \cdots x_k]$, $\boldsymbol{y} = {}^t[y_1 \cdots y_\ell]$ とすると

$$ \boldsymbol{0} = \sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{b}_i x_i - \sum_{i=1}^{\ell} \boldsymbol{b}'_i y_i = B\boldsymbol{x} - B'\boldsymbol{y} = [B, B'] \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ -\boldsymbol{y} \end{bmatrix} = [B, B']\boldsymbol{z}, \quad \boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ -\boldsymbol{y} \end{bmatrix} $$

これにより, $W_1 \cap W_2$ の基底が方程式 $[B, B']\boldsymbol{z} = \boldsymbol{0}$ の基本解, あるいは $[B, B']$ の階段行列を用いて構成できる.
即ち, $[B, B']\boldsymbol{z} = \boldsymbol{0}$ の基本解を $\boldsymbol{z}_1, \ldots, \boldsymbol{z}_s$ とするとき, これらを $\boldsymbol{z}_1 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ -\boldsymbol{y}_1 \end{bmatrix}, \ldots, \boldsymbol{z}_s = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_s \\ -\boldsymbol{y}_s \end{bmatrix}$ と分け, 移項して $\boldsymbol{c}_1 = B'\boldsymbol{y}_1 = B\boldsymbol{x}_1, \ \ldots, \ \boldsymbol{c}_s = B'\boldsymbol{y}_s = B\boldsymbol{x}_s$ を計算で求めれば $\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_s$ が共通部分の基底になる.
あるいは, $[B, B']$ の階段行列の軸列でない列 ($k + i_1, \ldots, k + i_s$ 列) を係数, ($s = k + \ell - \operatorname{rank}[B, B']$) として,

$$ \boldsymbol{b}'_{i_1} = \sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{b}_i x_i - \sum_{j=1}^{i_1 - 1} \boldsymbol{b}'_j y_j, \ldots, \boldsymbol{b}'_{i_s} = \sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{b}_i x_i - \sum_{j=1}^{i_s - 1} \boldsymbol{b}'_j y_j \ . \quad \boldsymbol{c}_1 = \boldsymbol{b}'_{i_1} + \sum_{j=1}^{i_1 - 1} \boldsymbol{b}'_j y_j, \ldots, \boldsymbol{c}_s = \boldsymbol{b}'_{i_s} + \sum_{j=1}^{i_s - 1} \boldsymbol{b}'_j y_j $$

より基底 $\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_s$ が求まる. これらは次の補題により基底になることが分かる.

補題 2 上のとき (B' が基底なら) $C = [\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_s]$ は共通部分 $W_1 \cap W_2$ の基底になる.
(∵) 和空間の次元定理 [4.7] により $\dim(W_1 \cap W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 + W_2) = k + \ell - \operatorname{rank}[B, B'] = s$ なので, $\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_s$ (s 個) が一次独立なら基底になる． B' は W_2 の基底 (=一次独立) であり, これらは

$$ \boldsymbol{c}_t = \boldsymbol{b}'_{i_t} + \sum_{j=1}^{i_t - 1} \boldsymbol{b}'_j y_j \ \in W_2 \quad (t = 1, \ldots, s) \quad \text{(第 2 項の和は } i_t - 1 \text{ 迄の和)} $$

と表せていて, $\boldsymbol{c}_t$ は $\boldsymbol{b}'_{i_t}$ を含み, $\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_{t-1}$ は $\boldsymbol{b}'_{i_t}$ を含まないので, $\boldsymbol{c}_t$ は $\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_{t-1}$ の一次結合で表せない. よって帰納的に $C = [\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_s]$ は一次独立になる. 従って C は $W_1 \cap W_2$ の基底になる.
(注) 左の B の方は生成系でも良い. 階段行列を作れば B の基底にならないベクトルを判別出来るからである. 一方, 右の B' が基底 (一次独立) でなければ, 得られた $\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_s$ から一次独立な最大の組を選び出す必要がある.

例 2 次の $\mathbb{R}^3$ の部分空間 W_1, W_2 の共通部分 $W_3 = W_1 \cap W_2$ の基底 C を求める:

$$ W_1 = \langle B_1 \rangle, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = [\boldsymbol{b}_1 \, \boldsymbol{b}_2 \, \boldsymbol{b}_3], \qquad W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \middle| \ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \right\}, \ A_2 = [1, 1, 2] $$

方法 III:

$$ {}^tB_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \ \therefore \ A_1 = [-1, -1, 1]. \ \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ \therefore \ C = [\boldsymbol{c}_1] = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}. $$

方法 IV:

$$ W_2 = \langle B_2 \rangle, B_2 = [\boldsymbol{b}'_1, \boldsymbol{b}'_2] = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \ [B_1, B_2] = \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]. \ \therefore \ \boldsymbol{b}'_1 = \boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{c}_1 $$

尚，$[B_1, B_2]$ の階段行列より $\boldsymbol{b}_3 = 3\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_2$, ∴ B_1 は一次従属. また, $[B_2, B_1]$ の階段行列を求めると:

$$ [B_2, B_1] = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ より } \begin{cases} \boldsymbol{b}_2 = -\boldsymbol{b}'_1 + \boldsymbol{b}_1 \\ \boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{b}'_1 + \boldsymbol{b}'_2 + 2\boldsymbol{b}_1 \end{cases} \begin{cases} \boldsymbol{c}_2 := \boldsymbol{b}_2 - \boldsymbol{b}_1 = -\boldsymbol{b}'_1 \\ \boldsymbol{c}_3 := \boldsymbol{b}_3 - 2\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{b}'_1 + \boldsymbol{b}'_2 \end{cases} \boldsymbol{c}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{c}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} $$

∴ $\boldsymbol{c}_3 = -\boldsymbol{c}_2$ となり, 右の B_1 が一次従属なら $[\boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_3]$ も一次従属となることがが分る.