6.散乱行列による回路表現

6.1 散乱行列の定義

無損失な伝送線路を考える。

$$V(y)=V_i e^{j\beta y}+V_r e^{-j\beta y}=\sqrt{R_c}\left(\frac{V_i}{\sqrt{R_c}}e^{j\beta y}+\frac{V_r}{\sqrt{R_c}}e^{-j\beta y}\right)$$

$$I(y)=\frac{1}{R_c}\left(V_i e^{j\beta y}-V_r e^{-j\beta y}\right)=\frac{1}{\sqrt{R_c}}\left(\frac{V_i}{\sqrt{R_c}}e^{j\beta y}-\frac{V_r}{\sqrt{R_c}}e^{-j\beta y}\right) \qquad (6.1)$$

ここで、次の量を定義する。(自乗すると電力になる)

$$a(y)=\frac{V_i}{\sqrt{R_c}}e^{j\beta y}\rightarrow\left|a(y)\right|^2=\frac{\left|V_i\right|^2}{R_c}:\text{入射電力}$$

$$b(y)=\frac{V_r}{\sqrt{R_c}}e^{-j\beta y}\rightarrow\left|b(y)\right|^2=\frac{\left|V_r\right|^2}{R_c}:\text{反射電力}$$

$$V(y)=\sqrt{R_c}\left(a(y)+b(y)\right) \qquad (6.2.a)$$

$$I(y)=\frac{1}{\sqrt{R_c}}\left(a(y)-b(y)\right) \qquad (6.2.b)$$

$$a(y)=\frac{V(y)+R_c I(y)}{2\sqrt{R_c}} \qquad (6.3.a)$$

$$b(y)=\frac{V(y)-R_c I(y)}{2\sqrt{R_c}} \qquad (6.3.b)$$

$a(y)$、$b(y)$を用いて 2 開口(4 端子)回路を表現する。

$$a_1(y)=\frac{V_1(y)+R_{c1}I_1(y)}{2\sqrt{R_{c1}}}$$

$$b_1(y)=\frac{V_1(y)-R_{c1}I_1(y)}{2\sqrt{R_{c1}}}$$

$$a_2(x)=\frac{V_2(x)+R_{c2}I_2(x)}{2\sqrt{R_{c2}}}$$

$$b_2(x)=\frac{V_2(x)-R_{c2}I_2(x)}{2\sqrt{R_{c2}}}$$

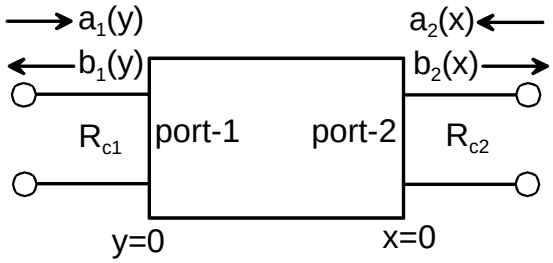

Fig.6.1　2 開口回路における a_i ， b_i

$a(y)$、$b(y)$は観測する位置 y、x によって位相が変わる。→ 参照面

・2 開口回路を記述するために、参照面の位置を $y=0$(port-1)、$x=0$(port-2)とする。

・反射波 $b_1(0)=b_1$、$b_2(0)=b_2$ を入射波 $a_1(0)=a_1$、$a_2(0)=a_2$ で表現する。

線形回路では、次のように表すことができる。

$$b_1=S_{11}a_1+S_{12}a_2 \qquad (6.4.a)$$

$$b_2=S_{21}a_1+S_{22}a_2 \qquad (6.4.b)$$

行列表現：

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \tag{6.5}$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{S}\mathbf{a}$$

S：散乱行列。対角要素は各開口における反射、非対角要素は伝達を表す。

・任意の線形、受動、時不変回路は散乱行列を用いて記述することができる。

・3 開口以上の多開口回路も同様。

6.2.回路の無損失性

入力電力は次式で表される。

$$|a_1|^2 + |a_2|^2 + \ldots + |a_n|^2 = (a_1^*, a_1^*, \ldots, a_n^*) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \tilde{\mathbf{a}}\mathbf{a} \tag{6.6}$$

$\tilde{\mathbf{a}}$: transpose conjugate of $\mathbf{a}$

無損失条件は、入力電力=出力電力であるから、

$$\tilde{\mathbf{a}}\mathbf{a} = \tilde{\mathbf{b}}\mathbf{b}$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{S}\mathbf{a}$$

$$\tilde{\mathbf{b}} = \tilde{\mathbf{a}}\tilde{\mathbf{S}}$$

$$\tilde{\mathbf{a}}\mathbf{a} - \tilde{\mathbf{b}}\mathbf{b} = \tilde{\mathbf{a}}\mathbf{a} - \tilde{\mathbf{a}}\tilde{\mathbf{S}}\mathbf{S}\mathbf{a} = \tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{S}}\mathbf{S})\mathbf{a} = 0$$

$$\therefore \tilde{\mathbf{S}}\mathbf{S} = \mathbf{S}\tilde{\mathbf{S}} = \mathbf{I} \tag{6.7}$$

すなわち、無損失回路の散乱行列はユニタリー行列になる。

6.3.回路の可逆性

$$\left.\frac{b_2}{a_1}\right|_{a2=0} = \left.\frac{b_1}{a_2}\right|_{a1=0}$$

$$\therefore S_{21} = S_{12} \tag{6.8}$$

一般に、n 開口回路が可逆回路の場合 $S_{ij} = S_{ji}$ となる。すなわち散乱行列は対称行列になる。

6.4.散乱行列と伝達行列

伝達行列を次のように定義する。

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_2 \\ a_2 \end{pmatrix} \tag{6.9}$$

一方、散乱行列の定義(9.5)から、

$$a_1 = \frac{1}{S_{21}} b_2 - \frac{S_{22}}{S_{21}} a_2$$

$$b_1 = \frac{S_{11}}{S_{21}} b_2 + \left(S_{12} - \frac{S_{11} S_{22}}{S_{21}} \right) a_2$$

式(6.9)と比較して、次の関係式を得る。

$$\begin{aligned} T_{11} &= \frac{1}{S_{21}} \\ T_{12} &= -\frac{S_{22}}{S_{21}} \\ T_{21} &= \frac{S_{11}}{S_{21}} \\ T_{22} &= S_{12} - \frac{S_{11} S_{22}}{S_{21}} \end{aligned} \tag{6.10}$$

回路を縦続接続する場合は、伝達行列で表現する方が適している。

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \mathbf{T}_1 \begin{pmatrix} b_2' \\ a_2' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} b_2' \\ a_2' \end{pmatrix} = \mathbf{T}_2 \begin{pmatrix} b_2 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \mathbf{T}_1 \mathbf{T}_2 \begin{pmatrix} b_2 \\ a_2 \end{pmatrix} \tag{6.11}$$

6.5.散乱行列の求め方

6.5.1 整合終端

開口 2 側に $Z_{L2} = R_{c2}$ なる整合負荷を接続すると、$a_2 = 0$ となるので、

$$b_1 = S_{11} a_1 \rightarrow S_{11} = \left. \frac{b_1}{a_1} \right|_{a2=0} \tag{6.12.a}$$

$$b_2 = S_{21} a_1 \rightarrow S_{21} = \left. \frac{b_2}{a_1} \right|_{a2=0} \tag{6.12.b}$$

同様に、整合負荷によって $a_1 = 0$ とすれば、

$$S_{12} = \left. \frac{b_1}{a_2} \right|_{a1=0} \tag{6.13.a}$$

$$S_{22} = \left. \frac{b_2}{a_2} \right|_{a1=0} \tag{6.13.b}$$

6.5.2 Deshamp の方法

開口 2 側の負荷インピーダンスが Z_{L2} のとき、負荷での反射係数は次式で与えられる。

$$S_2 = \frac{a_2}{b_2} = \frac{Z_{L2} - R_{c2}}{Z_{L2} + R_{c2}}$$

$$\frac{b_2}{a_1} = \frac{a_2}{S_2}\frac{1}{a_1} = S_{21} + S_{22}\frac{a_2}{a_1} \rightarrow \frac{a_2}{a_1}\left(\frac{1}{S_2} - S_{22}\right) = \mathrm{S}_{21}$$

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{\mathrm{S}_{21}S_2}{1 - S_{22}S_2}$$

$$\mathrm{S}_1 = \frac{b_1}{a_1} = S_{11} + \mathrm{S}_{12}\frac{a_2}{a_1} = \frac{S_{11} + (S_{12}S_{21} - S_{11}S_{22})S_2}{1 - S_{22}S_2} \qquad (6.14)$$

S_1 を S_2 の関数として表現する（複素関数の一次変換）

S_2 を既知の円周上で変化させ、対応する S_1 を測定する。（S_1 の軌跡も円になる）

⇒　円の中心、半径、対応する点の関係などから複素定数 S_{ij} $(\mathrm{i, j} = 1,2)$ を求めることができる。

特に、Z_{L2} を可変短絡版で形成すると、$S_2 = -\exp(-2j\beta x)$ と表される。

$$(1 - S_{22}S_2)S_1 = S_{11} + (S_{12}S_{21} - S_{11}S_{22})\mathrm{S}_2$$

$$\left((S_{12}S_{21} - S_{11}S_{22}) + S_{22}S_1\right)S_2 = S_1 - S_{11}$$

$$\mathrm{S}_2 = \frac{S_1 - S_{11}}{S_{22}S_1 + (S_{12}S_{21} - S_{11}S_{22})} \qquad (6.15)$$

$|S_2| = 1$ より、$S_2\overline{S}_2 - 1 = 0$ に代入して

$$\left(1 - S_{22}\overline{S}_{22}\right)S_1\overline{S}_1 - \left((S_{12}S_{21} - S_{11}S_{22})\overline{S}_{22} + S_{11}\right)\overline{S}_1 - \left(\overline{(S_{12}S_{21} - S_{11}S_{22})}S_{22} + \overline{S}_{11}\right)S_1 + \left(S_{11}\overline{S}_{11} - (S_{12}S_{21} - S_{11}S_{22})\overline{(S_{12}S_{21} - S_{11}S_{22})}\right) = 0 \qquad (6.16)$$

一般に、複素数 z に対して、$z\overline{z} - B\overline{z} - \overline{B}z + C = 0$ は中心 B、半径 $\sqrt{B\overline{B} - C}$ の円を表す。式(6.16)から、S_1 の軌跡は円であり、その中心、半径はそれぞれ次のようになる。

$$\text{中心} = \frac{D\overline{S_{22}} + S_{11}}{1 - S_{22}\overline{S_{22}}} = \frac{S_{12}S_{21}\overline{S_{22}}}{1 - S_{22}\overline{S_{22}}} + S_{11} \qquad (6.17.\mathrm{a})$$

$$\text{半径} = \frac{\sqrt{\left|D\overline{S_{22}} + S_{11}\right|^2 - (1 - S_{22}\overline{S_{22}})(S_{11}\overline{S_{11}} - D\overline{D})}}{1 - S_{22}\overline{S_{22}}} = \frac{|S_{12}S_{21}|}{1 - S_{22}\overline{S_{22}}} \qquad (6.17.\mathrm{b})$$

ただし、$D = (S_{12}S_{21} - S_{11}S_{22})$

短絡板の位置 x を変化させると S_2 は単位円上を移動する。→ S_1 の軌跡(円)を測定することによって、円の中心、半径が求まる。$S_2 = \pm 1$ に対する S_1 の値 $S_1 = \dfrac{S_{11} \pm (S_{12}S_{21} - S_{11}S_{22})}{1 \mp S_{22}}$ を含む、適当な S_2 に対する S_1 の値から行列 $[S]$ の要素を決定することができる。

[付録] 複素平面における円の表現

$$w=\frac{az+b}{cz+d} \tag{6.18}$$

で、$z=S_2$、$w=S_1$と考えると、

$$ad-bc=(S_{12}S_{21}-S_{11}S_{22})-S_{11}(-S_{22})=S_{12}S_{21}$$

であるから$ad-bc\neq 0$は$S_{12}S_{21}\neq 0$に対応する。

[円-円一次変換]

zが中心z_0、半径rの円上を移動するとすれば、

$$|z-z_0|=r$$

$$z\bar{z}-z_0\bar{z}-\bar{z}_0z+|z_0|^2=r^2$$

したがって、一般に円の方程式は、$Az\bar{z}-B\bar{z}-\bar{B}z+C=0$　（A、C は実数）と表せる。

$$z_0=\frac{B}{A},\qquad r=\sqrt{\frac{B\bar{B}-AC}{A^2}}$$

$w=\dfrac{az+b}{cz+d}$ より $z=\dfrac{dw-b}{a-cw}$

$Az\bar{z}-B\bar{z}-\bar{B}z+C=0$ に代入すると、

$$(Ad\bar{d}+B\bar{d}c+\bar{B}d\bar{c}+Cc\bar{c})w\bar{w}-(Ab\bar{d}+Ba\bar{d}+\bar{B}b\bar{c}+Ca\bar{c})\bar{w}$$
$$-(A\bar{b}d+\bar{B}\bar{a}d+B\bar{b}c+C\bar{a}c)w+(Ab\bar{b}+Ba\bar{b}+\bar{B}\bar{a}b+Ca\bar{a})=0$$

つまり$A_1w\bar{w}-B_1\bar{w}-\bar{B}_1w+C_1=0$なる円の方程式になる。

ここで、

$$A_1=Ad\bar{d}+(B\bar{d}c+\bar{B}d\bar{c})+Cc\bar{c}$$

$$C_1=Ab\bar{b}+(Ba\bar{b}+\bar{B}\bar{a}b)+Ca\bar{a}$$

はいずれも実数であり、

$$B_1\overline{B_1}-A_1C_1=(B\bar{B}-AC)|ad-bc|^2>0$$

である。

wの円の中心$=\dfrac{B_1}{A_1}$、半径$=\sqrt{\dfrac{B_1\overline{B_1}-A_1C_1}{A_1{}^2}}$