第13回・14回講義資料

189

Chapter 9. Deflection of Beams
はりのたわみ

座標軸のとり方：
たわみの記号に注意
教科書は間違えています

190

Introduction

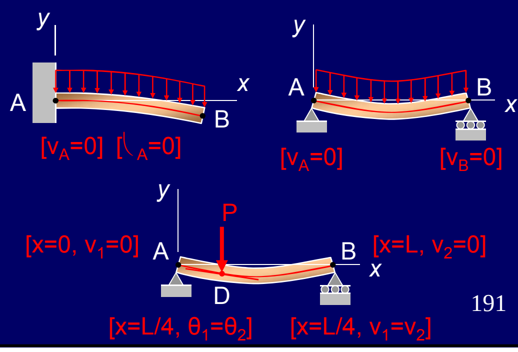
ここまでの章では強度設計にかかわることを学んできた
構造設計のもう一つの重要な事項は「変位」
はりについては「たわみ」
与えられた荷重条件での最大たわみは重要な設計項目
使用性能：列車の走行性，歩行者の不安感など

純曲げを受けるはりについて
中立軸位置での曲率とモーメントとの関係

$$\frac{1}{\rho}=\frac{M}{EI}$$

鉛直荷重を受ける場合

$$\frac{1}{\rho}=\frac{M(x)}{EI}$$



Deformation of a beam under Transverse Loading
はりが鉛直荷重を受ける場合の変形

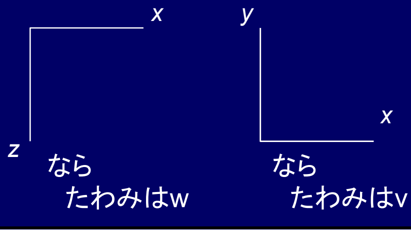
$$\frac{1}{\rho}=\frac{M(x)}{EI}$$

Equation of the Elastic Curve
弾性曲線

はりのたわみはyとは書かないように

はりの軸にx軸，下向きにz軸ならたわみはw

$$\frac{1}{\rho}=\frac{d^2w}{dx^2}$$



Equation of the Elastic Curve
弾性曲線

$$EI\frac{dv}{dx}=\int_0^x M(x)dx+C_1$$

θはたわみ角，微小なことより

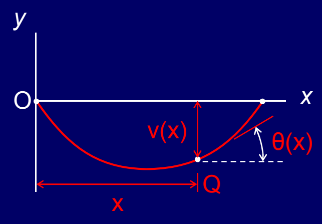
$$\frac{dv}{dx}=\tan\theta\approx\theta(x)$$

$$\therefore EI\theta(x)=\int_0^x M(x)dx+C_1$$

$$EIv=\int_0^x\left[\int_0^x M(x)dx+C_1\right]dx+C_2$$

$$EIv=\int_0^x dx\int_0^x M(x)dx+C_1x+C_2$$

C_1，C_2：積分定数



193

Equation of the Elastic Curve
弾性曲線

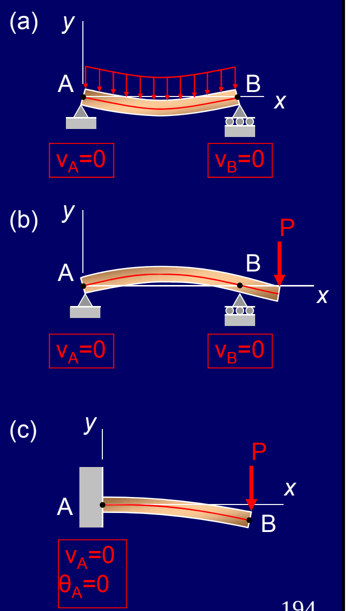
(a) 一様分布荷重を受ける単純支持はり
(b) 張り出しを有する単純支持はり
(c) 片持ちはり

(a), (b)の場合

x=0, v=0
x=L, v=0 → C_1，C_2

(c)の場合

x=0, v=0
x=0, θ=0 → C_1，C_2



194

Example 9.01
Fig.9.9 のたわみ曲線とA点でのたわみを求めよ

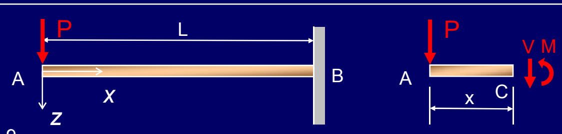


Fig.9.9

$$M+Px=0 \qquad M=-Px$$

$$EI\frac{d^2w}{dx^2}=-Px \qquad EI\frac{dw}{dx}=-\frac{1}{2}Px^2+C_1$$

x=Lでθ=dw/dx=0 $\quad \therefore C_1=\frac{1}{2}PL^2$

$$EI\frac{dw}{dx}=-\frac{1}{2}Px^2+\frac{1}{2}PL^2 \qquad EIw=-\frac{1}{6}Px^3+\frac{1}{2}PL^2x+C_2$$

x=Lでw=0 $\quad \therefore C_2=-\frac{1}{3}PL^3$

$$\therefore w=\frac{P}{6EI}\left(-x^3+3L^2x-2L^3\right) \qquad \rightarrow w_A=-\frac{PL^3}{3EI}$$

195

Example 9.02
等分布荷重を受ける単純支持はりのたわみを求めよ

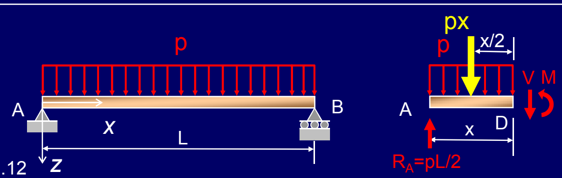


Fig.9.12

$$M=\frac{1}{2}pLx-\frac{1}{2}px^2$$

$$EI\frac{d^2w}{dx^2}=-\frac{1}{2}px^2+\frac{1}{2}pLx \qquad EI\frac{dw}{dx}=-\frac{1}{6}px^3+\frac{1}{4}pLx^2+C_1$$

$$EIw=-\frac{1}{24}px^4+\frac{1}{12}pLx^3+C_1x+C_2$$

x=0でw=0 , x=Lでw=0 $\quad \therefore C_2=0,\ C_1=-\frac{1}{24}pL^3$

$$\therefore w=\frac{p}{24EI}\left(-x^4+2Lx^3-L^3x\right) \qquad \rightarrow |w|_{max}=\frac{5pL^4}{384EI}$$

196

Direct Determination of the Elastic Curve from the Load Distribution　荷重分布とたわみ

Sec.5.3.より

$$\frac{dM}{dx} = V(x) \qquad \frac{dV}{dx} = -p(x)$$

したがって

$$\frac{d^3w}{dx^3} = \frac{1}{EI}\frac{dM}{dx} = \frac{V(x)}{EI} \qquad \frac{d^4w}{dx^4} = \frac{1}{EI}\frac{dV}{dx} = -\frac{p(x)}{EI}$$

$$EI\frac{d^4w}{dx^4} = -p(x)$$

$$EI\frac{d^3w}{dx^3} = -\int p(x)dx + C_1$$

$$\vdots$$

$$EIw = -\int dx\int dx\int dx\int p(x)dx + \frac{1}{6}C_1x^3 + \frac{1}{2}C_2x^2 + C_3x + C_4$$

積分定数は境界条件から

197

Statically Indeterminate Beams
不静定構造のはり

Fig.9.24のはり．反力が4
つりあい式：

$$\sum F_x = 0,\ \sum F_z = 0,\ \sum M_A = 0$$

これでは解けない
変位の適合条件を考える → Fig.9.25
B点のたわみが0

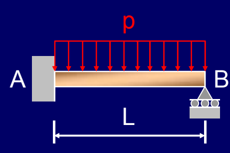
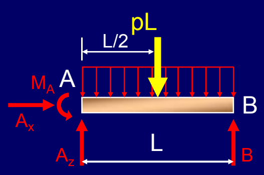


Fig.9.24



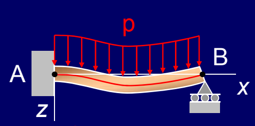


Fig.9.25

198

Example 9.05
Fig.9.24のA点，B点の反力を求めよ

つりあい式：

$$\sum F_x = 0: \quad A_x = 0$$

$$\sum F_z = 0: \quad A_z + B - pL = 0$$

$$\sum M_A = 0: \quad M_A + BL - \frac{1}{2}pL^2 = 0$$

Fig.9.26のFree body diagramより

$$\sum M_C = 0: \quad M + \frac{1}{2}px^2 + M_A - A_z x = 0$$

$$EI\frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{1}{2}px^2 + A_z x - M_A$$

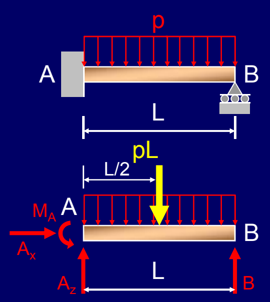


Fig.9.24

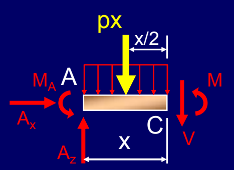


Fig.9.26

199

Example 9.05
Fig.9.24のA点，B点の反力を求めよ

$$EI\frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{1}{2}px^2 + A_z x - M_A$$

$$EI\theta = EI\frac{dw}{dx} = -\frac{1}{6}px^3 + \frac{1}{2}A_z x^2 - M_A x + C_1$$

$$EIw = -\frac{1}{24}px^4 + \frac{1}{6}A_z x^3 - \frac{1}{2}M_A x^2 + C_1 x + C_2$$

x=0でθ=0，x=0でw=0 $\quad \therefore C_1 = C_2 = 0$

$$EIw = -\frac{1}{24}px^4 + \frac{1}{6}A_z x^3 - \frac{1}{2}M_A x^2$$

x=Lでw=0

$$3M_A - A_z L + \frac{1}{4}pL^2 = 0$$

よって

$$\therefore A_x = 0,\ A_z = \frac{5}{8}pL,\ M_A = \frac{1}{8}pL^2,\ B = \frac{3}{8}pL$$

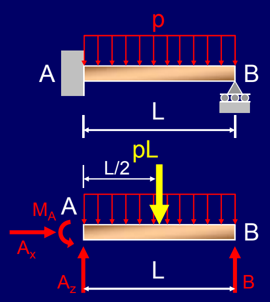


Fig.9.24

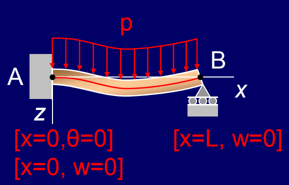


Fig.9.25

200

Example 9.05
Fig.9.24のA点，B点の反力を求めよ