

2. 分布定数線路

2.1. 伝送線路方程式

二導体系線路で考える。

※導波管でも固有モードの横電界、横磁界成分に対応させて電圧、電流を定義すれば、二導体系線路と同様に扱うことができる。

$$V(z + \Delta z) = V(z) + \frac{dV(z)}{dz} \Delta z \quad (2.1.a)$$

$$I(z + \Delta z) = I(z) + \frac{dI(z)}{dz} \Delta z \quad (2.1.b)$$

ここで、伝送線路の等価回路を考えてみる。

理想的な導体であっても：

導体に電流が流れる→磁界が発生する→磁界のエネルギー→インダクタンスが存在
導体間の電位差→静電容量が存在

さらに：

導体の導電率は無限ではない（理想導体ではない）→導体に直列抵抗

導体間の媒質は理想的な絶縁体（誘電体）ではない→並列抵抗

これらを考えると、二導体系の線路の等価回路は次のようになる（ただし、線路は均一とする）。

直列インピーダンス $Z_d = R + j\omega L$ (Ω/m)

並列アドミッタンス $Y_d = G + j\omega C$ (Ω^{-1}/m)

したがって、この等価回路（単位長さ当たり）について、次の関係式が成り立つ。

$$V(z) = (Z_d \Delta z) I(z) + V(z + \Delta z) \quad (2.2)$$

$$\frac{dV(z)}{dz} = -Z_d I(z)$$

$$\frac{dI(z)}{dz} = -Y_d V(z) \quad (2.3)$$

この方程式（電信方程式）は、次の微分方程式に帰着される。

$$\frac{d^2 V(z)}{dz^2} = Z_d Y_d V(z) \quad (2.4)$$

この一般解は、次のようになる。

$$\therefore V(z) = V_1 e^{-\gamma z} + V_2 e^{+\gamma z} \quad (2.5)$$

$$I(z) = \frac{\gamma}{Z_d} (V_1 e^{-\gamma z} - V_2 e^{+\gamma z}) = \frac{1}{Z_c} (V_1 e^{-\gamma z} - V_2 e^{+\gamma z}) \quad (2.6)$$

ここで、重要なパラメータ、 γ ：伝搬定数、 Z_c ：特性インピーダンスは次のようになる。

$$\gamma = \sqrt{Z_d Y_d} = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} = \alpha + j\beta \quad (2.7)$$

$$\frac{Z_d}{\gamma} = \sqrt{\frac{Z_d}{Y_d}} = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} = Z_c \quad (2.8)$$

特に、分布定数線路が無損失の場合 $R = G = 0$ であり、それぞれ次のようになる。

$$\gamma = \sqrt{j\omega L j\omega C} = j\omega \sqrt{LC} = j\beta \quad (2.9)$$

$$Z_c = \sqrt{\frac{j\omega L}{j\omega C}} = \sqrt{\frac{L}{C}} = R_c \quad (2.10)$$

ここで、 β : 位相定数、 R_c : 特性抵抗と呼ぶ。

2.2. 反射係数と入力インピーダンス

z 座標は、電源を原点とした座標系である。これに対して、負荷を原点とした y 座標を考える。線路の長さを l とすると $z + y = l$ という関係にあるから、 $V(y)$ 、 $I(y)$ は次のようになる。

$$V(y) = V_i e^{\gamma y} + V_r e^{-\gamma y} \quad (2.11.a)$$

$$I(y) = \frac{1}{Z_c} (V_i e^{\gamma y} - V_r e^{-\gamma y}) = I_i e^{\gamma y} + I_r e^{-\gamma y} \quad (2.11.b)$$

ここで、 $e^{\gamma y}$ は y の負方向に向かう波動（負荷に対する入射波）、 $e^{-\gamma y}$ は y の正方向に向かう波動（負荷からの反射波）を表す。

$y = 0$ (負荷端)において、次の関係が成り立つ。

$$V(0) = V_i + V_r$$

$$I(0) = \frac{1}{Z_c} (V_i - V_r) = I_i + I_r$$

$$Z_L = \frac{V(0)}{I(0)} \quad (2.12)$$

したがって、負荷端における電圧反射係数は次の式で与えられる。

$$\frac{V_r}{V_i} = \frac{Z_L - Z_c}{Z_L + Z_c} = S_v(0) \quad (2.13)$$

同じように計算すると、電流反射係数は $S_i(0) = -S_v(0)$ となる。

ここで、次のことがわかる。

- ・無反射になる条件は $Z_L = Z_c$ (整合負荷) である。
- ・負荷端から距離 y の位置にある任意の点 y において、入射電圧 $V_i e^{\gamma y}$ と反射電圧 $V_r e^{-\gamma y}$ の比を考えると、この点における反射係数は次の式で与えられる。

$$S(y) = \frac{V_r e^{-\gamma y}}{V_i e^{\gamma y}} = S(0) e^{-2\gamma y} \quad (2.14)$$

- ・この点において電圧 $V(y)$ と電流 $I(y)$ の比をとり、負荷を見込むインピーダンス $Z(y)$ を定義する。

$$Z(y) = Z_c \frac{1 + S(y)}{1 - S(y)} = Z_c \frac{Z_L + Z_c \tanh \gamma y}{Z_c + Z_L \tanh \gamma y} \quad (2.15)$$

特に無損失線路の場合、 $\tanh \gamma y = j \tan \beta y$ となるので、

$$Z(y) = R_c \frac{Z_L + jR_c \tan \beta y}{R_c + jZ_L \tan \beta y} \quad (2.16)$$

また、線路の特性インピーダンスで規格化すれば、次のように表される。

$$z_L = \frac{Z_L}{Z_c} \quad (2.17.a)$$

$$S(0) = \frac{z_L - 1}{z_L + 1} \quad (2.17.b)$$

$$z(y) = \frac{z_L + \tanh \gamma y}{1 + z_L \tanh \gamma y} \quad (2.17.c)$$

2.3. 定在波分布

無損失伝送線路で考える。

$$V(y) = V_i e^{j\beta y} (1 + S(0)e^{-j2\beta y}) \quad (2.18.a)$$

$$I(y) = \frac{V_i e^{j\beta y}}{R_c} (1 - S(0)e^{-j2\beta y}) \quad (2.18.b)$$

ここで、

- (a) $S(0)$ は負荷インピーダンスと線路の特性インピーダンスで決まる。
- (b) 複素平面上で、 $-S(0)$ は $S(0)$ を原点中心に 180° 回転した位置にある。
- (c) $S(0)e^{-j2\beta y}$ は、複素平面上で $S(0)$ を原点中心に角度 $-2\beta y$ だけ回転させることを意味する。
- (d) 点 $(-1, 0)$ から $S(0)e^{-j2\beta y}$ 、 $-S(0)e^{-j2\beta y}$ を結ぶベクトル $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$ が、それぞれ電圧、電流に対応する。

$$\mathbf{A} = S(0)e^{-j2\beta y} - (-1) = 1 + S(0)e^{-j2\beta y} \quad (2.19.a)$$

$$\mathbf{B} = 1 - S(0)e^{-j2\beta y} \quad (2.19.b)$$

- (e) y が変化すると $\pm S(0)e^{-j2\beta y}$ は半径 $|S(0)|$ の円周上を回転する。

例えば、 $S(0)e^{-j2\beta y}$ が実軸上正の位置にあるとき $-S(0)e^{-j2\beta y}$ は負の実軸上 ($|\mathbf{A}|$ は最大、 $|\mathbf{B}|$ は最小)。→ $Z_{in} = V/I$ は場所によって変化する。

周期 $2\beta y = 2\pi$ ($y = \pi/\beta = \lambda/2$) で変化する。

$V(y)$ 、 $I(y)$: 定在波

- (f) 定在波比：次のように定在波分布の極大、極小の比を考える。

$$\rho = \frac{|V(y)|_{\max}}{|V(y)|_{\min}} = \frac{1 + |S(0)|}{1 - |S(0)|} \quad (2.20)$$

$|V(y)|$ が最大するとき、 $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$ ともに実軸上。

→ $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ のなす角度（電圧と電流の位相差）が 0

→ この点 y から負荷側を見込む入力インピーダンスは純抵抗

$$Z_{in} = R_{\max} = \frac{|V|_{\max}}{|I|_{\min}} = R_c \frac{1 + |S(0)|}{1 - |S(0)|} = R_c \rho \quad (2.21)$$

$|V(y)|$ が最小のとき、同様に入力インピーダンスは次式で与えられる。

$$Z_{in} = R_{\min} = \frac{|V|_{\min}}{|I|_{\max}} = R_c \frac{1}{\rho} \quad (2.22)$$

- (g) 特別な場合として：

- (i) $z_L = 0$ (終端短絡) の場合、 $S(0) = -1$ 、 $\lambda/2$ 周期で $V = 0$ 、 $I \neq 0$ ($Z_{in} = 0$) となる。
また、この点から $\lambda/4$ だけ離れた点では、 $V \neq 0$ 、 $I = 0$ であるから $Z_{in} = \infty$ (開放)。

- (ii) $Z_L = \infty$ (終端開放)の場合、 $S(0) = 1$ 、 $\lambda/2$ 周期で $V \neq 0$ 、 $I = 0$ ($Z_{in} = \infty$)となる。
この点から $\lambda/4$ だけ離れた点では、 $Z_{in} = 0$ (短絡)。

2.4. $\lambda/4$ インピーダンス変換器

無損失線路で考える。負荷インピーダンス Z_L を長さ l の伝送線路を通して見込む規格化入力インピーダンスは

$$z(l) = \frac{z_L + j \tan \beta l}{1 + j z_L \tan \beta l} \quad (2.23)$$

したがって、 $l + \lambda/4$ の点から負荷を見込むインピーダンスは、

$$z(l + \frac{\lambda}{4}) = \frac{z_L + j \tan \beta(l + \frac{\lambda}{4})}{1 + j z_L \tan \beta(l + \frac{\lambda}{4})} = \frac{j z_L \tan \beta l + 1}{j \tan \beta l + z_L} = \frac{1}{z(l)} \quad (2.24)$$

つまり、

$$z(l + \frac{\lambda}{4}) z(l) = 1$$

$$\therefore Z(l + \frac{\lambda}{4}) Z(l) = R_c^2 \quad (2.25)$$

ここで、抵抗負荷 R_L に、長さ $\lambda/4$ 、特性抵抗 R_x の無損失伝送線路を介して、特性抵抗 R_c の無損失伝送線路を接続する場合を考える。 $\lambda/4$ 線路の特徴として、特性抵抗 R_x と特性抵抗 R_c の伝送線路の接続点から負荷側を見込むインピーダンス Z_{in} は、次の関係を満足する。

$$Z_{in} R_L = R_x^2 \quad (2.26)$$

また、 $Z_{in} = R_c$ であれば、特性抵抗 R_x と特性抵抗 R_c の伝送線路の接続点で反射波は生じない (特性抵抗 R_c の伝送線路にとって、負荷抵抗 $Z_{in} = R_c$ は整合負荷)。したがって、

$$R_x = \sqrt{R_c R_L} \quad (2.27)$$

とすれば、特性抵抗 R_c の伝送線路には負荷からの反射が生じない。電力を消費するのは、負荷抵抗 R_L だけであるから、入射電力は全て負荷抵抗で消費される。

上記のことは、特性抵抗 R_x の線路が $\lambda/4$ 相当の長さの場合にのみ成立する。すなわち、周波数に依存する。

2.5. スミスチャート

図表を使って Z_L から直接 $Z(y)$ を求める。

(1) Z と S の対応

$$S = \frac{z-1}{z+1} = \frac{(r-1) + jx}{(r+1) + jx} = U + jV \quad (2.28)$$

(i) x を消去すると、 r = 一定の軌跡として次式が得られる。

$$\left(U - \frac{r}{r+1} \right)^2 + V^2 = \left(\frac{1}{r+1} \right)^2 \quad (2.29)$$

点(1,0)を通り、中心 $(r/(r+1), 0)$ 、半径 $1/(r+1)$ の円群。

(ii) r を消去すると、 x = 一定の軌跡として次式が得られる。

$$(U-1)^2 + \left(V - \frac{1}{x}\right)^2 = \left(\frac{1}{x}\right)^2 \quad (2.30)$$

点(1,0)を通り、中心(1,1/x)、半径1/xの円(但し $0 \leq r$)。

以上の、(i)及び(ii)を同一平面 U - V 上に描く。

→ $r + jx$ と $S = U + jV$ は一対一に対応。

(2) 観測点における反射係数 $S(0)e^{-j2\beta y}$

$r + jx$ で決まる点 $S(0)$ を $-2\beta y = -2\pi(2y/\lambda)$ だけ回転 → $r' + jx'$ を読み取れば、その点から負荷を見込む規格化入力インピーダンスが求まる。