

## Chapter 4. Pure Bending 純曲げ



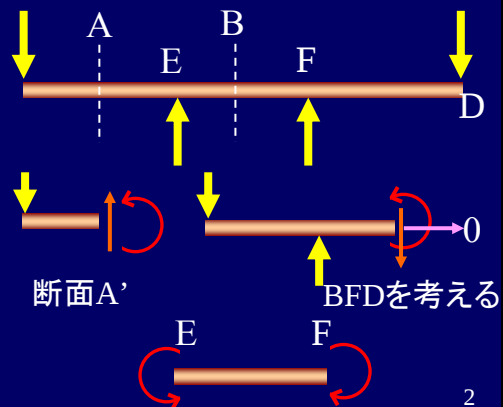
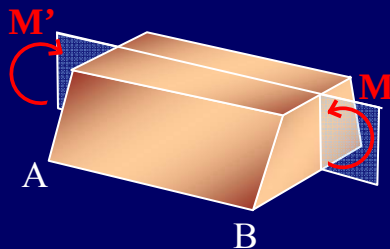
1

## Introduction

純曲げを受ける部材中の応力を考える

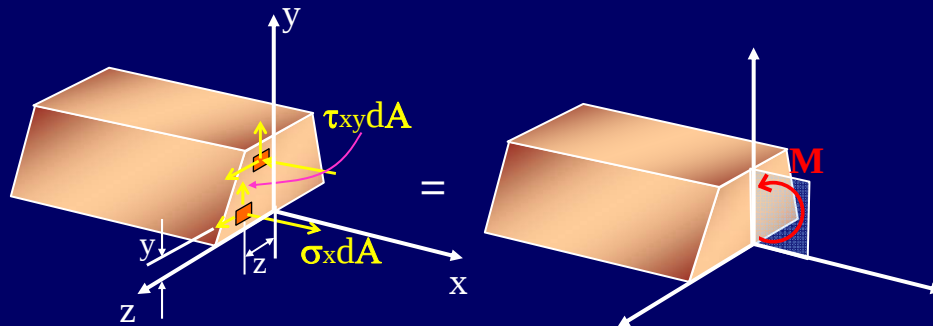
構造部材の多くは曲げ部材であり、曲げ+せん断力の部材でも曲げによる応力を考えるにはここでのやり方を用いる。

➤ 同じ平面でモーメント  $M$  と  $M'$  が作用



2

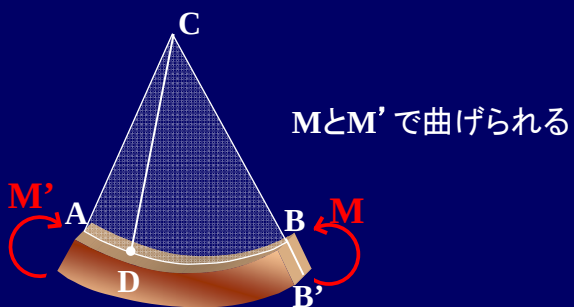
## Symmetric Member in Pure Bending 純曲げ部材の応力



$$\begin{aligned}
 \text{x方向} & \quad \int \sigma_x = 0 \\
 \text{y軸まわりのモーメント} & \quad \int z \sigma_x dA = 0 \\
 \text{z軸まわりのモーメント} & \quad \int (-y \sigma_x) dA = M
 \end{aligned}$$

3

## Deflections in a Symmetric Member in Pure Bending 純曲げを受ける部材の変形



Mが一樣なことから一樣な曲率で曲がる. すなわちCを中心  
に円弧を描く

ABは縮み, A'B'は伸びる

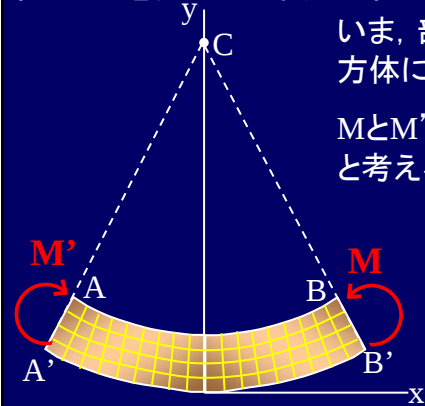
軸に垂直な面は平面を保ち, 断面はCを通る

4

## Deflections in a Symmetric Member in Pure Bending



### 純曲げを受ける部材の変形



いま、部材を各軸に平行するように、小さな立方体に分割する。

MとM'が作用した後に左図のように変形したと考える

すべての面はお互いに $90^\circ$ をなすしたがって

$$\gamma_{xy} = \gamma_{zx} = 0$$

したがって

$$\tau_{xy} = \tau_{zx} = 0$$

その他の応力成分

$\sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}$ は0 (表面であるがゆえに)

したがって純曲げをうける細い部材中の応力は $\sigma_x$ だけの1軸状態となる

5

## Deflections in a Symmetric Member in Pure Bending

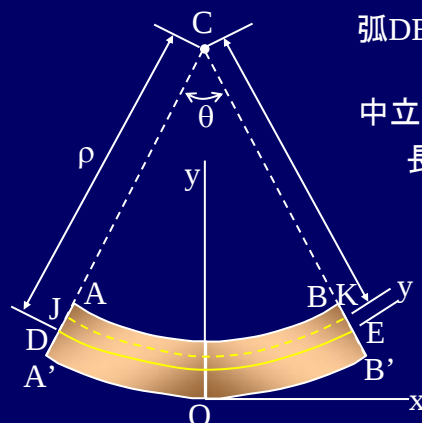


### 純曲げを受ける部材の変形

この議論の延長から

$\epsilon_x = 0, \sigma_x = 0$  の面があるはず

これを中立軸と呼ぶ

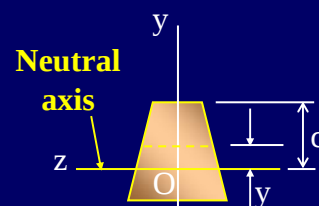


弧DEの半径を $\rho$ , DEの中央角を $\theta$ とする

$$L = \rho\theta$$

中立軸から $y$ 離れた弧JKを考える

$$L' = (\rho - y)\theta$$

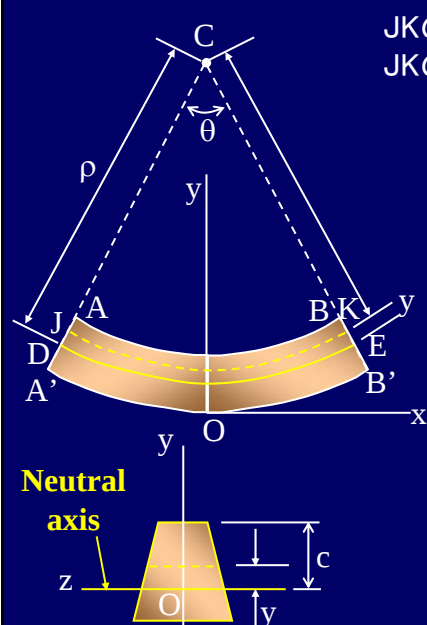


6

## Deflections in a Symmetric Member in Pure Bending



### 純曲げを受ける部材の変形



JKの最初の長さはLより

JKの変形は

$$\delta = L' - L = (\rho - y)\theta - \rho\theta = y\theta$$

したがって長さ方向のひずみは

$$\varepsilon_x = \frac{\delta}{L} = -\frac{y\theta}{\rho\theta} = -\frac{y}{\rho}$$

ひずみは最外縁で生じるから

$$\varepsilon_m = \frac{c}{\rho}$$

$$\varepsilon_x = -\frac{y}{c} \varepsilon_m$$

## Stresses and Deformations in the Elastic Range



### 弾性域での応力と変形

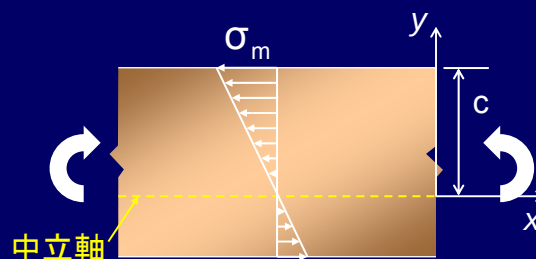
ここでは応力が降伏点( $\sigma_y$ )以下での部材中の応力を考える  
応力とひずみの関係はHookeの法則に従う

部材軸はx方向

$$\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x$$

$$E \cdot \varepsilon_x = \frac{-y}{c} \cdot \sigma_m$$

$\sigma_m$  : はり最外縁で生じる最大応力



## Stresses and Deformations in the Elastic Range 弾性域での応力と変形



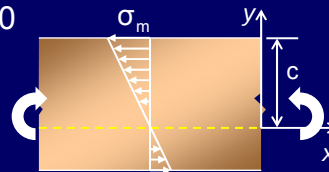
これまででは中立軸の位置, 最大応力  $\sigma_m$  ともわかっていない

$$\int \sigma_x dA = 0 \quad (4.1) \quad \int (-y \cdot \sigma_x dA) = M \quad (4.3)$$

式(4.1)より

$$\int \sigma_x dA = \int \left( \frac{-y}{c} \cdot \sigma_m \right) dA = \frac{\sigma_m}{c} \int y dA = 0$$

$\therefore \int y dA = 0$  : 中立軸まわりの  
断面1次モーメントは0



式(4.3)より

$$\int (-y \cdot \sigma_x dA) = \int (-y) \left( \frac{-y}{c} \sigma_m \right) dA = \frac{\sigma_m}{c} \int y^2 dA = M$$

$I = \int y^2 dA$  : 断面2次モーメント

$$\sigma_m = \frac{Mc}{I} \quad \sigma_x = -\frac{M}{I} y \quad \text{曲げ応力 (flexural stress)}$$

9

## Stresses and Deformations in the Elastic Range 弾性域での応力と変形



Elastic section modulus = S

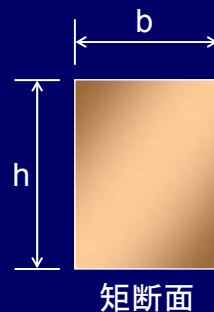
弾性断面係数

$$S = \frac{I}{c}$$

$$\sigma_m = \frac{M}{S}$$

$$I = \frac{bh^3}{12}$$

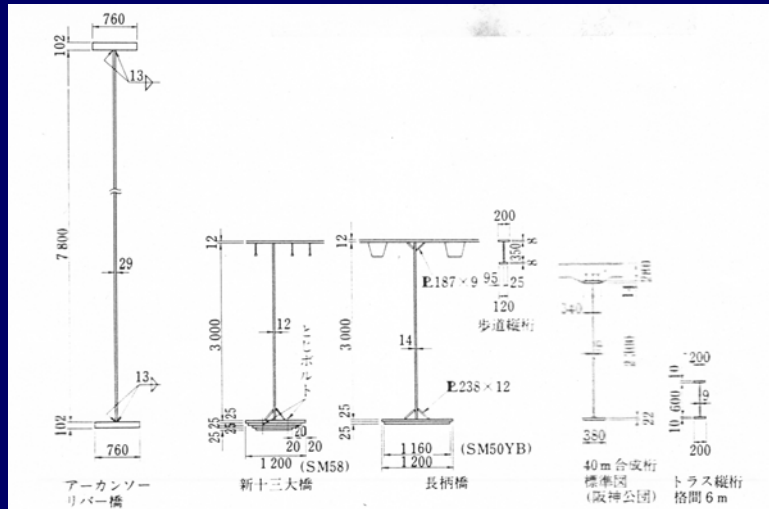
$$\therefore S = \frac{I}{c} = \frac{\frac{1}{12}bh^3}{\frac{h}{2}} = \frac{1}{6}bh^2 = \frac{1}{6}Ah$$



10

## Stresses and Deformations in the Elastic Range 弾性域での応力と変形

効率の良い断面形状

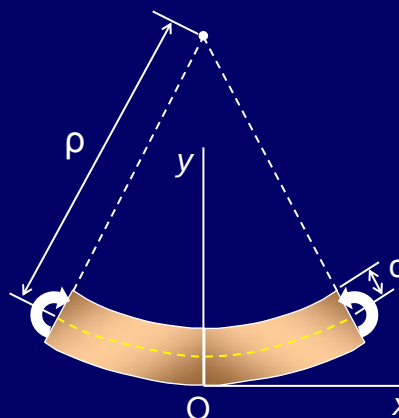


11

## Stresses and Deformations in the Elastic Range 弾性域での応力と変形

曲げモーメントMにより生じる変形

$$\begin{aligned}\epsilon_m &= \frac{c}{\rho} \\ \frac{1}{\rho} &= \frac{\epsilon_m}{c} \\ \frac{1}{\rho} &= \frac{\sigma_m}{Ec} = \frac{1}{Ec} \cdot \frac{Mc}{I} \\ \therefore \frac{1}{\rho} &= \frac{M}{EI}\end{aligned}$$



12

## Bending of Members made of Several Materials 異種材料を組み合わせた曲げ部材

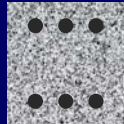


今までの「はりの力学」の展開はHomogeneous (均質) の材料を前提としている  
構造特性を改善する目的で異種材料を組み合わせることがある  
応力とひずみはどうなるのか？

木材の上に鋼材



コンクリートの中に鉄筋



13

## Bending of Members made of Several Materials 異種材料を組み合わせた曲げ部材



今, 2種類の材料を組み合わせた部材を考える

4.3.の展開, 定式化では応力とひずみのことは何も触れていない

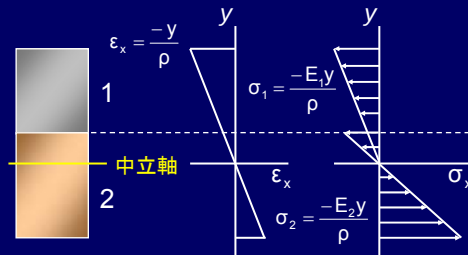
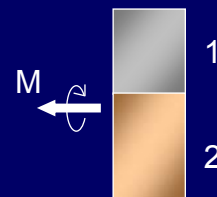
直ひずみ  $\varepsilon_x$  は均質な部材と同様に断面内で線形に分布する

$$\varepsilon_x = -y/\rho$$

直応力は

$$\sigma_1 = E_1 \cdot \varepsilon_x = -E_1 \cdot y/\rho$$

$$\sigma_2 = E_2 \cdot \varepsilon_x = -E_2 \cdot y/\rho$$



14

## Bending of Members made of Several Materials 異種を組み合わせた曲げ部材



換算断面

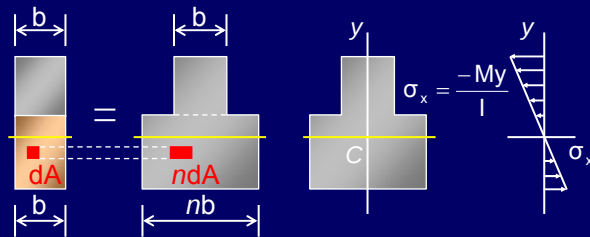
上側の断面の受け持つ力  $dF_1 = \sigma_1 dA = \frac{-E_1 y}{\rho} dA$

下側の断面の受け持つ力  $dF_2 = \sigma_2 dA = \frac{-E_2 y}{\rho} dA$

$E_2/E_1 = n$  とする

$$dF_2 = \frac{-(nE_1)y}{\rho} dA$$

$$= \frac{-E_1 y}{\rho} (ndA)$$

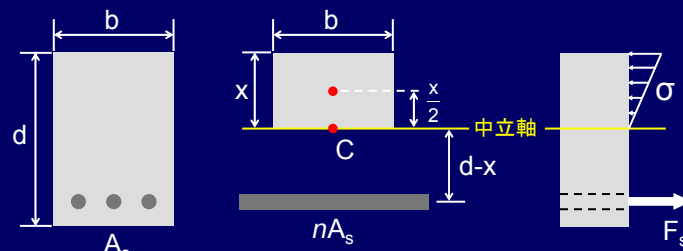


15

## Bending of Members made of Several Materials 異種を組み合わせた曲げ部材



重要なExampleは鉄筋コンクリート(RC)のはり



コンクリートは引張に弱い → 圧縮だけ受け持つ  
鉄筋 → 引張を受け持つ

断面1次モーメント

$$(bx) \frac{x}{2} - nA_s(d-x) = 0 \quad \frac{bx^2}{2} + nA_s x - nA_s d = 0$$

これからxがでる

16