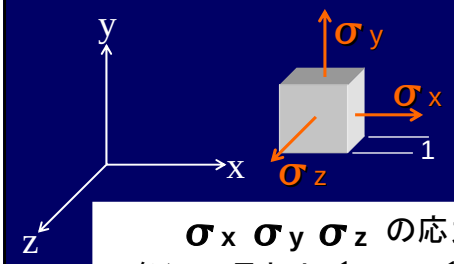
Dilatation : Bulk Modulus_1



単位長さの微小六面体

σ_x σ_y σ_z の応力下

各辺の長さは $1+\varepsilon_x,\ 1+\varepsilon_y,\ 1+\varepsilon_z$

体積は $v=(1+\varepsilon_x)(1+\varepsilon_y)(1+\varepsilon_z)$

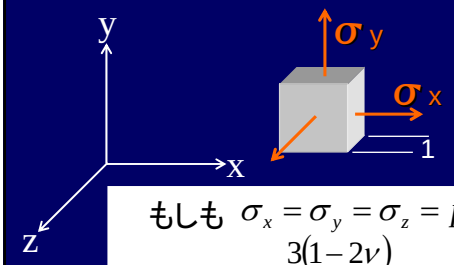
$=1+\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z$ (ひずみは小さい)

体積変化 e は $e=v-1=\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_y$

$$=\frac{\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z}{E}-\frac{2\nu(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)}{E}$$

$$=\frac{1-2\nu}{E}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)$$

Dilatation : Bulk Modulus_2



単位長さの微小六面体

もしも $\sigma_x=\sigma_y=\sigma_z=p$ とすれば(静水圧)

$$e=\frac{3(1-2\nu)}{E}p$$

$k=\dfrac{E}{3(1-2\nu)}$ とする $e=-\dfrac{p}{k}$

k は体積弾性係数と呼ばれる

p がかかったら小さくなる(自然) common sense

$\therefore\quad k>0\quad 1-2\nu>0\quad or\quad \nu<\frac{1}{2}$

通常の材料は $0<\nu<\frac{1}{2}$

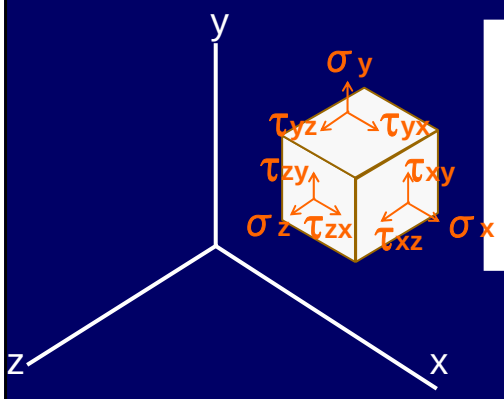
$\nu=\frac{1}{2}$ 非圧縮性

$\nu>\frac{1}{2}$ 膨張する

Shearing Strain せん断ひずみ

ここまではせん断応力/せん断ひずみの影響を無視

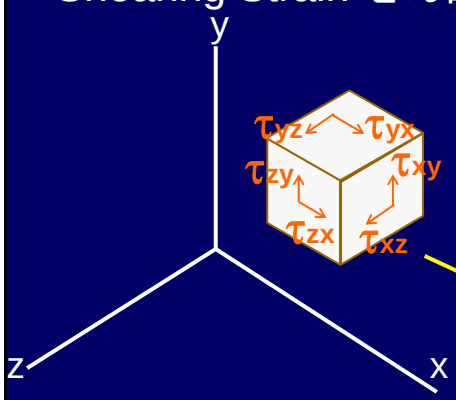
当然 τ_{xy} τ_{yz} τ_{zx} は存在



$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_y & \sigma_z \\ \varepsilon_x & \varepsilon_y & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$ の関係には

影響しない

Shearing Strain せん断ひずみ_2

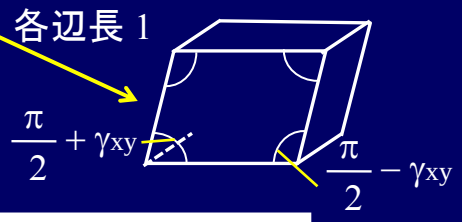


しかしせん断応力は

Cubic –> Oblique Parallelepiped

斜面平行6面体

各辺長 1



角度の変化を γ_{xy} とすると

$$\frac{\pi}{2} \rightarrow \frac{\pi}{2} - \gamma_{xy}$$

$$\frac{\pi}{2} \rightarrow \frac{\pi}{2} + \gamma_{xy}$$

Shearing Strain せん断ひずみ_3

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}$$

$$\tau_{yz} = G\gamma_{yz}$$

$$\tau_{zx} = G\gamma_{zx}$$

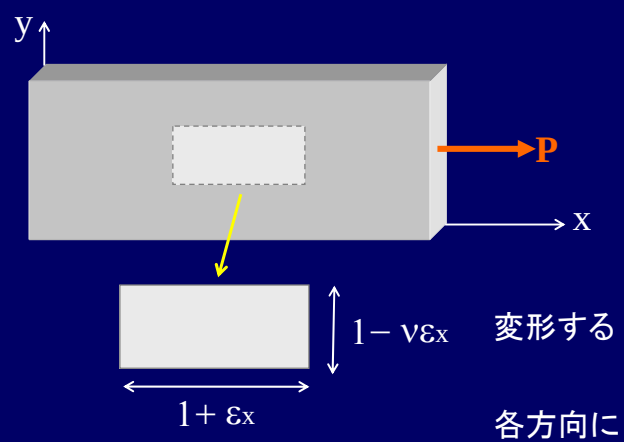
$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E}$$

$$\varepsilon_y = -\frac{\nu\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E}$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}$$

軸力下の変形:E, ν, Gの関係_1



変形する

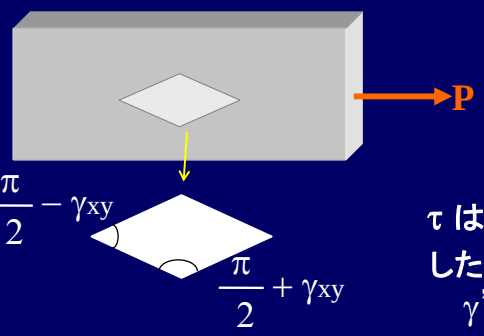
各方向に 1+ εx

1− νεx

1− νεx

軸力下の変形：E, ν, Gの関係_2

45°傾いた面を見る

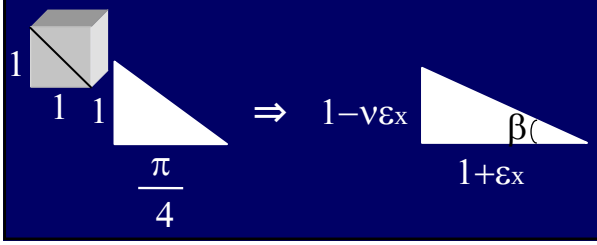


τ は45°で最大

したがって

$\gamma' = \gamma_{max}$

今，切り出したcubicをみる



$$\beta = \frac{\pi}{4} - \frac{\gamma_m}{2}$$

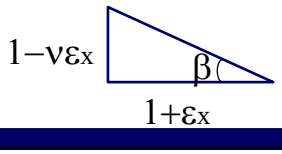
軸力下の変形：E, ν, Gの関係_3

$$\tan(A \pm B) = \frac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B}$$

$$\tan\beta = \frac{\tan\frac{\pi}{4} - \tan\frac{\gamma}{2}m}{1 + \tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{\gamma}{2}} = \frac{1 - \tan\frac{\gamma_m}{2}}{1 + \tan\frac{\gamma_m}{2}}$$

$\frac{\gamma_m}{2}$ は微小な角度であることより

$$\tan\beta = \frac{1 - \frac{\gamma_m}{2}}{1 + \frac{\gamma_m}{2}}$$



$$\Rightarrow \tan\beta = \frac{1 - \nu\varepsilon_x}{1 + \varepsilon_x}$$

軸力下の変形:E, ν, Gの関係_4

$$\gamma_m = \frac{(1+\nu)\varepsilon_x}{1+\frac{1-\nu}{2}\varepsilon_x}$$

$\varepsilon_x << 1$ より

$$\gamma_m = (1+\nu)\varepsilon_x$$

これが最大せん断応力と最大せん断ひずみとの関係

軸力下の変形:E, ν, Gの関係_5

E, ν, Gの関係は

$$\gamma_m = \frac{\tau_m}{G}, \quad \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$$ より

$$\frac{\tau_m}{G} = (1+\nu)\frac{\sigma_x}{E}$$

$$\frac{E}{G} = (1+\nu)\frac{\sigma_x}{\tau_m}$$

$$\sigma_x = \frac{P}{A}, \quad \tau_m = \frac{P}{2A}$$ より

$$\frac{\sigma_x}{\tau_m} = 2$$

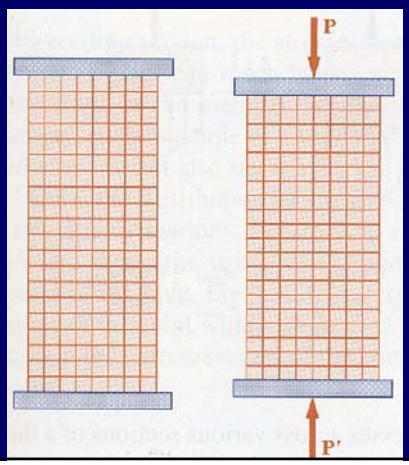
$$\therefore \frac{E}{2G} = 1+2\nu$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

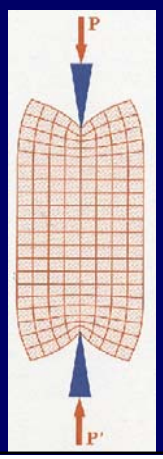
軸方向荷重下での応力とひずみの分布

Saint-Venant's Principle

荷重が一様に分布している場合の応力，ひずみの分布

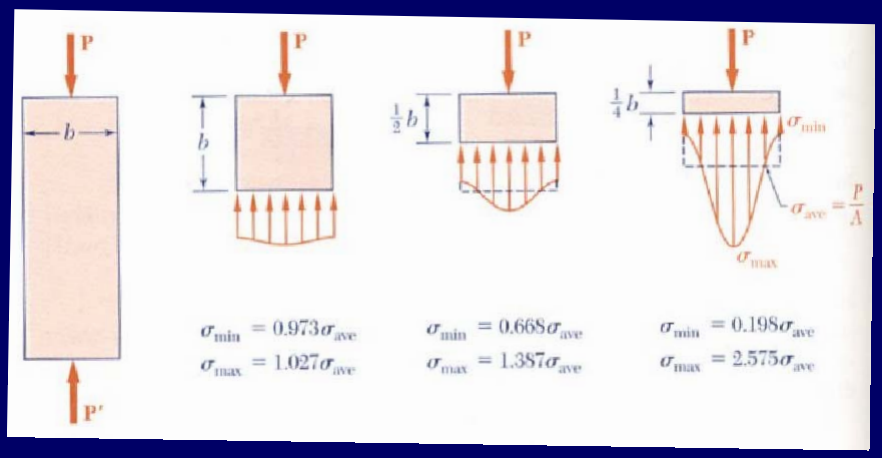


荷重が一点に集中する場合の応力，ひずみの分布



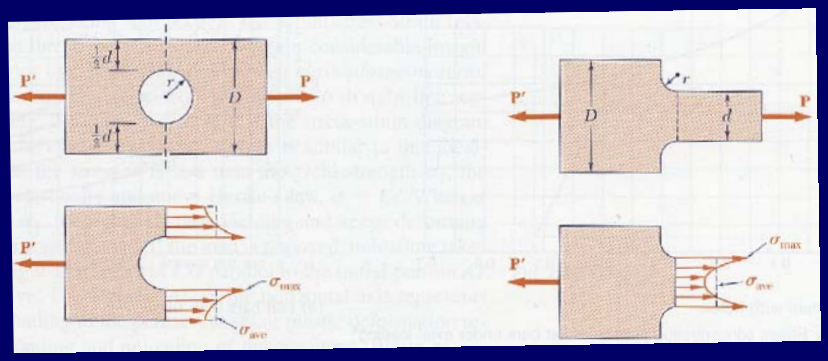
軸方向荷重下での応力とひずみの分布

荷重が一点に集中する場合の応力，ひずみの分布



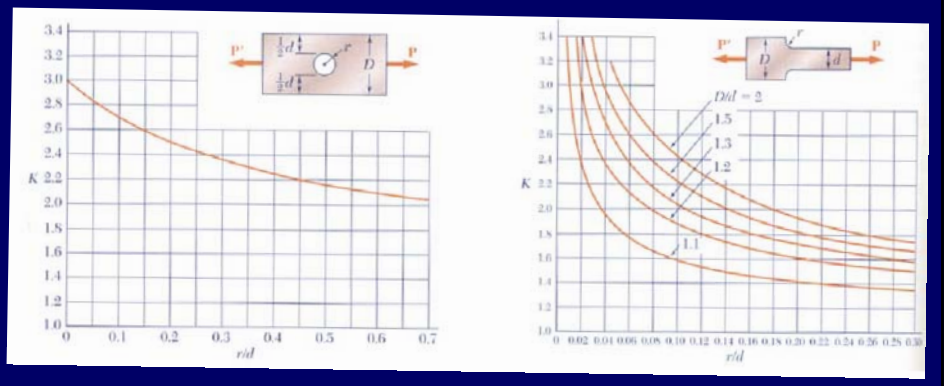
Stress Concentrations 応力集中

形状の変化に伴う応力の上昇



軸方向荷重下での応力とひずみの分布

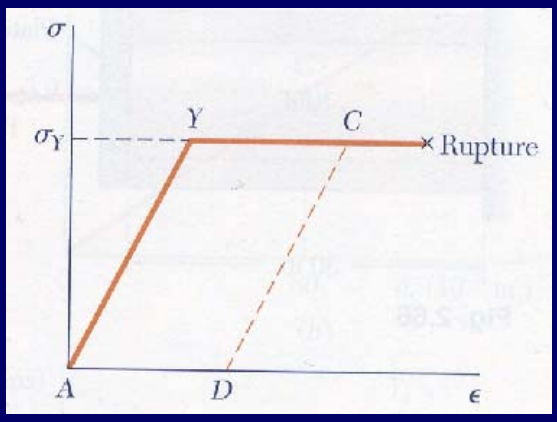
形状の変化に伴う応力の上昇



Plastic Deformations 塑性変形

実際の弾塑性応力−ひずみ関係は複雑

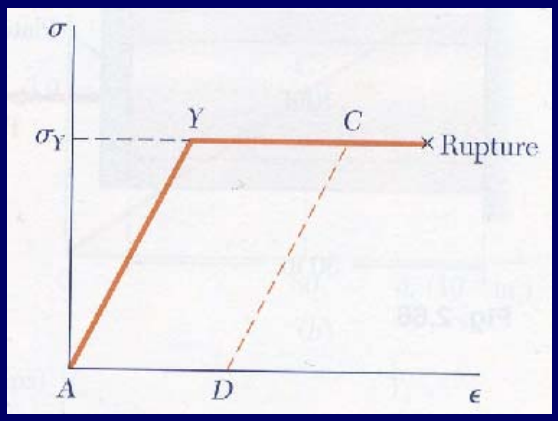
計算では単純化して考えることが多い



塑性変形

Example 2.13

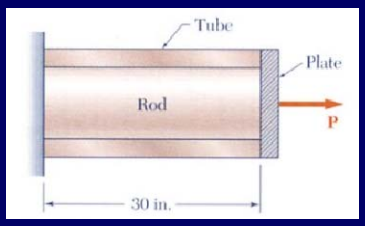
7mmまで伸ばした後に荷重を0とした.
そのときの残留変位は？

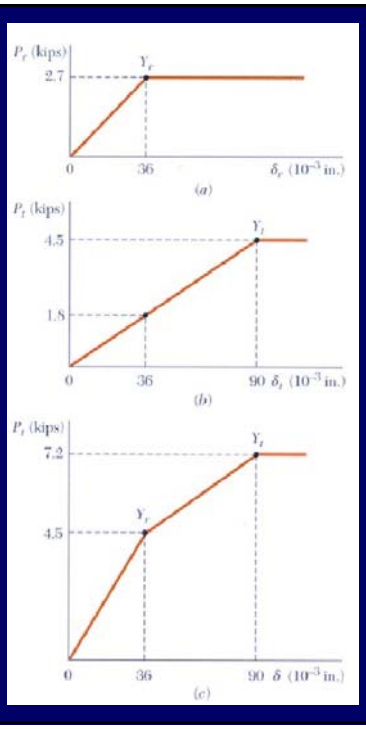


塑性変形

Example 2.14

Rod−Tubeの変位と荷重の関係を示せ





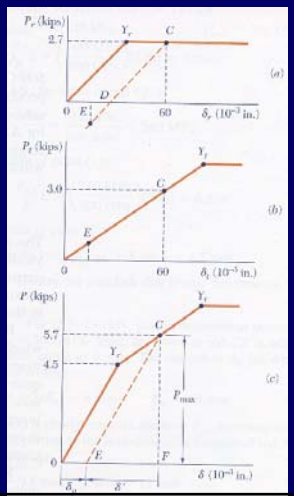
塑性変形

Example 2.15

Ex. 2.14において荷重が0から25kNまで上げた後にした.

(a) 最大の伸び量は

(b) 荷重が除かれた後に残される永久変位は



(a) 最大の伸び量は

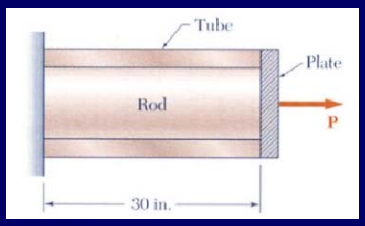
25kNではRodは塑性域に達し
Tubeは弾性域にある

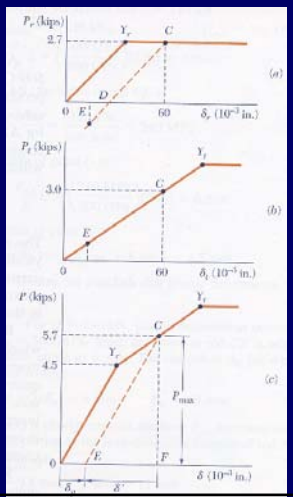
(b) 永久変位

荷重を下げた場合の荷重-変位関係は破線C,E

Residual Stresses 残留応力

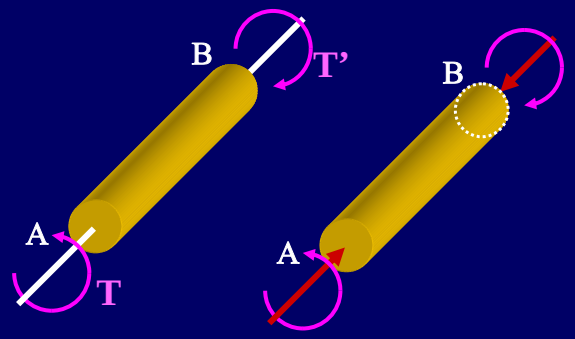
Example 2.15 のように，ある部分は降伏し塑性変形し，ある部分は弾性域の段階で除荷した場合，各部分の応力は0ではない．内部応力が残留する Pr. Ptともに0ではない．





Chapter 6. ねじり

3.1 Introduction



Torques **T** and **T'**
Twisting couples

すべての断面は平面を保持し，変形しない
せん断ひずみはシャフトの中心軸から線形に分布する

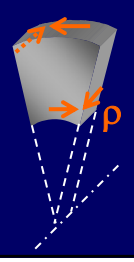
3.2 シャフト中の応力 Preliminary Discussion

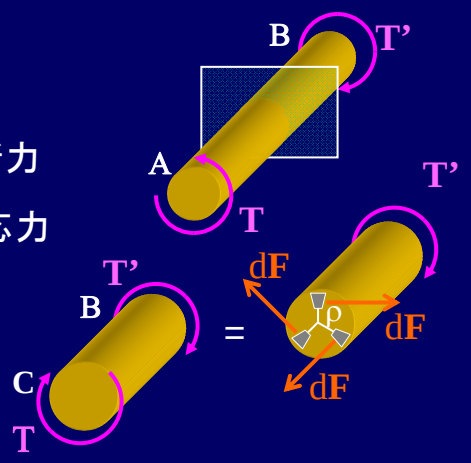
$$\int \rho \, d\mathbf{F} = \mathbf{T}$$

ρ: 中心軸からの距離
dF : 微小部分のせん断力

$d\mathbf{F} = \tau \, d\mathbf{A}$ τ:せん断応力

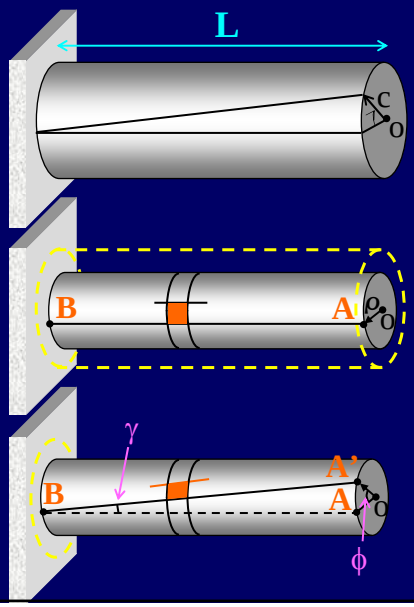
$$\int \rho \tau \delta \mathbf{A} = \mathbf{T}$$





3.3 円柱断面のシャフトの変形_1

シャフトの中のひずみ分布を考える



✓長さL,半径cの棒がねじられて角度変化ϕが生じた.

✓半径ρの部分を取り出して考える.

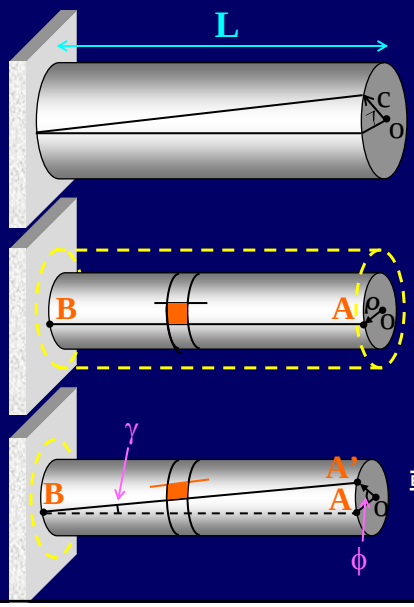
✓微小な正方形部分を考える.

✓せん断ひずみγは角度の変化と考えられる

✓角度の変化 ABとA'Bはせん断ひずみγと等しい

3.3 円柱断面のシャフトの変形_2

シャフトの中のひずみ分布



長さ $AA' = L\gamma$

一方 $AA' = \rho\phi$

したがって

$$L\gamma = \rho\phi$$

$$\gamma = \rho\phi/L$$

せん断ひずみは表面で最大となる

したがって

$$\gamma_{max} = c\phi / L$$

軸からρの距離でのせん断ひずみは

$$\gamma_{max} = c\phi / L$$

$$\gamma = \gamma_{max}\rho / c$$

3.4 弾性域でのせん断応力

Hookeの法則から

$\tau = \mathbf{G}\,\gamma$

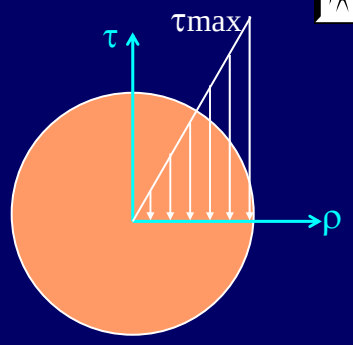
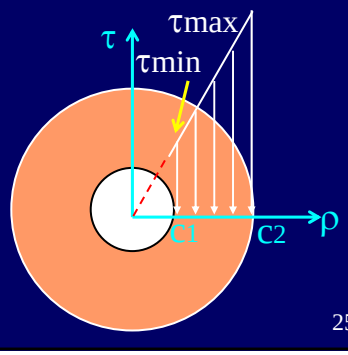
G：せん断弾性係数

$\mathbf{G}\,\gamma = \rho\,\mathbf{G}\,\gamma_{max} / c$

あるいは

$\mathbf{G}\,\gamma = \rho\,\mathbf{G}\,\gamma_{max} / c$

$\tau = \rho\,\tau_{max} / c$

内径c1,外径c2のシャフトでの応力

$\tau_{min} = \tau_{max}\,c1/c2$