

1. 基本的事項

1.1 交流の複素表現

交流を正弦波で表現すると、

$$e(t) = A \sin(\omega t + \theta) \quad (1.1)$$

この代わりに次の表現を使う。

$$E(t) = A e^{j(\omega t + \theta)} = A e^{j\theta} e^{j\omega t} = \dot{A} e^{j\omega t} \quad (1.2)$$

すなわち、複素振幅 $\dot{A} = A e^{j\theta}$ を用いて表現する。

- $E(t) = \dot{A} e^{j\omega t}$ から $e(t) = A \sin(\omega t + \theta)$ を求めるときには、次の手続を踏めば良い。

$$e(t) = \text{Im}[E(t)] \text{ あるいは } e(t) = \text{Re}[E(t)] \quad (1.3)$$

- ある回路に電源電圧 $E(t) = \dot{E} e^{j\omega t}$ を印可したとき、電流 $I(t) = \dot{I} e^{j\omega t}$ が流れたとする。この比をとると、

$$\frac{E(t)}{I(t)} = \frac{\dot{E} e^{j\omega t}}{\dot{I} e^{j\omega t}} = \frac{\dot{E}}{\dot{I}} \quad (1.4)$$

となり、時間に無関係の量となる（インピーダンス）。

一方、正弦波表現の場合、

$$\frac{e(t)}{i(t)} = \frac{E \sin(\omega t + \theta_1)}{I \sin(\omega t + \theta_2)} \quad (1.5)$$

となって、時間に無関係の量とはならない。インピーダンスは、複素表現によって、はじめて定義できる。

- ベクトルは、スカラー量が成分ごとに加算されたものと考えれば、物理量がベクトルになっても同じ扱いができる。ただし、一つの物理量について、時間依存性は成分ごとで同一であるから、次のようになる。

$$\mathbf{E}(t) = \dot{\mathbf{E}} e^{j\omega t}$$

1.2 マクスウェルの方程式

$$\text{rot} \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.6.a)$$

$$\text{rot} \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}_c + \mathbf{J}_s \quad (1.6.b)$$

時間的な変化を $e^{j\omega t}$ で仮定すると $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = j\omega \mathbf{B}$ となるので

$$\text{rot} \mathbf{E} = -j\omega \mathbf{B} \quad (1.7.a)$$

$$\text{rot} \mathbf{H} = j\omega \mathbf{D} + \mathbf{J}_c + \mathbf{J}_s \quad (1.7.b)$$

さらに、この空間の媒質が線形で等方的であるとき、次の関係が成り立つ。

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (1.8)$$

$$\mathbf{J}_c = \sigma \mathbf{E}$$

ここで、 ϵ, μ, σ は全てスカラー量である。

さらに、波源の無い無限空間を考えると $\mathbf{J}_s = 0$ 、 $\sigma = 0$ である。この空間を伝搬する平面波は、次の方程式に従う。

$$\text{rot}\mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H} \quad (1.9.a)$$

$$\text{rot}\mathbf{H} = j\omega\epsilon\mathbf{E} \quad (1.9.b)$$

ここで、 x, y, z 直角直交座標系で考えると、ベクトル演算は次の式で表される。

$$\text{rot}\mathbf{E} = \mathbf{i}\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right) + \mathbf{j}\left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right) + \mathbf{k}\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right) \quad (1.10)$$

マクスウェルの方程式(1.9)を成分ごとに書き出すと次のようになる。

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -j\omega\mu H_x \quad (1.11.a)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -j\omega\mu H_y \quad (1.11.b)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -j\omega\mu H_z \quad (1.11.c)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = j\omega\epsilon E_x \quad (1.12.a)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = j\omega\epsilon E_y \quad (1.12.b)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = j\omega\epsilon E_z \quad (1.12.c)$$

この空間において、次のような界が存在するかどうか調べる。

(i) z 軸に垂直な $x-y$ 平面内で変化しない

(ii) 電界 E は x 方向成分のみ

式(1.11)、(1.12)から次のようになる。

$$0 = -j\omega\mu H_x \quad (1.13.a)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -j\omega\mu H_y \quad (1.13.b)$$

$$0 = -j\omega\mu H_z \quad (1.13.c)$$

$$-\frac{\partial H_y}{\partial z} = j\omega\epsilon E_x \quad (1.14.a)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} = 0 \quad (1.14.b)$$

$$-\frac{\partial H_x}{\partial y} = 0 \quad (1.14.c)$$

式(1.13.a)及び式(1.13.c)からただちに $H_x = H_z = 0$ となる。また、残った式は、次のように整理される。

$$\frac{dE_x}{dz} = -j\omega\mu H_y \quad (1.15.a)$$

$$\frac{dH_y}{dz} = -j\omega\epsilon E_x \quad (1.15.b)$$

式(1.15a)と(1.15b)から、

$$\frac{d^2 E_x}{dz^2} = -\omega^2 \varepsilon \mu E_x \quad (1.16)$$

ε, μ が実数と仮定して $\gamma = j\omega\sqrt{\varepsilon\mu}$ とすると、この微分方程式の解は次のようになる。

$$E_x = E_1 e^{-\gamma z} + E_2 e^{+\gamma z} \quad (1.17)$$

さらに、式(1.15a)から

$$H_y = \frac{1}{-j\omega\mu} \frac{dE_x}{dz} = \frac{\gamma}{j\omega\mu} (E_1 e^{-\gamma z} - E_2 e^{+\gamma z}) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} (E_1 e^{-\gamma z} - E_2 e^{+\gamma z}) \quad (1.18)$$

重要なパラメータ：

$$\text{伝搬定数 } \gamma = j\omega\sqrt{\varepsilon\mu}$$

$$(\text{波動}) \text{ インピーダンス } Z_c = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

特に、 ε, μ が実数（無損失媒質）の場合、 $\gamma = j\beta$ (β は位相定数) となり、 Z_c は実数となる。

(i) +z 方向伝搬

$$E_x^+ = E_1 e^{j(\omega t - \beta z)}$$

$$H_y^+ = \frac{1}{Z_c} E_1 e^{j(\omega t - \beta z)}$$

位相速度：

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \quad (1.19.a)$$

波動インピーダンス

$$\frac{E_x^+}{H_y^+} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \eta \quad (1.20.a)$$

(ii) -z 方向伝搬

$$E_x^- = E_{x2} e^{j(\omega t + \beta z)}$$

$$H_y^- = -\frac{1}{Z_c} E_{x2} e^{j(\omega t + \beta z)}$$

位相速度：

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \quad (1.19.b)$$

波動インピーダンス

$$\frac{E_x^-}{-H_y^-} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \eta \quad (1.20.a)$$