クールノーの複占市場 （生産量競争）（繰り返し）

企業 A　　費用関数　　cx （x は企業Aの生産量）

企業 B　　費用関数　　cy （y は企業Bの生産量）

企業A, Bは<u>同質財</u>を生産し，それぞれの生産量 x, y を決定

（逆）需要関数　　$p = \max(a - (x + y), 0)$　　<u>$a > c$</u> を仮定

利潤：　企業 A　$f(x, y) = (a - (x + y))x - cx$　　if $x + y \leq a$

$- cx$　　if $x + y > a$

企業 B　$g(x, y) = (a - (x + y))y - cy$　　if $x + y \leq a$

$- cy$　　if $x + y > a$

クールノー・ナッシュ均衡と生産量調整の場合の比較

複占の場合

クールノー・ナッシュ均衡における

各企業の生産量　$(a-c)/3$　$(= q_{NE})$

各企業の利潤　$(a-c)^2/9$

生産量を調整した場合（独占）

各企業の生産量　$(a-c)/4$　$(= q_{max})$

各企業の利潤　$(a-c)^2/8$

トリガー戦略

トリガー戦略

１回目は「q_{max}」,

２回目以降は,

それまで自分も相手も「 q_{max} 」をとり続けていれば「 q_{max} 」,
そうでなければ「q_{NE}」

<u>割引因子 δ が十分に大きければ</u>,

（トリガー戦略, トリガー戦略）は

無限回繰り返しにおける<u>部分ゲーム完全均衡</u>

証明 （1／4）

① 任意の部分ゲームにおいてナッシュ均衡となっていること

t 回目から始まる部分ゲーム

（1） それまでにどちらかが「q_{max}」以外をとっている場合

「トリガー」に従えば，相手は「q_{NE}」をとり続ける

→ 「トリガー」に従って「q_{NE}」をとり続けるのが最適反応

（<u>注意</u>： (q_{NE}, q_{NE}) は各回のゲームのナッシュ均衡）

証明（2／4）

（2）それまでどちらも「q_{max}」をとりつづけている場合

相手は「トリガー」に従っているので，

こちらが「q_{max}」をとるかぎり「q_{max}」をとる

こちらが「q_{max}」以外の生産量をとれば，その後は「q_{NE}」をとり続ける

自分の利得	1	・・・	t－1	t	・・・	s	s + 1 ・・・
「トリガー」に従った場合	$(a-c)^2/8$	・・・	$(a-c)^2/8$	$(a-c)^2/8$	・・・	$(a-c)^2/8$	$(a-c)^2/8$ ・・・
s 回目に逸脱した場合							
（相手の生産量	q_{max}	・・・	q_{max}	q_{max}		q_{max}	q_{NE} ・・・
	$(a-c)^2/8$	・・・	$(a-c)^2/8$	$(a-c)^2/8$	・・・	?	?

q_{max} に対する最適反応：$x = (a-c-y)/2 = (a-c-(a-c)/4)/2 = 3(a-c)/8$

利潤：$(a-((a-c)/4+3(a-c)/8)-c) \times 3(a-c)/8 = 9/64(a-c)^2$

q_{NE} に対する最適反応：$q_{NE} = (a-c)/3$

利潤：$(a-c)^2/9$

証明（3／4）

（2）それまでどちらも「q_{max}」をとりつづけている場合

自分の利得　1 ・・・　t－1　t　・・・　s　s＋1 ・・・

「トリガー」に従った場合

$(a-c)^2/8$ ・・・ $(a-c)^2/8$　$(a-c)^2/8$ ・・・ $(a-c)^2/8$　$(a-c)^2/8$ ・・・

s 回目に逸脱した場合

（相手の生産量 q_{max} ・・・ q_{max}　q_{max}　q_{max}　q_{NE} ・・・

$(a-c)^2/8$ ・・・ $(a-c)^2/8$　$(a-c)^2/8$ ・・ $9/64(a-c)^2$　$(a-c)^2/9$?

「トリガー」に従った場合：

$$(1-\delta)((a-c)^2/8+\delta(a-c)^2/8+\cdots\delta^{s-2}(a-c)^2/8$$
$$+\delta^{s-1}(a-c)^2/8+\delta^{s}(a-c)^2/8+\cdots)$$

s 回目に逸脱して「q_{max}」に対する最適反応をとった場合

$$(1-\delta)((a-c)^2/8+\delta(a-c)^2/8+\cdots\delta^{s-2}(a-c)^2/8$$
$$+\delta^{s-1}9/64(a-c)^2+\delta^{s}(a-c)^2/9+\cdots)$$

証明 （4／4）

「トリガーに従う」 － 「s 回目に逸脱」

$$= (1-\delta)(\delta^{s-1}(-(a-c)^2/64) + \delta^s((a-c)^2 72) + \delta^{s+1}((a-c)^2 72) + \cdots)$$

$$= (1-\delta)\delta^{s-1}(a-c)^2(-1/64 + (\delta + \delta^2 + \delta^3 + \cdots)/72)$$

$$= (1-\delta)\ \delta^{s-1}(a-c)^2(-1/64 + \delta/72(1-\delta)) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \delta \geq 9/17$$

$\delta \geq 9/17$ であれば

（トリガー, トリガー）は任意の部分ゲームにおいてナッシュ均衡

② 全体のゲームでナッシュ均衡となっていること

上の後半の証明と同様にして,

$\delta \geq 9/17$ であれば,（トリガー, トリガー）はナッシュ均衡となる

クールノーの複占市場（生産量競争）（不完備情報）

企業 A　費用関数　$c_A x$（x は企業Aの生産量）

企業 B　費用関数　$c_B y$（y は企業Bの生産量）

企業A, Bは<u>同質財</u>を生産し，それぞれの生産量 x, y を決定

（逆）需要関数　$p = \max(a - (x + y), 0)$　<u>$a > c$</u> を仮定

利潤：　企業 A　$f(x, y) = (a - (x + y))x - c_A x$　if $x + y \le a$

$- c_A x$　if $x + y > a$

企業 B　$g(x, y) = (a - (x + y))y - c_B y$　if $x + y \le a$

$- c_B y$　if $x + y > a$

クールノー・ナッシュ均衡

$c_A = c_B$ の場合

クールノー・ナッシュ均衡における

各企業の生産量　$(a-c)/3$

各企業の利潤　$(a-c)^2/9$

$c_A < c_B$ の場合

クールノー・ナッシュ均衡における各企業の生産量，利潤

$c_B \leq (a+c_A)/2$のとき　生産量　A: $(a-2c_A+c_B)/3$,　B: $(a-2c_B+c_A)/3$

利潤　A: $(a-2c_A+c_B)^2/9$,　B: $(a-2c_B+c_A)^2/9$

$c_B > (a+c_A)/2$のとき　生産量　A: $(a-c_A)/2$,　B: 0

利潤　A: $(a-c_A)^2/4$,　B: 0

不完備情報複占市場

A の費用関数: cx

B の費用関数: 確率1/2 で $c_L y$, 確率1/2 で $c_H y$ $(c_L < c < c_H)$ コモンノリッジ

参考: 完備情報の場合

cx と $c_H y$ のとき

クールノー・ナッシュ均衡における各企業の生産量, 利潤

$c_H \leq (a+c)/2$ のとき 生産量 A: $(a-2c+c_H)/3$, B: $(a-2c_H+c)/3$

利潤 A: $(a-2c+c_H)^2/9$, B: $(a-2c_H+c)^2/9$

$c_H > (a+c)/2$ のとき 生産量 A: $(a-c)/2$, B: 0

利潤 A: $(a-c)^2/4$, B: 0

cx と $c_L y$ のとき

クールノー・ナッシュ均衡における各企業の生産量, 利潤

$c \leq (a+c_L)/2$ のとき 生産量 A: $(a-2c+c_L)/3$, B: $(a-2c_L+c)/3$

利潤 A: $(a-2c+c_L)^2/9$, B: $(a-2c_L+c)^2/9$

$c > (a+c_L)/2$ のとき 生産量 A: 0, B: $(a-c_L)/2$

利潤 A: 0, B: $(a-c_L)^2/9$

不完備情報複占市場

A の費用関数: cx　　コモンノリッジ

B の費用関数: 確率1/2 で $c_L y$（タイプ1）

確率1/2 で $c_H y$（タイプ2）　$(c_L < c < c_H)$

不完備情報の下での分析

A の生産量: x,　B の生産量: y_L, y_H

A の利潤: $(a-x-y_L-c)x/2 + (a-x-y_H-c)x/2$

B（タイプ1）の利潤: $(a-x-y_L-c_L)y_L$

B（タイプ2）の利潤: $(a-x-y_H-c_H)y_H$

A ： $x^* = (2a-2c-y_L^*-y_H^*)/4$

B（タイプ1）: $y_L^* = (a-x^*-c_L)/2$, B（タイプ2）: $y_H^*=(a-x^*-c_H)/2$

→ $x^* = (a-2c+c_L/2+c_H/2)/3$,

$y_L^* = (a-2c_L+c)/3 - (c_H-c_L)/12$,　$y_H^* = (a-2c_H+c)/3 - (c_H-c_L)/12$

不完備情報複占市場

A の費用関数: cx コモンノリッジ

B の費用関数: 確率1/2 で $c_L y$（タイプ1）

確率1/2 で $c_H y$（タイプ2） $(c_L < c < c_H)$

$x^* = (a-2c+c_L/2+c_H/2)/3,$

$y_L^* = (a-2c_L+c)/3 - (c_H-c_L)/12, \quad y_H^* = (a-2c_H+c)/3 + (c_H-c_L)/12$

A と B（タイプ1）（完備情報のとき）: $x^* = (a-2c+c_L)/3, \quad y_L^* = (a-2c_L+c)/3$

B: 費用 c_L ↓ → B の生産量 ↑, A の生産量減↓

不完備情報の場合: A → 完備情報の時に比べ増

B（タイプ1） → 完備情報のときに比べ減

A と B（タイプ2）（完備情報のとき）: $x^* = (a-2c+c_H)/3, \quad y_H^* = (a-2c_H+c)/3$

B: 費用 c_H ↓ → B の生産量 ↑, A の生産量減↓

不完備情報の場合: A → 完備情報の時に比べ減

B（タイプ2） → 完備情報のときに比べ増