

## 4.導波管

### 4.1.矩形導波管

時間  $t$  と位置  $z$  に対する依存性は  $e^{j\omega t - \gamma z}$  と仮定する。

(1)TE モード ( $E_z = 0$ )

$$\gamma E_y = -j\omega\mu H_x \quad (4.1.a)$$

$$-\gamma E_x = -j\omega\mu H_y \quad (4.1.b)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -j\omega\mu H_z \quad (4.1.c)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} + \gamma H_y = j\omega\epsilon E_x \quad (4.1.d)$$

$$-\gamma H_x - \frac{\partial H_z}{\partial x} = j\omega\epsilon E_y \quad (4.1.e)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = 0 \quad (4.1.f)$$

(4.1.b)より

$$H_y = \frac{\gamma}{j\omega\mu} E_x$$

(4.1.d)に代入して

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_z}{\partial y} + \frac{\gamma^2 E_x}{j\omega\mu} &= j\omega\epsilon E_x \\ E_x &= \frac{-j\omega\mu}{\gamma^2 + \omega^2\epsilon\mu} \frac{\partial H_z}{\partial y} = \frac{-j\omega\mu}{\beta_c^2} \frac{\partial H_z}{\partial y} \end{aligned} \quad (4.2)$$

同様に、(4.1.a)、(4.1.e)から

$$E_y = \frac{j\omega\mu}{\beta_c^2} \frac{\partial H_z}{\partial x} \quad (4.3)$$

(4.3)、(4.2)を、それぞれ(4.1.a)、(4.1.b)に代入して

$$H_x = \frac{-\gamma}{\beta_c^2} \frac{\partial H_z}{\partial x} \quad (4.4)$$

$$H_y = \frac{-\gamma}{\beta_c^2} \frac{\partial H_z}{\partial y} \quad (4.5)$$

(4.1.c)に代入して

$$\begin{aligned} \frac{j\omega\mu}{\beta_c^2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{j\omega\mu}{\beta_c^2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} &= -j\omega\mu H_z \\ \therefore \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} &= -\beta_c^2 H_z \end{aligned} \quad (4.6)$$

$H_z$  の変数分離解を仮定して、 $H_z = X(x)Y(y)$  とおくと

$$\begin{aligned} \frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y(y)} \frac{d^2 Y}{dy^2} &= -\beta_c^2 \\ \frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X}{dx^2} &= -\beta_x^2 \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\frac{1}{Y(y)} \frac{d^2 Y}{dy^2} = -\beta_y^2 \quad (4.8)$$

$$\beta_x^2 + \beta_y^2 = \beta_c^2$$

(4.7)、(4.8)から

$$X(x) = A \sin \beta_x x + B \cos \beta_x x \quad (4.9)$$

$$Y(y) = C \sin \beta_y y + D \cos \beta_y y \quad (4.10)$$

$x = 0, a$  における境界条件  $E_y = 0$  を適用する

$$E_y = \frac{j\omega\mu}{\beta_c^2} \frac{\partial H_z}{\partial x} = \frac{j\omega\mu}{\beta_c^2} \beta_x (A \cos \beta_x x - B \sin \beta_x x) Y(y)$$

であるから、

$$A = 0 \quad (E_y = 0 \quad \text{at} \quad x = 0)$$

$$\sin \beta_x a = 0 \quad (E_y = 0 \quad \text{at} \quad x = a)$$

$$\therefore \beta_x = \frac{m\pi}{a}$$

同様に、 $y = 0, b$  における境界条件  $E_x = 0$  より

$$C = 0$$

$$\sin \beta_y b = 0 \quad \therefore \beta_y = \frac{n\pi}{b}$$

以上より、

$$H_z = H_0 \cos \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y \quad (4.11.a)$$

但し、 $n$  と  $m$  は同時に 0 にはならない。

$$E_x = \frac{j\omega\mu}{\beta_c^2} H_0 \frac{n\pi}{b} \cos \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \quad (4.11.b)$$

$$E_y = -\frac{j\omega\mu}{\beta_c^2} H_0 \frac{m\pi}{a} \sin \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y \quad (4.11.c)$$

$$H_x = \frac{\gamma}{\beta_c^2} H_0 \frac{m\pi}{a} \sin \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y \quad (4.11.d)$$

$$H_y = \frac{\gamma}{\beta_c^2} H_0 \frac{n\pi}{b} \cos \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \quad (4.11.e)$$

$$\beta_c^2 = \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 = \gamma^2 + \omega^2 \epsilon \mu$$

$$\therefore \gamma = \pm \sqrt{\left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 - \omega^2 \epsilon \mu}$$

(2) TM モード ( $H_z = 0$ )

TE モードで  $E$  と  $H$ 、 $-j\omega\mu$  と  $j\omega\epsilon$  を交換して、境界条件  $E_z = 0$  ( $x = 0$  and  $a$ )、 $E_z = 0$  ( $y = 0$  and  $b$ ) を課すと、TE モードと同様に次の界成分が導出される。

$$E_z = E_0 \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \quad (m, n \geq 1) \quad (4.12.a)$$

$$E_x = \frac{-\gamma}{\beta_c^2} E_0 \frac{m\pi}{a} \cos \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \quad (4.12.b)$$

$$E_y = \frac{-\gamma}{\beta_c^2} E_0 \frac{n\pi}{b} \sin \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y \quad (4.12.c)$$

$$H_x = \frac{j\omega\epsilon}{\beta_c^2} E_0 \frac{n\pi}{b} \sin \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y \quad (4.12.d)$$

$$H_y = \frac{-j\omega\epsilon}{\beta_c^2} E_0 \frac{m\pi}{a} \cos \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \quad (4.12.e)$$

$$\gamma = \pm \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \omega^2 \epsilon \mu}$$

(3)直交性

TE モードどうしの電磁界は、次の関係を満足する。

$$\begin{aligned} E_t^e &= \frac{j\omega\mu}{\beta_c^2} \left( -\frac{\partial H_z}{\partial y} \mathbf{i} + \frac{\partial H_z}{\partial x} \mathbf{j} \right) \\ H_t^e &= \frac{-\gamma}{\beta_c^2} \left( \frac{\partial H_z}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial H_z}{\partial y} \mathbf{j} \right) \\ \therefore E_t^e \cdot H_t^e &= \frac{-j\omega\mu\gamma}{\beta_c^4} \left( -\frac{\partial H_z}{\partial x} \frac{\partial H_z}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial x} \frac{\partial H_z}{\partial y} \right) = 0 \end{aligned} \quad (4.13)$$

TM モードどうしの電磁界は、次の関係を満足する。

$$\begin{aligned} E_t^m &= \frac{-\gamma}{\beta_c^2} \left( \frac{\partial E_z}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial E_z}{\partial y} \mathbf{j} \right) \\ H_t^m &= \frac{j\omega\epsilon}{\beta_c^2} \left( \frac{\partial E_z}{\partial y} \mathbf{i} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \mathbf{j} \right) \\ \therefore E_t^m \cdot H_t^m &= \frac{-j\omega\epsilon\gamma}{\beta_c^4} \left( \frac{\partial E_z}{\partial x} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \frac{\partial E_z}{\partial y} \right) = 0 \end{aligned} \quad (4.14)$$

#### 4.2.円形導波管

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{i}_r \left( \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \theta} - \frac{\partial H_\theta}{\partial z} \right) + \mathbf{i}_\theta \left( \frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} \right) + \mathbf{i}_z \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(rH_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial H_r}{\partial \theta} \right) \quad (4.15)$$

(1)TE モード

$$H_z = H_0 J_n(\beta_c r) \cos n\theta \quad (4.16.a)$$

$$E_r = \frac{-j\omega\mu}{\beta_c^2} \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \theta} \quad (4.16.b)$$

$$E_\theta = \frac{j\omega\mu}{\beta_c^2} \frac{\partial H_z}{\partial r} \quad (4.15.c)$$

$$H_r = \frac{-\gamma}{\beta_c^2} \frac{\partial H_z}{\partial r} \quad (4.15.d)$$

$$H_\theta = \frac{-\gamma}{\beta_c^2} \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \theta} \quad (4.15.e)$$

$$(\beta_c^2 = \gamma^2 + \omega^2 \varepsilon \mu)$$

このとき、

$$E_\theta = \frac{j\omega\mu}{\beta_c^2} \beta_c H_0 J_n'(\beta_c r) \cos n\theta \quad (4.16)$$

$r = a$  で  $E_\theta = 0$  より、 $\beta_c a$  は  $J_n'(\beta_c a) = 0$  の根  $q_{nm}$  となる。

$$\beta_c = \frac{q_{nm}}{a} \quad (4.17.a)$$

$$\gamma = \pm \sqrt{\left(\frac{q_{nm}}{a}\right)^2 - \omega^2 \varepsilon \mu} \quad (4.17.b)$$

(2)TM モード

$$E_z = E_0 J_n(\beta_c r) \cos n\theta \quad (4.18.a)$$

$$E_r = \frac{-\gamma}{\beta_c^2} \frac{\partial E_z}{\partial r} \quad (4.18.b)$$

$$E_\theta = \frac{-\gamma}{\beta_c^2} \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \theta} \quad (4.18.c)$$

$$H_r = \frac{j\omega\varepsilon}{\beta_c^2} \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \theta} \quad (4.18.d)$$

$$H_\theta = \frac{-j\omega\varepsilon}{\beta_c^2} \frac{\partial E_z}{\partial r} \quad (4.18.e)$$

$$(\beta_c^2 = \gamma^2 + \omega^2 \varepsilon \mu)$$

このとき、

$$E_\theta = \frac{\gamma}{\beta_c^2} \frac{n}{r} E_0 J_n(\beta_c r) \sin n\theta \quad (4.19)$$

$r = a$  で  $E_\theta = E_z = 0$  より、 $\beta_c a$  は  $J_n(\beta_c a) = 0$  の根  $p_{nm}$  となる。

$$\beta_c = \frac{p_{nm}}{a} \quad (4.20.a)$$

$$\gamma = \pm \sqrt{\left(\frac{p_{nm}}{a}\right)^2 - \omega^2 \varepsilon \mu} \quad (4.20.b)$$

#### 4.3.遮断周波数

遮断周波数： $\gamma = 0$  となる周波数  $\omega_c$

$\omega > \omega_c$ ： $\gamma$  は純虚数  $\rightarrow$  伝搬

$\omega \leq \omega_c$ ： $\gamma$  は実数  $\rightarrow$  伝搬しない（カットオフ）

遮断波長：

$$\lambda_c = \frac{2\pi}{\omega_c \sqrt{\varepsilon \mu}} \quad (4.21)$$

伝搬モード

最も  $\omega_c$  の小さいモード  $\rightarrow$  最低次モード

矩形導波管 ( $a = 2b$ )

$\omega_c$  の小さい順

**TE<sub>10</sub>**

**TE<sub>20</sub>、TE<sub>01</sub>**

**TE<sub>11</sub>、TM<sub>11</sub>**

**TE<sub>21</sub>、TM<sub>21</sub>**

....

円形導波管

$\omega_c$  の小さい順

**TE<sub>11</sub>**

**TM<sub>01</sub>**

**TE<sub>21</sub>**

**TE<sub>01</sub>、TM<sub>11</sub>**

....