

材料と部材の力学 解答 第2回

1.

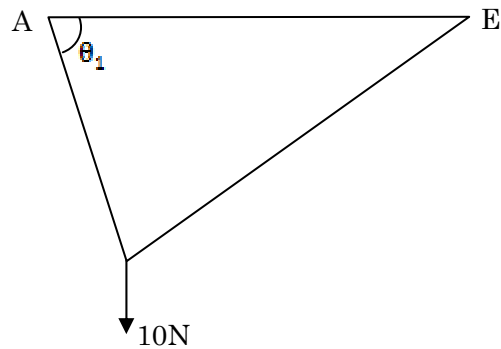
余弦定理より、

$$\cos \theta_1 = \frac{15^2 + 9^2 - 10^2}{2 \times 15 \times 9} \quad (1.1)$$

これを解くと、

$$\cos \theta_1 = 0.167$$

$$\theta_1 = 1.403 \text{ rad}$$



2.

対称性より、左側の変位を求める。

AB 間、BC 間の張力をそれぞれ T_1 、 T_2 、
A 点での水平反力を H とおく。

AE 間の長さは 15m より、

$$2 \times 5(\cos \theta_1 + \cos \theta_2) = 15 \quad (2.1)$$

各点の x,y 両方向の釣り合いより、

$$T_1 \cos \theta_1 = T_2 \cos \theta_2 = H \quad (2.2)$$

$$V = T_1 \sin \theta_1 = T_2 \sin \theta_2 + 10 \quad (2.3)$$

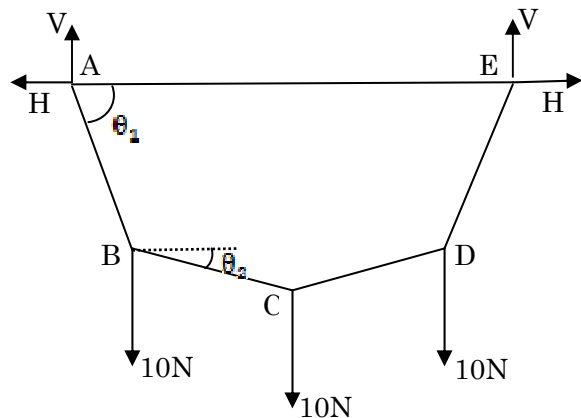
$$2T_2 \sin \theta_2 = 10 \quad (2.4)$$

式(2.3)(2.4)より、

$$T_1 \sin \theta_1 = 15 \Leftrightarrow 10 = \frac{2}{3} T_1 \sin \theta_1$$

$$\therefore T_1 \sin \theta_1 = T_2 \sin \theta_2 + \frac{2}{3} T_1 \sin \theta_1 \quad (2.5)$$

式(2.2)(2.5)より、



$$H \tan \theta_1 = H \tan \theta_2 + \frac{2}{3} H \tan \theta_1$$

$$\tan \theta_1 = 3 \tan \theta_2 \quad (2.6)$$

式(2.1)(2.6)と、 $\frac{1}{\cos^2 \theta} - 1 = \tan^2 \theta$ を用いて、 $\cos \theta_1$ についての式を得る。

$$32 \cos^4 \theta_1 - 96 \cos^3 \theta_1 + 40 \cos^2 \theta_1 - 12 \cos \theta_1 + 9 = 0 \quad (2.7)$$

Newton 法を用いて解くと、

$$\cos \theta_1 = 0.590133 \approx 0.59$$

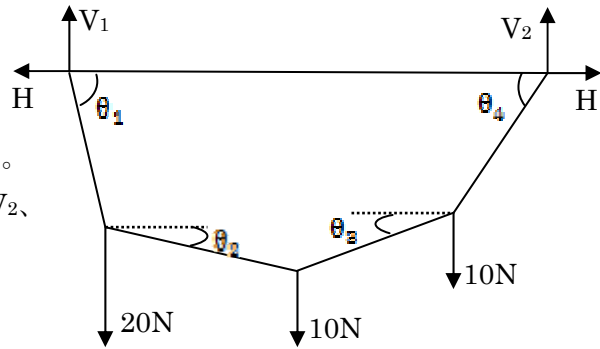
$$\theta_1 = 0.940 \text{ rad}$$

$$\cos \theta_2 = 0.91$$

$$\theta_2 = 0.426 \text{ rad}$$

3.

AB 間、BC 間、CD 間、DE 間の
張力をそれぞれ T_1 、 T_2 、 T_3 、 T_4 とする。
A、E 点での支点反力をそれぞれ V_1 、 V_2 、
水平反力を H と置く。



AE 間の長さ 15m より、

$$\sum_{i=1}^4 \cos\theta_i = 3 \quad (3.1)$$

各点の力の釣り合いより、

$$T_1 \cos\theta_1 = H \quad (3.2)$$

$$V_1 = T_1 \sin\theta_1 = T_2 \sin\theta_2 + 20 \quad (3.3)$$

$$V_2 = T_4 \sin\theta_4 = T_3 \sin\theta_3 + 10 \quad (3.4)$$

$$T_2 \sin\theta_2 + T_3 \sin\theta_3 = 10 \quad (3.5)$$

中央深さに着目すると、

$$\sin\theta_1 + \sin\theta_2 = \sin\theta_3 + \sin\theta_4 \quad (3.6)$$

式(3.2)を用いて(3.3)を変形すると、

$$H \tan\theta_1 = H \tan\theta_2 + 20 \quad (3.7)$$

同様に、式(3.4)、(3.5)についても変形すると、

$$H \tan\theta_4 = H \tan\theta_3 + 10 \quad (3.8)$$

$$H \tan\theta_2 + H \tan\theta_3 = 10 \quad (3.9)$$

式(3.7)、(3.8)、(3.9)より、

$$\tan\theta_1 - 3\tan\theta_2 - 2\tan\theta_3 = 0 \quad (3.10)$$

$$\tan\theta_2 + 2\tan\theta_3 - \tan\theta_4 = 0 \quad (3.11)$$

式(3.1)(3.6)(3.10)(3.11)は θ_1 のみの式であるので、4式を連立させて解く。

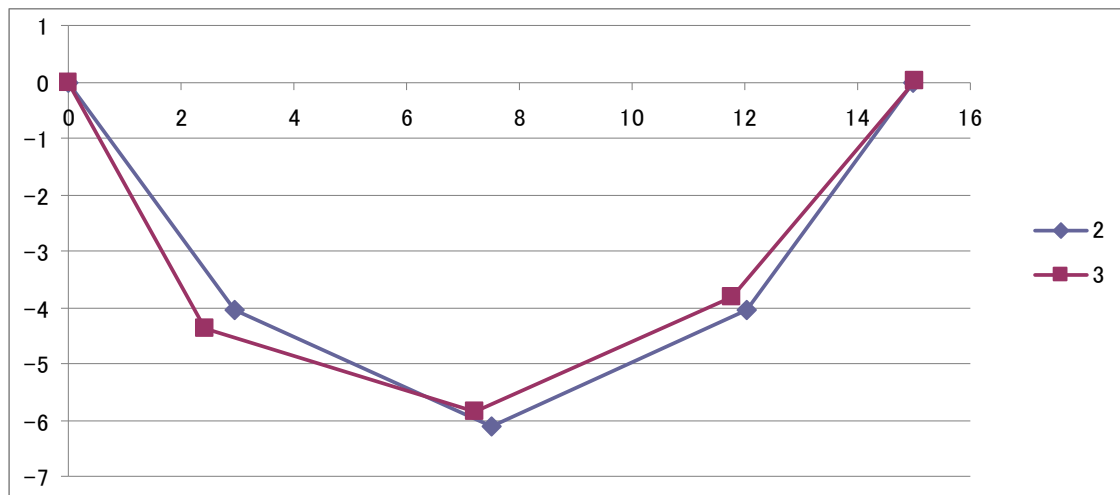
$$\theta_1 = 1.064 \text{ rad}$$

$$\theta_2 = 0.298 \text{ rad}$$

$$\theta_3 = 0.415 \text{ rad}$$

$$\theta_4 = 0.671 \text{ rad}$$

2, 3 の形状は以下のようになる。



補足：カテナリー曲線

カテナリー曲線とは、両端を固定されて垂れ下がったロープの形状を表す曲線であり、言い換えると、垂直方向に等分布加重がかかっている時のロープの形状である。

形状は次式で表される。

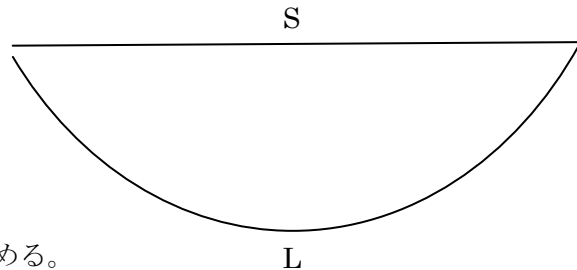
$$y=C\cosh(x/C) \quad (1)$$

$C=T/w$:カテナリー数

T :水平張力(N)

w :1mあたりの重量(N/m)

また、ロープ長 L と径間 S の間の関係を求める。



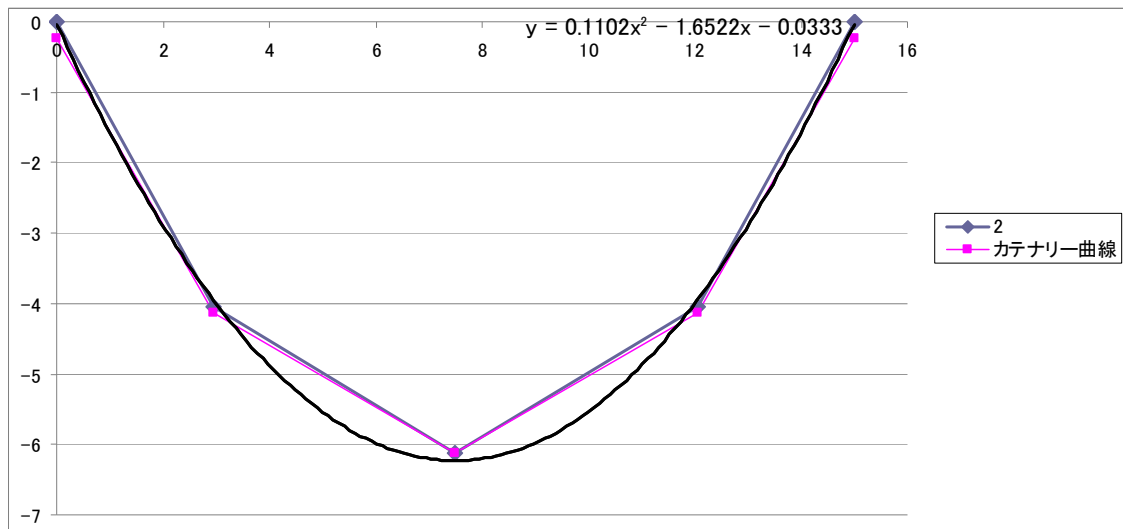
$$\begin{aligned} L &= \int dL \\ &= \int \sqrt{dx^2 + dy^2} \\ &= \int_{-s/2}^{s/2} \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} dx \\ &= 2 \int_0^{s/2} \sqrt{1 + \sinh^2\left(\frac{x}{C}\right)} dx \\ &= 2 \int_0^{s/2} \cosh\left(\frac{x}{C}\right) dx \\ &= 2 \left[C \sinh\left(\frac{x}{C}\right) \right]_0^{s/2} \\ &= 2C \sinh\left(\frac{x}{2C}\right) \quad (2) \end{aligned}$$

今、問2において、 $30\text{N}=1.5\text{N/m}$ の等分布加重を仮定する。

$W=1.5\text{N/m}$ より、式②に代入すると、 $T=8.325\text{N}$ となり、

$$C=5.55 \quad (3)$$

式③を①に代入して、2の解と重ねあわせると以下の形状になる。



黒線は、2 の解の 2 次近似曲線である。

上図より、各点に 10N の荷重がかかったロープの形状は、1.5N/m の等分布荷重のときの
カテナリー曲線とほぼ一致する。