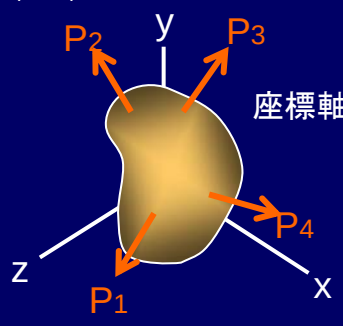
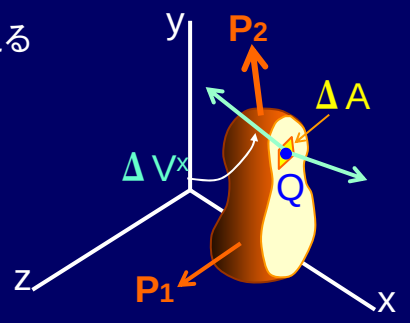
一般条件下の応力

P_1, P_2, ・・・が作用する物体を考える



座標軸　x y z

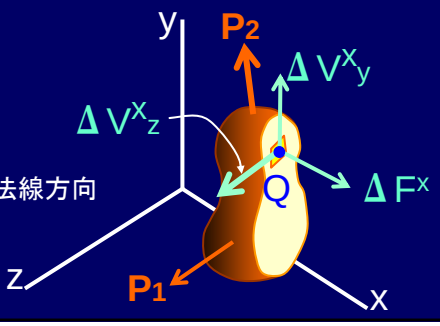


Qを通る切断面(y,z面)を考える

微小面ΔAに対して

面の垂直力 ―ΔF^x ― 面の法線方向

面のせん断力－ΔV^x



一般条件下の応力

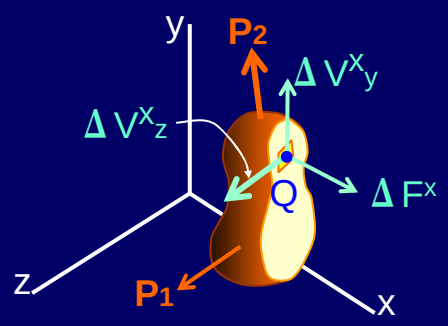
ΔF^x 方向ははっきりしている

ΔV^x 面積内でどちらでも良い

⟶もう一つの定義が必要

y, z 方向

ΔV^x_y　ΔV^x_z



yz面作用応力

$$\sigma_x = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F^x}{\Delta A}$$

$$\tau_{xy} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta V^x_y}{\Delta A} \qquad \tau_{xz} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta V^x_z}{\Delta A}$$

一般条件下の応力

同様にQを通るzx面を定義すると

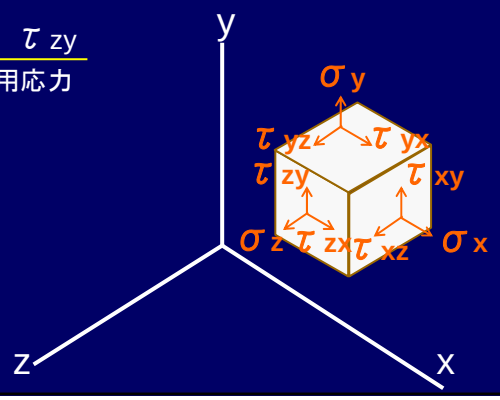
$\sigma_y \quad \tau_{yz} \quad \tau_{yx}$

zx面作用応力

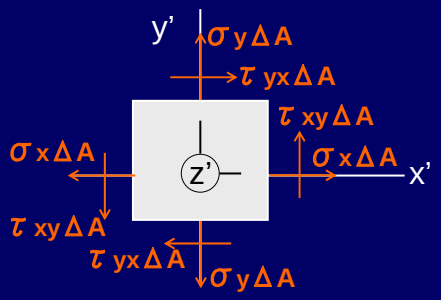
Qを通るxy面を定義すると

$\sigma_z \quad \tau_{zx} \quad \tau_{zy}$

xy面作用応力



せん断応力



$\tau_{xy} = \tau_{yx}$

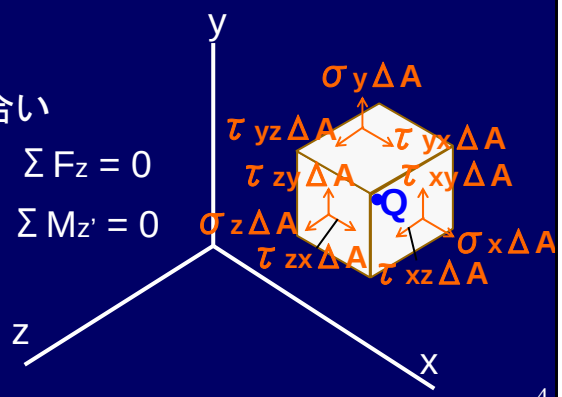
$\tau_{yz} = \tau_{zy}$

$\tau_{zx} = \tau_{xz}$

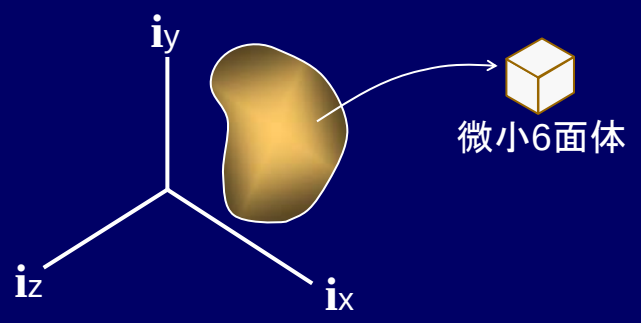
微小な立方体でのつり合い

$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma F_y = 0 \quad \Sigma F_z = 0$

$\Sigma M_{x'} = 0 \quad \Sigma M_{y'} = 0 \quad \Sigma M_{z'} = 0$



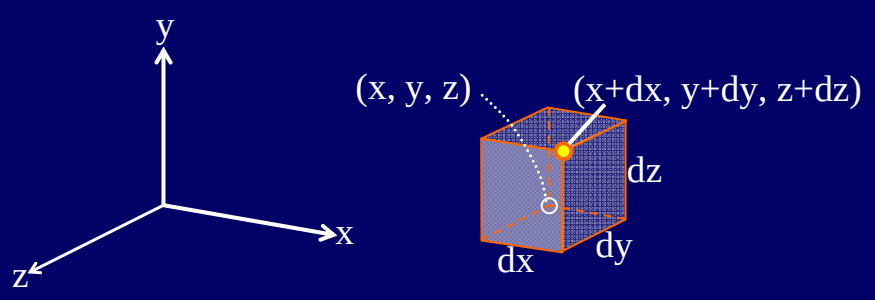
応力のベクトル的定義



ある軸 x_i = constant の面に働く力の単位面積当たりの力を応力ベクトルとする

$$\frac{\mathbf{F}_i}{A} = \boldsymbol{\sigma}_i$$

微小6面体のつりあい



$\boldsymbol{\sigma}_x$ 応力ベクトル

x=const. の面に働く力 $-\mathbf{F} = \boldsymbol{\sigma}_x(-dydz)$

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_1 + \Delta\mathbf{F}_1 &= \mathbf{F}_1 + \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial x}dx \\ &= \boldsymbol{\sigma}_x(dydz) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\boldsymbol{\sigma}_x(dydz)\right)dx \\ &= \boldsymbol{\sigma}_x dydz + \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_x}{\partial x}dxdydz\end{aligned}$$

微小6面体のつりあい

これら2面に働く力の和

$$-\mathbf{F}_x + \mathbf{F}_x + d\mathbf{F}_x = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_x}{\partial x} dxdydz$$

同様に y方向 $d\mathbf{F}_y = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_y}{\partial y} dxdydz$

z方向 $d\mathbf{F}_z = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_z}{\partial z} dxdydz$

6面体には単位体積当たりPの体積力

したがって $\mathbf{F} = \mathbf{P} dxdydz$

微小6面体のつりあい

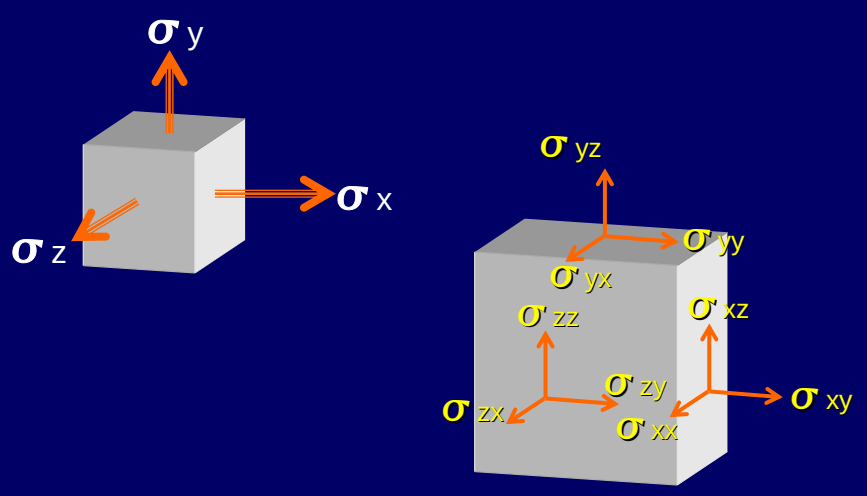
6面体がつり合うためには，全ての力の和が0

$$\Sigma \mathbf{F} = 0$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_x}{\partial x} dxdydz + \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_y}{\partial y} dxdydz + \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_z}{\partial z} dxdydz + \mathbf{P} dxdydz = 0$$

$$dxdy\,yz\left(\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_y}{\partial y} + \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_z}{\partial z} + \mathbf{P}\right) = 0$$

微小6面体のつりあい



i = j　直応力

i ≠ j せん応力

微小6面体のつりあい

$$\mathbf{P} = P_x \mathbf{i}_x + P_y \mathbf{i}_y + P_z \mathbf{i}_z$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_y}{\partial y} + \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_z}{\partial z} + \mathbf{P} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\sigma_{xx}\mathbf{i}_x + \sigma_{xy}\mathbf{i}_y + \sigma_{xz}\mathbf{i}_z\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\sigma_{yx}\mathbf{i}_x + \sigma_{yy}\mathbf{i}_y + \sigma_{yz}\mathbf{i}_z\right)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z}\left(\sigma_{zx}\mathbf{i}_z + \sigma_{zy}\mathbf{i}_y + \sigma_{zz}\mathbf{i}_z\right) + P_x \mathbf{i}_x + P_y \mathbf{i}_y + P_z \mathbf{i}_z = 0$$

微小6面体のつりあい

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \dfrac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} + P_x = 0 \\ \dfrac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \dfrac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} + P_y = 0 \\ \dfrac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \dfrac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + P_z = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + P_x = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + P_y = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + P_z = 0$$

設計の考え方

a : 材料の終局強度

b : 安全率 F.S. (Factor of Safety)

$$\text{F.S.} = \frac{\text{終局強度}}{\text{許容強度}} \quad \text{F.S.} = \frac{\text{終局応力}}{\text{許容応力}}$$

c : F.S.の適切な決め方

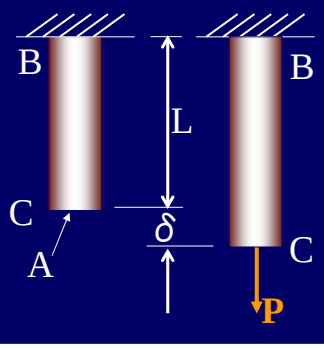
1. 材料特性のばらつき
2. 供用期間中の荷重の繰り返し数
   - 疲労
3. 荷重のタイプ
   - 設計時の想定と実際
4. 破断の形式
5. 解析からくる不確実性
6. 劣化：劣悪なメンテナンスや自然災害からくる
7. 構造物の重要性

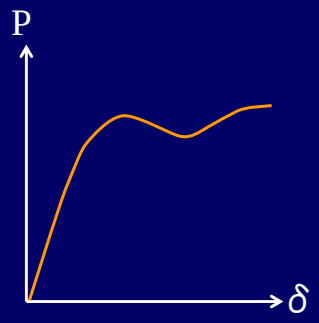
Chap. 5 Stress and Strain – Axial Loading

軸力下での応力とひずみ

変形・変位を考えないと解析できないケースが多い

ひずみ





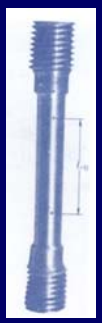
軸力を受ける部材に生じるひずみ：単位長さあたりの変形と定義
Normal strain: deformation per unit length

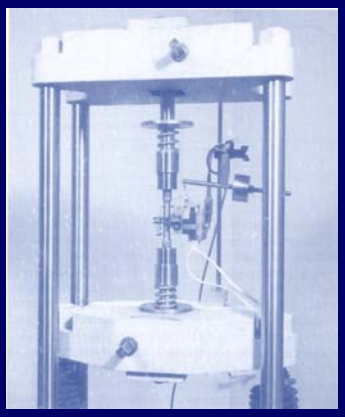
$\varepsilon = \delta / L$　その単位は　%，μ

ひずみには様々な定義があるので注意.
ここでの定義は工学問題で用いられるもの

応力とひずみの関係

材料実験（引張実験）から求める最も重要な材料特性
⇒ 学生実験

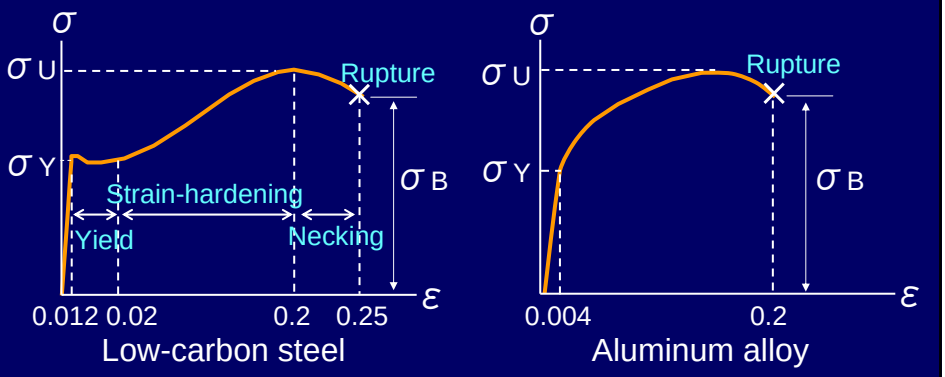




応力とひずみの関係

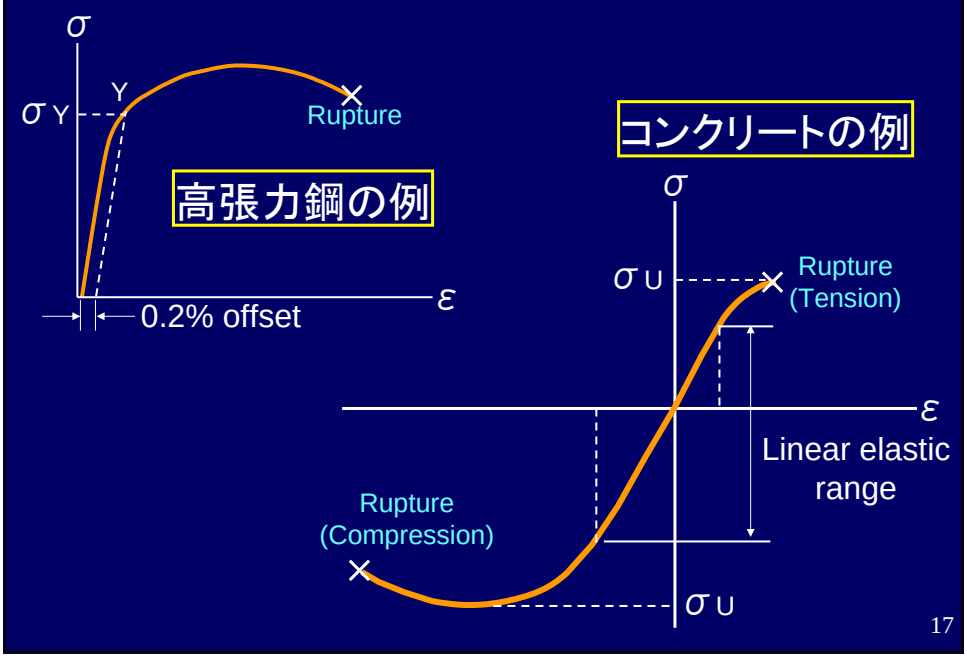
- 引張特性
- 圧縮特性
- 応力ひずみ関係

} 材料により異なる



材料の安全 ➡ 用いるのは低いひずみ域のみ
降伏点(σY)以下

応力とひずみの関係



真応力と真ひずみ
（true stress and true strain）

力を受け、変形すると断面積は変化する

<u>公称応力</u> <u>公称ひずみ</u>
(Nominal stress – strain, engineering stress – strain)

断面積の変化を考慮していない(実際の差は僅か)

$$\sigma = \frac{P}{A}$$ 変化

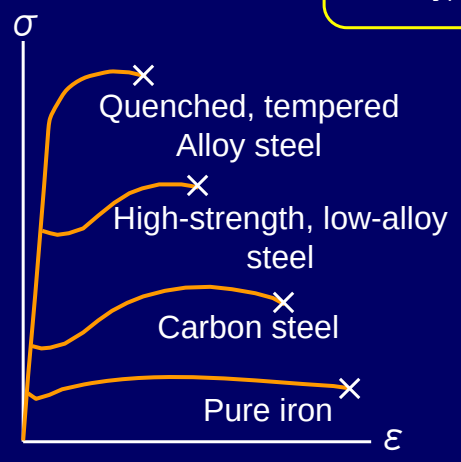
$$\Delta\varepsilon = \frac{\Delta L}{L}$$ 時々刻々の変化

$$\varepsilon_t = \int_{L_0}^{L} \frac{\Delta L}{L} = \ln\frac{L}{L_0}$$

フックの法則と弾性係数

$$\sigma = E\,\varepsilon$$

E : 弾性係数, Young's modulous

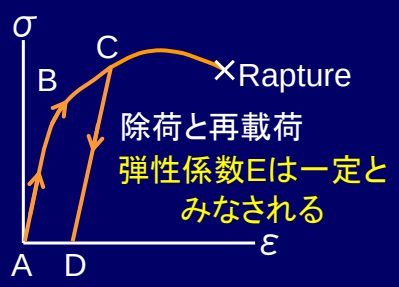


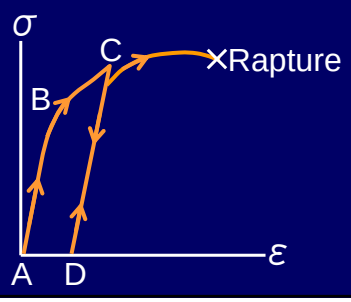
線形弾性係数

↕

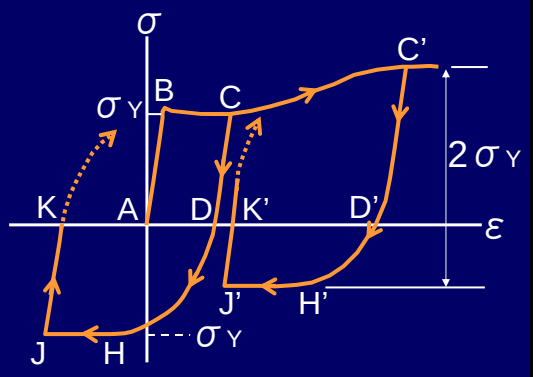
非線形弾性係数

弾性挙動と塑性挙動

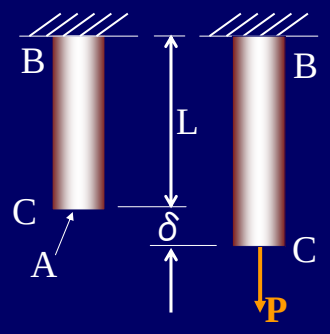




塑性加工が可能であることは構造
材料として重要な性質



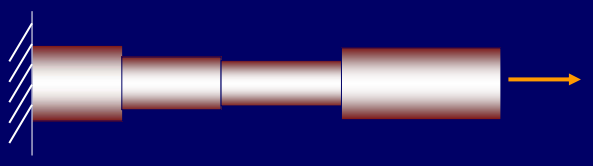
軸力下での部材の変形



$$\sigma = E\,\varepsilon$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{P}{AE}$$

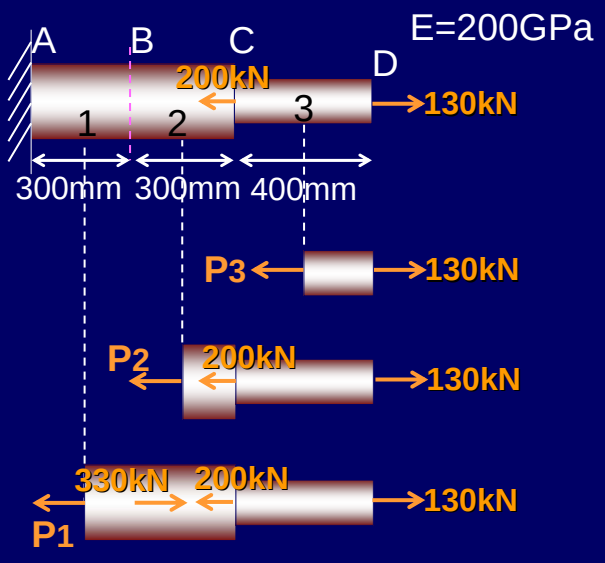
$$\delta = \frac{P\,L}{A\,E}$$



$$\delta = \Sigma \frac{P_i\,L_i}{A_i\,E_i}$$

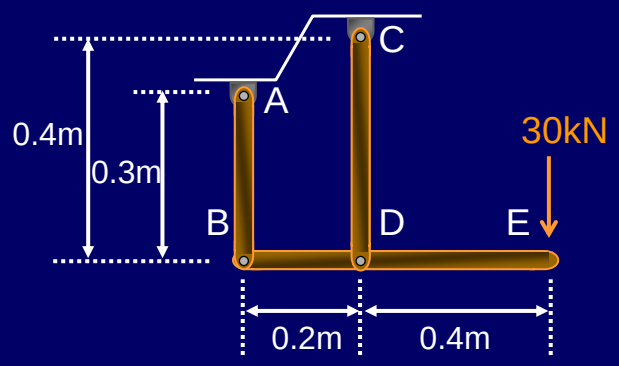
Example-2.01　鋼棒の変形を求めよ

E=200GPa

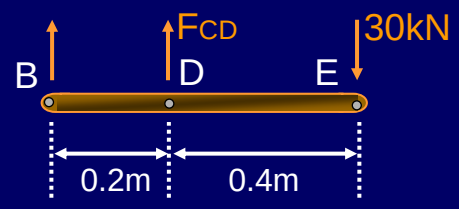


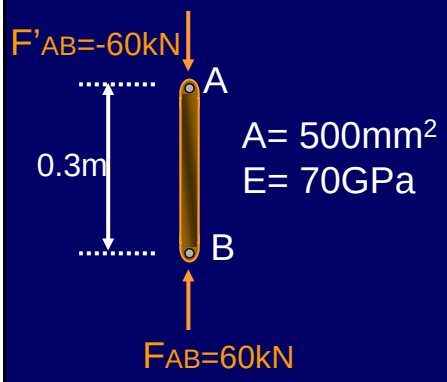
Sample Problem 2.1.

剛体の棒BDEが2つのリンクABとCDで支持されている。リンクABはアルミ製（E=70GPa）であり、断面は500mm2、リンクCDは鋼製（E＝200GPa）であり、断面積は600mm^{2}である。いま30kNの力が作用したときのB, D,E点での変位を求めよ。



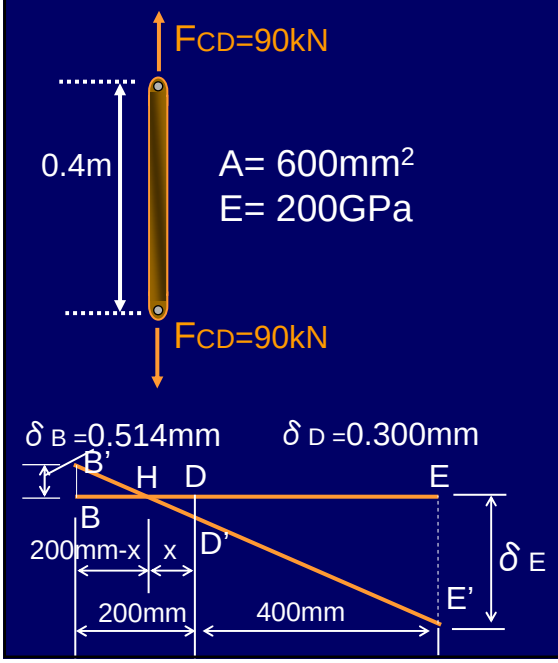
Sample Problem 2.1. SOLUTION





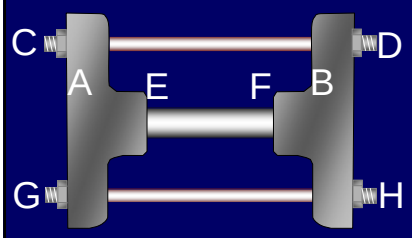
A= 500mm^2
E= 70GPa

Sample Problem 2.1. SOLUTION



Sample Problem 2.2.

剛体とみなされる鋳造物AとBが2本の直径18mmの鋼製ボルトCDとGHで連結され、38mmのアルミの棒EFの両端と接触している。それぞれのボルトにはピッチ2.5mmのネジがきられている。それぞれのナットが手締めの状態から1/4回転ほど締め付けられたときの棒の応力を求めよ。



Statically Indeterminate Problem 不静定問題

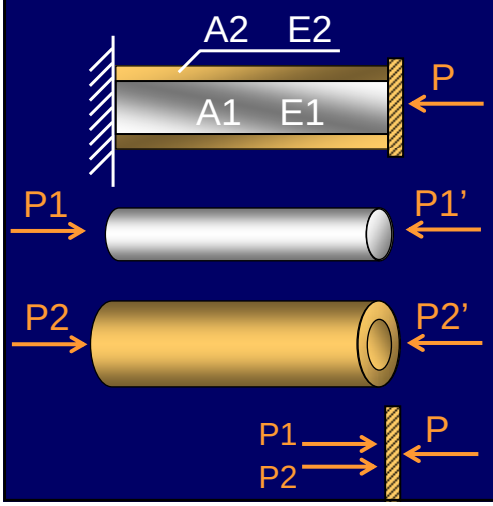
~変形を考慮して始めて解析できる問題~

解析プロセス

1：Free body diagramを描く
2：つりあい式から内部に生じる力を求める：力のつりあい
3：変形を計算する：変位の適合条件

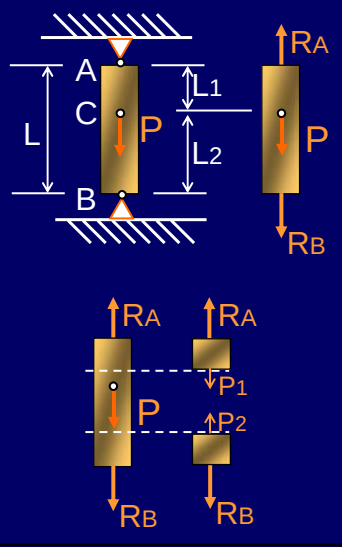
Example 2.02

長さL、断面積A1、弾性係数E1の棒が同じ長さL、断面積A2、弾性係数E2のチューブの中に置かれている。力Pが作用したときに生じる変位を求めよ。

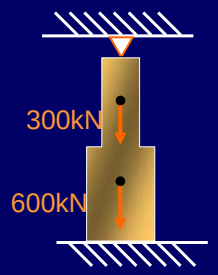


Example2.03

長さLの棒ABが力をかける前に剛体に支持されている。C点に力Pを作用させたときにACとBCに生じる応力を求めよ。



Superposition Method : 重ね合わせ法



不静定力としての反力を仮定する

↓

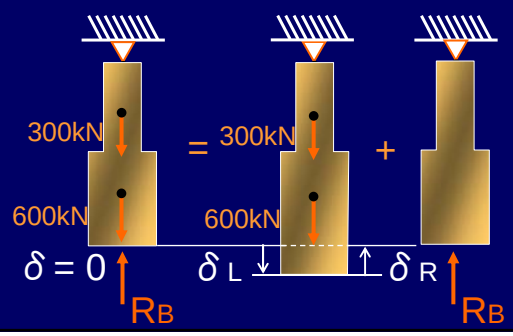
その支持点を除去して考える

↓

不静定力をunknownの力としてつりあい式をたてる

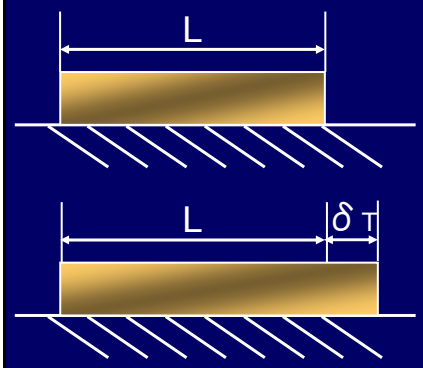
↓

変位の適合条件に合わせて重ね合わせる



Problems Involving Temperature Changes
温度変化に伴う問題、温度応力

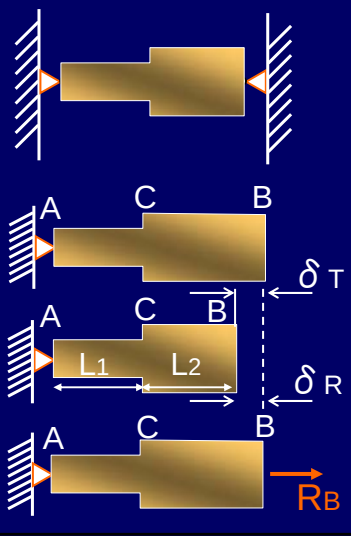
- 温度変化により構造部材は伸び縮みする
- 拘束があれば内部応力が発生する
- 道路構造物や鉄道構造物で重要な問題



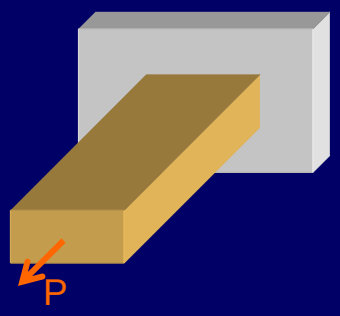
伸縮装置
Expansion Joint
レール座屈 など

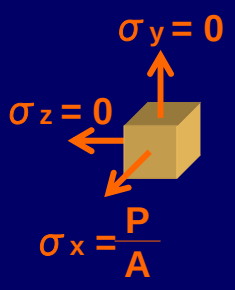
Example 2.06

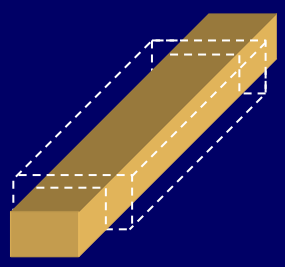
鋼製棒の両端が温度＋24度できちんと支持され、鋼棒の温度が−45度に変わったときに棒のAC部およびCB部に生じる応力を求めよ。鋼のE=200GPa、α＝11.7x10^{-6}/℃とする。



Poisson's Ratio：ポアソン比







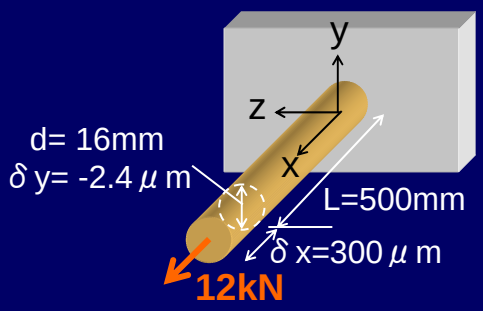
部材は力の方向に伸び（縮み）、
その直角方向には縮む（伸びる）。

ひずみの比をポアソン比と呼ぶ

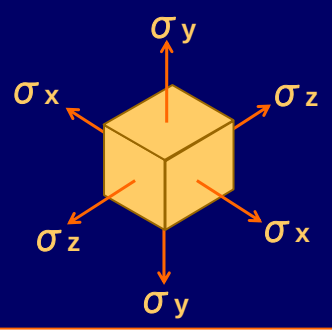
$$\nu = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = -\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x}$$

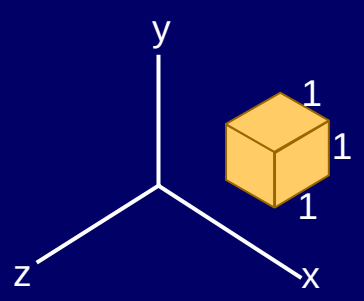
Example 2.07

直径16mm長さ500mmの均質で等方性の材料でできた棒に12kN の力を作用させたとき、棒は300μm伸び、直径は2.4μm減少した。材料の弾性係数とポアソン比を求めよ。



多軸外力下でのひずみ，フックの法則の一般化

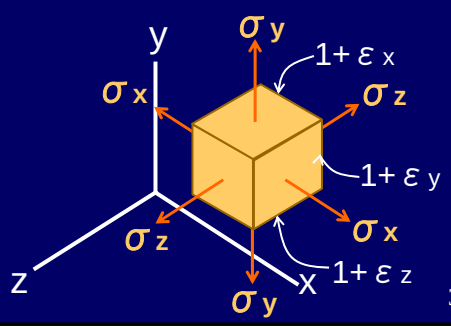




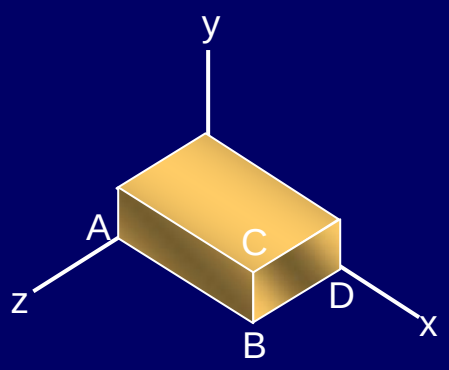
$$\varepsilon_x = +\frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E}$$

$$\varepsilon_y = -\frac{\nu\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E}$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E}$$



Example 2.08

下図の鋼製のブロックがすべての面から等しい強さの圧力を受けている。いま、ABの長さの変化が -30x10^{-3}mであるとき、

(a) ほかの2辺の長さの変化を求めよ。
(b) かかっている圧力pを求めよ。
ただし、E＝200GPa, ν ＝0.29である。