



第13回・14回講義資料

189



Chapter 9. Deflection of Beams はりのたわみ



座標軸のとり方：
たわみの記号に注意
教科書は間違えています



190

Introduction



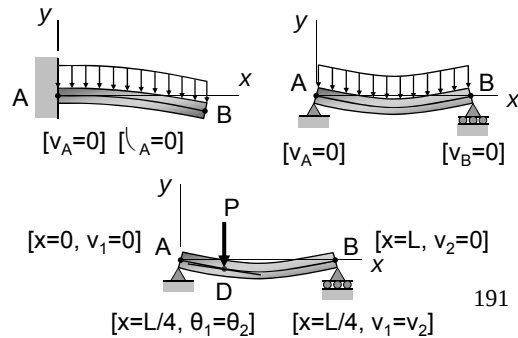
ここまでの章では強度設計にかかわることを学んできた
構造設計のもう一つの重要な事項は「変位」
はりについては「たわみ」
与えられた荷重条件での最大たわみは重要な設計項目
使用性能: 列車の走行性, 歩行者の不安感など

純曲げを受けるはりについて
中立軸位置での曲率とモーメントとの関係

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$$

鉛直荷重を受ける場合

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M(x)}{EI}$$



191

Deformation of a beam under Transverse Loading



はりが鉛直荷重を受ける場合の変形

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M(x)}{EI}$$

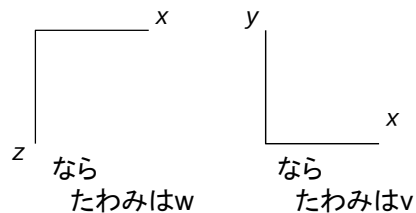
Equation of the Elastic Curve

弾性曲線

はりのたわみはyとは書かないように

はりの軸にx軸, 下向きにz軸ならたわみはw

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2 w}{dx^2}$$



192

Equation of the Elastic Curve 弾性曲線

$$EI \frac{dv}{dx} = \int_0^x M(x) dx + C_1$$

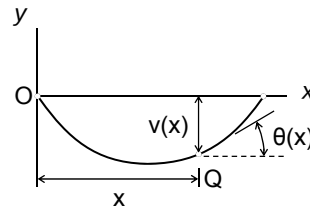
θ はたわみ角, 微小なことから

$$\frac{dv}{dx} = \tan \theta \approx \theta(x)$$

$$\therefore EI \theta(x) = \int_0^x M(x) dx + C_1$$

$$EI v = \int_0^x \left[\int_0^x M(x) dx + C_1 \right] dx + C_2$$

$$EI v = \int_0^x dx \int_0^x M(x) dx + C_1 x + C_2 \quad C_1, C_2: \text{積分定数}$$



193

Equation of the Elastic Curve 弾性曲線

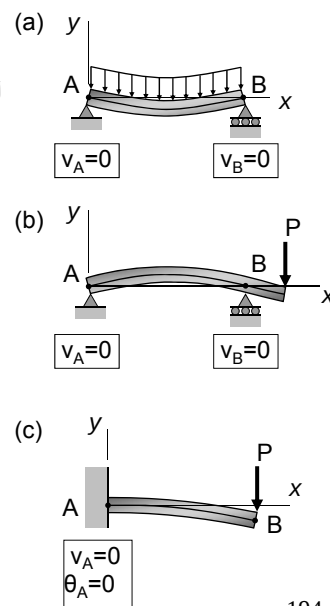
- (a) 一様分布荷重を受ける単純支持はり
- (b) 張り出しを有する単純支持はり
- (c) 片持ちはり

(a), (b)の場合

$$\begin{aligned} x=0, v=0 \\ x=L, v=0 \end{aligned} \rightarrow C_1, C_2$$

(c)の場合

$$\begin{aligned} x=0, v=0 \\ x=0, \theta=0 \end{aligned} \rightarrow C_1, C_2$$



194

Example 9.01

Fig.9.9 のたわみ曲線とA点でのたわみを求めよ

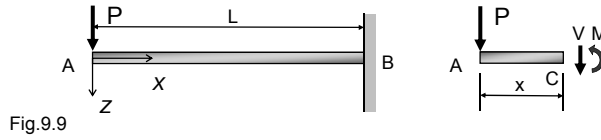


Fig.9.9

$$M + Px = 0 \quad M = -Px$$

$$EI \frac{d^2w}{dx^2} = -Px \quad EI \frac{dw}{dx} = -\frac{1}{2}Px^2 + C_1$$

$$x=L \text{ で } \theta = dw/dx = 0 \quad \therefore C_1 = \frac{1}{2}PL^2$$

$$EI \frac{dw}{dx} = -\frac{1}{2}Px^2 + \frac{1}{2}PL^2 \quad EIw = -\frac{1}{6}Px^3 + \frac{1}{2}PL^2x + C_2$$

$$x=L \text{ で } w = 0 \quad \therefore C_2 = -\frac{1}{3}PL^3$$

$$\therefore w = \frac{P}{6EI}(-x^3 + 3L^2x - 2L^3) \quad \rightarrow w_A = -\frac{PL^3}{3EI}$$

195

Example 9.02

等分布荷重を受ける単純支持はりのたわみを求めよ

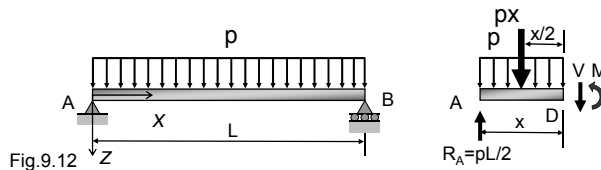


Fig.9.12

$$M = \frac{1}{2}pLx - \frac{1}{2}px^2$$

$$EI \frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{1}{2}px^2 + \frac{1}{2}pLx \quad EI \frac{dw}{dx} = -\frac{1}{6}px^3 + \frac{1}{4}pLx^2 + C_1$$

$$EIw = -\frac{1}{24}px^4 + \frac{1}{12}pLx^3 + C_1x + C_2$$

$$x=0 \text{ で } w=0, \quad x=L \text{ で } w=0 \quad \therefore C_2 = 0, \quad C_1 = -\frac{1}{24}pL^3$$

$$\therefore w = \frac{p}{24EI}(-x^4 + 2Lx^3 - L^3x) \quad \rightarrow |w|_{\max} = \frac{5pL^4}{384EI}$$

196

Direct Determination of the Elastic Curve from the Load Distribution 荷重分布とたわみ



Sec.5.3.より

$$\frac{dM}{dx} = V(x) \quad \frac{dV}{dx} = -p(x)$$

したがって

$$\frac{d^3w}{dx^3} = \frac{1}{EI} \frac{dM}{dx} = \frac{V(x)}{EI} \quad \frac{d^4w}{dx^4} = \frac{1}{EI} \frac{dV}{dx} = -\frac{p(x)}{EI}$$

$$EI \frac{d^4w}{dx^4} = -p(x)$$

$$EI \frac{d^3w}{dx^3} = -\int p(x) dx + C_1$$

⋮

$$EIw = -\int dx \int dx \int dx \int p(x) dx + \frac{1}{6} C_1 x^3 + \frac{1}{2} C_2 x^2 + C_3 x + C_4$$

積分定数は境界条件から

197

Statically Indeterminate Beams



不静定構造のはり

Fig.9.24のはり. 反力が4

つりあい式:

$$\sum F_x = 0, \sum F_z = 0, \sum M_A = 0$$

これでは解けない

変位の適合条件を考える → Fig.9.25

B点のたわみが0

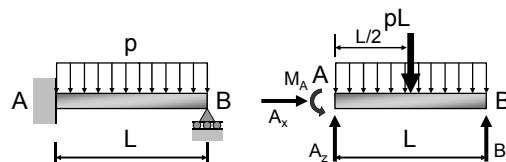


Fig.9.24

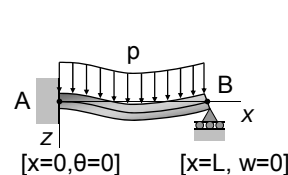


Fig.9.25

198

Example 9.05

Fig.9.24のA点, B点の反力を求めよ

つりあい式:

$$\sum F_x = 0: A_x = 0$$

$$\sum F_z = 0: A_z + B - pL = 0$$

$$\sum M_A = 0: M_A + BL - \frac{1}{2}pL^2 = 0$$

Fig.9.26のFree body diagramより

$$\sum M_C = 0: M + \frac{1}{2}px^2 + M_A - A_zx = 0$$

$$EI \frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{1}{2}px^2 + A_zx - M_A$$

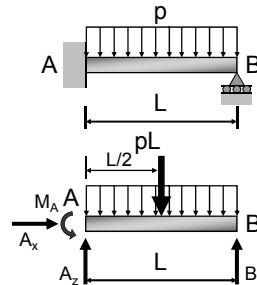


Fig.9.24

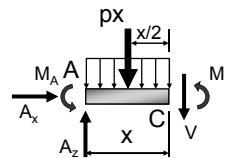


Fig.9.26

199

Example 9.05

Fig.9.24のA点, B点の反力を求めよ

$$EI \frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{1}{2}px^2 + A_zx - M_A$$

$$EI \theta = EI \frac{dw}{dx} = -\frac{1}{6}px^3 + \frac{1}{2}A_zx^2 - M_Ax + C_1$$

$$EIw = -\frac{1}{24}px^4 + \frac{1}{6}A_zx^3 - \frac{1}{2}M_Ax^2 + C_1x + C_2$$

$$x=0 \text{ で } \theta=0, \quad x=0 \text{ で } w=0 \quad \therefore C_1 = C_2 = 0$$

$$EIw = -\frac{1}{24}px^4 + \frac{1}{6}A_zx^3 - \frac{1}{2}M_Ax^2$$

$$x=L \text{ で } w=0$$

$$3M_A - A_zL + \frac{1}{4}pL^2 = 0$$

よって

$$\therefore A_x = 0, A_z = \frac{5}{8}pL, M_A = \frac{1}{8}pL^2, B = \frac{3}{8}pL$$

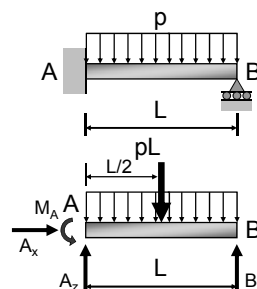


Fig.9.24

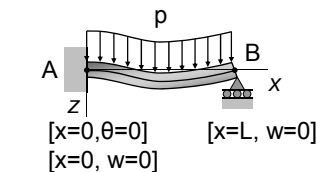


Fig.9.25

200

Example 9.05

Fig.9.24のA点, B点の反力を求めよ

