配布資料３： ２人ゼロ和ゲームにおける定義と性質

1. マックスミニ戦略

- プレイヤー１について
  - 戦略 s_i^1 の保証水準 $\iff min_{j=1,\dots,n} a_{ij}^1$
  - 戦略 $s_{\hat{i}}^1$ が１のマックスミニ戦略

$$\iff min_{j=1,\dots,n} a_{\hat{i}j}^1 = max_{i=1,\dots,m}(min_{j=1,\dots,n} a_{ij}^1)$$

  - $min_{j=1,\dots,n} a_{\hat{i}j}^1$: １のマックスミニ値
- プレイヤー２について
  - 戦略 s_j^2 の保証水準 $\iff min_{i=1,\dots,m} a_{ij}^2$
  - 戦略 $s_{\hat{j}}^2$ が２のマックスミニ戦略

$$\iff min_{i=1,\dots,m} a_{i\hat{j}}^2 = max_{j=1,\dots,n}(min_{i=1,\dots,m} a_{ij}^2)$$

  - $min_{i=1,\dots,m} a_{i\hat{j}}^2$: ２のマックスミニ値

2. 混合戦略まで考えたマックスミニ戦略

- プレイヤー１について
  - 戦略 p^1 の保証水準 $\iff min_{p^2 \in \Pi^2} E^1(p^1, p^2)$
  - 戦略 $\hat{p}^1$ が（混合戦略まで考えたときの）１のマックスミニ戦略

$$\iff min_{p^2 \in \Pi^2} E^1(\hat{p}^1, p^2) = max_{p^1 \in \Pi^1}(min_{p^2 \in \Pi^2} E^1(p^1, p^2))$$

  - $min_{p^2 \in \Pi^2} E^1(\hat{p}^1, p^2)$: （混合戦略まで考えたときの）１のマックスミニ値
- プレイヤー２について
  - 戦略 p^2 の保証水準 $\iff min_{p^1 \in \Pi^1} E^2(p^1, p^2)$
  - 戦略 $\hat{p}^2$ が（混合戦略まで考えたときの）２のマックスミニ戦略

$$\iff min_{p^1 \in \Pi^1} E^2(p^1, \hat{p}^2) = max_{p^2 \in \Pi^2}(min_{p^1 \in \Pi^1} E^2(p^1, p^2))$$

  - $min_{p^1 \in \Pi^1} E^2(p^1, \hat{p}^2)$: （混合戦略まで考えたときの）２のマックスミニ値

3. ２人定和ゲーム
   $a_{ij}^1 + a_{ij}^2 = c \;\; \forall i = 1, ..., m, \; \forall j = 1, ..., n$

- $c = 0 \Rightarrow$ ゼロ和ゲーム（定和ゲームとゼロ和ゲームは数学的に同等）
- 定和ゲームにおいては，２の利得 $a_{ij}^2 = c - a_{ij}^1$ ゆえ，
  利得行列は１の利得のみで表現できる $\Rightarrow$ 行列ゲーム
- 混合戦略まで考えた場合も $E^1(p^1, p^2) + E^2(p^1, p^2) = c$ が成り立つ

4. 定和ゲームにおけるマックスミニ戦略（ゼロ和ゲームで説明する）

- 純粋戦略の場合
  - $a^2_{ij} = -a^1_{ij}$ ゆえ，$min_{i=1,...,m}a^2_{ij} = -max_{i=1,...,m}a^1_{ij}$
  - 従って，戦略 $s^2_{\hat{j}}$ が２のマックスミニ戦略

$$\iff min_{i=1,...,m}a^2_{i\hat{j}} = max_{j=1,...,n}(min_{i=1,...,m}a^2_{ij})$$
$$\iff -max_{i=1,...,m}a^1_{i\hat{j}} = -min_{j=1,...,n}(max_{i=1,...,m}a^1_{ij})$$
$$\iff max_{i=1,...,m}a^1_{i\hat{j}} = min_{j=1,...,n}(max_{i=1,...,m}a^1_{ij})$$

$\Rightarrow$ （１の利得に関する）ミニマックス戦略

  - $max_{i=1,...,m}a^1_{i\hat{j}}(= -min_{i=1,...,m}a^2_{i\hat{j}})$ を（１の利得に関する）ミニマックス値という.

- 混合戦略まで考えた場合
  - $a^2_{ij} = -a^1_{ij}$ ゆえ，$min_{p^1\in\Pi^1}E^2(p^1,p^2) = -max_{p^1\in\Pi^1}E^1(p^1,p^2)$
  - 従って，戦略 $\hat{p}^2$ が（混合戦略まで考えたときの）２のマックスミニ戦略

$$\iff min_{p^1\in\Pi^1}E^2(p^1,\hat{p}^2) = max_{p^2\in\Pi^2}(min_{p^1\in\Pi^1}E^2(p^1,p^2))$$
$$\iff -max_{p^1\in\Pi^1}E^1(p^1,\hat{p}^2) = -min_{p^2\in\Pi^2}(max_{p^1\in\Pi^1}E^1(p^1,p^2))$$
$$\iff max_{p^1\in\Pi^1}E^1(p^1,\hat{p}^2) = min_{p^2\in\Pi^2}(max_{p^1\in\Pi^1}E^1(p^1,p^2))$$

$\Rightarrow$ （混合戦略まで考えたときの）ミニマックス戦略

  - $max_{p^1\in\Pi^1}E^1(p^1,\hat{p}^2)(= -min_{p^1\in\Pi^1}E^2(p^1,\hat{p}^2))$ を（混合戦略まで考えたときの）ミニマックス値という.

5. マックスミニ戦略とナッシュ均衡

２人ゼロ和ゲームにおいては以下が成り立つ.

(a) $max_{i=1,...,m}(min_{j=1,...,n}a^1_{ij}) \le min_{j=1,...,n}(max_{i=1,...,m}a^1_{ij})$
<u>注意</u>：「演習ゲーム理論」p.49 演習問題 3.1

(b) $(s^1_{i^*}, s^2_{j^*})$ がナッシュ均衡であるとき，$s^1_{i^*}, s^2_{j^*}$ は，それぞれプレイヤー１，２のマックスミニ戦略である.
<u>証明</u>：$(s^1_{i^*}, s^2_{j^*})$ がナッシュ均衡であるから，
(1) $a^1_{i^*j^*} \ge a^1_{ij^*}\ \forall i = 1,...,m$
(2) $a^2_{i^*j^*} \ge a^2_{i^*j}\ \forall j = 1,...,n$
ゼロ和ゆえ，(2) は
(2')$a^1_{i^*j^*} \le a^1_{i^*j}\ \forall j = 1,...,n$
と書き直せる．(2') より，(3)$a^1_{i^*j^*} = min_{j=1,...,n}a^1_{i^*j}$
(1) より，(4)$a^1_{i^*j^*} = max_{i=1,...,m}a^1_{ij^*}$
また (1) より，$a^1_{i^*j^*} \ge a^1_{ij^*} \ge min_{j=1,...,n}a^1_{ij}\ \forall i = 1,...,m$
従って (3) とあわせ，$s^1_{i^*}$ はマックスミニ戦略であり，$a^1_{i^*j^*}$ はマックスミニ値である.
同様にして，$s^2_{j^*}$ がマックスミニ戦略であり，$a^1_{i^*j^*}$ が 2 のミニマックス値であることも導かれる.（証明終）

(c) $max_{i=1,...,m}(min_{j=1,...,n}a^1_{ij}) = min_{j=1,...,n}(max_{i=1,...,m}a^1_{ij})$ であるとする．このとき，$s^1_{\hat{i}}, s^2_{\hat{j}}$ をそれぞれ１，２のマックスミニ戦略とすれば，$(s^1_{\hat{i}}, s^2_{\hat{j}})$ はナッシュ均衡である.

証明：まず，$a^1_{\hat{i}\hat{j}} \geq min_{j=1,\ldots,n} a^1_{\hat{i}j}$ $a^1_{\hat{i}\hat{j}} \leq max_{i=1,\ldots,m} a^1_{i\hat{j}}$ が成り立つ．$s^1_{\hat{i}}, s^2_{\hat{j}}$ が 1，2 の
マックスミニ戦略であるから，
$max_{i=1,\ldots,m}(min_{j=1,\ldots,n} a^1_{ij}) = min_{j=1,\ldots,n}(max_{i=1,\ldots,m} a^1_{ij})$ より，
$min_{j=1,\ldots,n} a_{\hat{i}j} = max_{i=1,\ldots,m} a_{i\hat{j}}$ が成り立つ．
従って，
$a^1_{\hat{i},\hat{j}} = min_{j=1,\ldots,n} a_{\hat{i}j}$ ，$a^1_{\hat{i},\hat{j}} = max_{i=1,\ldots,m} a_{i\hat{j}}$
が成り立ち，$(s^1_{i^*}, s^2_{j^*})$ はナッシュ均衡である．(証明終）

注意：混合戦略まで考えたときも同様．(a) は等号で成り立つ（ミニマックス定理）

6. ２人定和ゲームにおいて，混合戦略の組 $(p^{*1}, p^{*2}), (p^{**1}, p^{**2})$ がともにナッシュ均衡であるとき，$(p^{*1}, p^{**2}), (p^{**1}, p^{*2})$ もナッシュ均衡となる。
注意：「演習ゲーム理論」p.54 演習問題 3.5