

5.誘電体導波路

$$\varepsilon_r = n^2 \quad (\text{誘電体導波路では } \mu_r = 1)$$

5.1.誘電体スラブ導波路の決定方程式

二次元導波路。厳密解が得られる。

$n_1 > n_2, n_3$ とする。

n_1 と n_2 n_1 と n_3 の境界における電磁界の接線成分連続条件から、次の特性方程式を導出することができる。

(a) TE モード (E_x, H_y, H_z)

$\frac{\partial}{\partial x} = 0$ (スラブ導波路なので x 方向に変化なし)、 z 方向依存性は $e^{-j\beta z}$ (z 方向に伝搬) という条件のもとでマクスウェルの方程式を書き下す。

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} + j\beta H_y = j\omega\varepsilon E_x \quad (5.1.a)$$

$$-j\beta H_x = j\omega\varepsilon E_y \quad (5.1.b)$$

$$-\frac{\partial H_x}{\partial y} = j\omega\varepsilon E_z \quad (5.1.c)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} + j\beta E_y = -j\omega\mu_0 H_x \quad (5.2.a)$$

$$-j\beta E_x = -j\omega\mu_0 H_y \quad (5.2.b)$$

$$-\frac{\partial E_x}{\partial y} = -j\omega\mu_0 H_z \quad (5.2.c)$$

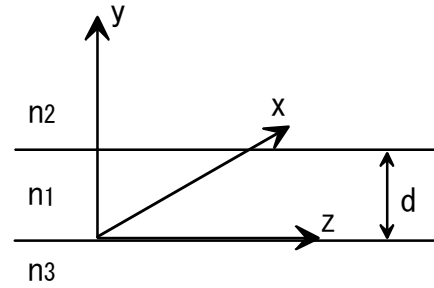


Fig.5.1 誘電体スラブ導波路

(5.1.a)、(5.2.b)、(5.2.c)を整理すると次の波動方程式を得る。((5.1.b)、(5.1.c)、(5.2.a)とは独立)

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + (\omega^2 \varepsilon \mu_0 - \beta^2) E_x = 0 \quad (5.3)$$

(5.3)の解として、 E_x は次のようにおくことができる。ただし、境界 $y = 0, d$ において E_x (電界接線成分)が連続になるように係数を選んでいる。

$$E_x = \begin{cases} (A \cos u d + B \sin u d) e^{-w_2(y-d)} & : y \geq d \\ A \cos u y + B \sin u y & : d \geq y \geq 0 \\ A e^{w_3 y} & : 0 \geq y \end{cases} \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned}
w_2 &= \sqrt{\beta^2 - n_2^2 \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0} = \sqrt{\beta^2 - n_2^2 k_0^2} \\
u &= \sqrt{n_1^2 \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 - \beta^2} = \sqrt{n_1^2 k_0^2 - \beta^2} \\
w_3 &= \sqrt{\beta^2 - n_3^2 \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0} = \sqrt{\beta^2 - n_3^2 k_0^2} \\
k_0 &= \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} = \frac{2\pi}{\lambda}
\end{aligned}$$

残りの境界条件として、“ $y=0, d$ で $H_z = \frac{1}{j\omega\mu_0} \frac{\partial E_x}{\partial y}$ が連続”であることを課し、係数 A、

B がともにゼロになることが無いことから、次の特性方程式が導かれる。

$$\tan ud = \frac{u(w_2 + w_3)}{u^2 - w_2 w_3} \quad (5.5)$$

(b)TM モード (H_x, E_y, E_z)

同様に、(5.1.b)、(5.1.c)、(5.2.a)を用いると次の特性方程式が導かれる。

$$\tan ud = \frac{\frac{u}{n_1^2} \left(\frac{w_2}{n_2^2} + \frac{w_3}{n_3^2} \right)}{\left(\frac{u}{n_1^2} \right)^2 - \frac{w_2}{n_2^2} \frac{w_3}{n_3^2}} \quad (5.6)$$

(c)対称スラブ導波路

特別な場合として、 $n_2 = n_3$ の場合は、

$$\begin{aligned}
\tan 2u \frac{d}{2} &= \frac{2uw}{u^2 - w^2} = \frac{2 \frac{w}{u}}{1 - \left(\frac{w}{u} \right)^2} \quad (\text{TE mode}) \\
w &= w_2 = w_3
\end{aligned} \quad (5.7)$$

より、次式を得る。

$$\begin{aligned}
\tan^2 \frac{ud}{2} + \left(\frac{u}{w} - \frac{w}{u} \right) \tan \frac{ud}{2} - 1 &= 0 \\
\left(\tan \frac{ud}{2} - \frac{w}{u} \right) \left(\tan \frac{ud}{2} + \frac{u}{w} \right) &= 0
\end{aligned}$$

したがって、特性方程式は次の2式に分離することができる。

$$\tan \frac{ud}{2} = \frac{w}{u} \quad (\text{even mode}) \quad (5.8.a)$$

$$\tan \frac{ud}{2} = -\frac{u}{w} \quad (\text{odd mode}) \quad (5.8.b)$$

5.2.単一モード条件

式(5.5)は次のように変形できる。

$$\tan ud = \frac{\frac{w_2}{u} + \frac{w_3}{u}}{1 - \frac{w_2}{u} \frac{w_3}{u}}$$

$$ud = \tan^{-1} \frac{w_2}{u} + \tan^{-1} \frac{w_3}{u} + m\pi \quad (5.9)$$

ここで、 $n_2 = n_3$ の場合は $w_2 = w_3 = w = \sqrt{\beta^2 - n_2^2 k_0^2}$ として

$$u \frac{d}{2} = \tan^{-1} \frac{w}{u} + \frac{\pi}{2} m$$

すなわち、

$$\sqrt{n_1^2 k_0^2 - \beta^2} \frac{d}{2} = \tan^{-1} \frac{\sqrt{\beta^2 - n_2^2 k_0^2}}{\sqrt{n_1^2 k_0^2 - \beta^2}} + \frac{\pi}{2} m \quad (5.10)$$

これを次のように変形する。

$$\sqrt{n_1^2 k_0^2 - \beta^2} = k_0 \sqrt{n_1^2 - \frac{\beta^2}{k_0^2}} = k_0 \sqrt{(n_1^2 - n_2^2) + n_2^2 - \frac{\beta^2}{k_0^2}} = k_0 \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \sqrt{1 - \frac{\frac{\beta^2}{k_0^2} - n_2^2}{n_1^2 - n_2^2}}$$

$$\frac{\sqrt{\beta^2 - n_2^2 k_0^2}}{\sqrt{n_1^2 k_0^2 - \beta^2}} = \frac{\sqrt{\frac{\beta^2}{k_0^2} - n_2^2}}{\sqrt{1 - \frac{\frac{\beta^2}{k_0^2} - n_2^2}{n_1^2 - n_2^2}}}$$

ここで、 $b = \frac{\frac{\beta^2}{k_0^2} - n_2^2}{n_1^2 - n_2^2}$ (規格化伝搬定数) とすると、 $n_2 k_0 < \beta < n_1 k_0$ であるから、 $0 < b < 1$ の範囲の値をとりえる。規格化伝搬定数を用いて、式(5.10)は次のように整理できる。

$$\frac{d}{2} k_0 \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \sqrt{1-b} = \tan^{-1} \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{1-b}} + \frac{\pi}{2} m \quad (5.11)$$

式(5.11)の根 b は、左辺と右辺の交点として求まる。 $0 < b < 1$ に対して、 $\tan^{-1} \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{1-b}}$ は

$0 < \tan^{-1} \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{1-b}} < \frac{\pi}{2}$ の範囲で変化するので、式(5.11)が $m=0$ 以外に根を持たない条件は、

$\frac{d}{2} k_0 \sqrt{n_1^2 - n_2^2} < \frac{\pi}{2}$ となる (式(5.11)の左辺の最大値が $\frac{\pi}{2}$ より大きくならない条件)。これが単

一モードだけが伝搬可能な条件となる。

ここで、 $V = \frac{d}{2} k_0 \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$ は、導波路の V 値 (V パラメータ) と呼ばれる。

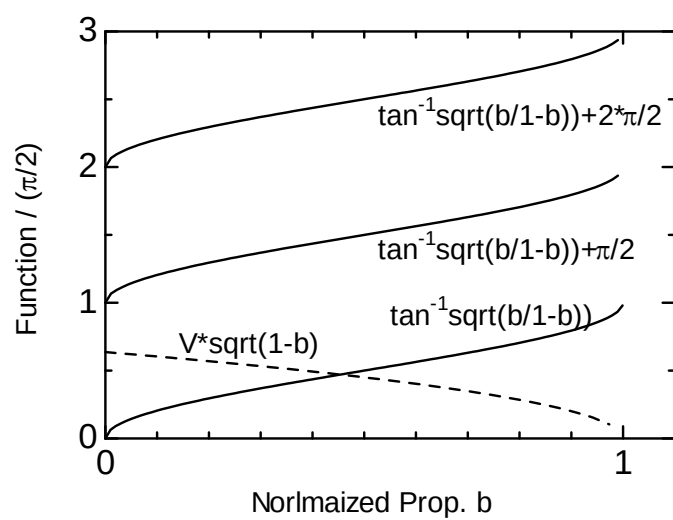


Fig.5.2 対称スラブ導波路 (TE モード) の特性方程式の解