3. 平面波

ここからは調和関数、つまり波形は時間的変化として全て正弦波であるものとして扱う。そのとき、時間表現の 変わりに複素表現(時間波形をフーリエ変換したもの)を用いると $\frac{d}{dt} = j\omega$ となって、時間に関して微分方程式 が代数方程式になり、簡単に計算できる。

3.1 平面波の性質

ベクトル波動方程式

| $\nabla^2 \mathbf{A} + k^2 \mathbf{A} = -\mathbf{J}$ | ヘルムホルツの波動方程式(Helmhortz eq.) |
|--|-----------------------------|
| $\nabla^2 \psi = 0$ | ラプラスの方程式(Laplace eq.) |
| $\nabla^2 \psi = -\rho$ | ポアソンの方程式(Poisson eq.) |
| $\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0$ | スカラー波動方程式 |
| $ abla 	imes abla 	imes \mathbf{A} = abla (abla \cdot \mathbf{A}) - (abla \cdot abla) \mathbf{A}$ 直角座標では $ abla^2 \mathbf{A}$ | ラプラシアン(Laplacian)の定義 |

[説明] 波動方程式と波動関数

微分方程式

 $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} = 0$

 $dt \qquad dx$

の解は $f(x \pm ct)$ となり(代入して簡単に確認できる)、 $f(x \pm ct)$ は波動関数(wave function)と呼ばれる。x に位置、t に時間という物理的意味付けをすると、それぞれ $\mp x$ 方向に速度 c で進む波を表すからである。

もう少し説明を加えると、t=0のときf(x)であり、t=1のときは $f(x\pm c)$ となり、f(x)のグラフは $\mp c$ だけx軸方向に平行移動するからである。(高校の数学で習ったグラフの平行移動)tが連続的に変化するとグラフの形はだんだん平行移動してずれていく(つまり波動である)。

最初の微分方程式は解が波動を意味するので、波動方程式(wave equation)と呼ばれる。



[説明]時間表現と複素表現について(時間領域のフーリエ変換)

電気回路で電圧と電流を複素表現して計算するように、電磁波でもよく複素表現が使われる。複素表現を用いると正弦波をかけているときの時間の扱いが簡単になる(微分方程式が代数方程式になる)からである。

[時間表示] $\mathbf{e}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}_0 \cos(\omega t + \theta) \mapsto \mathbf{E}(\mathbf{r},\omega) = \frac{\mathbf{E}_0}{\sqrt{2}} e^{j\theta} = \mathbf{E}_e e^{j\theta}$ 方程式: $\nabla^2 \mathbf{e} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{e} = 0 \iff \nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0$ (時間に関して) 微分方程式を解く $\mathbf{e}(\mathbf{r},t) = \operatorname{Re}[\sqrt{2} \mathbf{E} e^{j\omega}] \leftarrow \mathbf{E}(\mathbf{r},\omega)$

複素表示は(ずっと過去からずっと未来まで)正弦波で励振し続けた時の定常状態の 解を計算するときに使われる。複素表示を使わなくても解けるのだが、(時間に関す る)微分方程式を解かなければならず、計算が煩雑になる。それに対して、複素表示 に変換して計算を行うと(時間に関しては)代数方程式を解く問題となり、計算が簡 単になる。

そして、複素表示の世界で計算した解ともとの時間表示の世界で計算した解は対応す る。これを数学の分野では準同形写像と言う。電気回路では電圧と電流の複素表現に おいて、上のように√2をつけて実効値表現するが、電磁波では√2を付けずに、複素 表現においても振幅は尖頭値(ピーク値)表現することが多い(その場合には電力を 計算するときにポインティングベクトルの計算は2で割ることになる)。

平面波とは?

 $f(\omega t - \beta \cdot \mathbf{r})$ 平面波

 $\omega t - \beta \cdot \mathbf{r} = \text{const.}$ (時間とともに動く等位相面。右の const.は位相を表す)

ある時間 $t = t_1$ における等位相面(位相とは、正弦波の引数の角度のことである)を考える。



時間と共に速度 v で動く

波動方程式の導出と解

Maxwell の方程式においてi=0, $\rho=0$ の時(自由空間)を考え、E あるいはHの方程 式を導出する。

 $\nabla \times \mathbf{H} = j\omega\varepsilon \mathbf{E} \qquad \nabla \times \nabla \times \mathbf{H} = k^{2}\mathbf{H}$ $\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H} \qquad \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = k^{2}\mathbf{E}$ $k^{2} = \omega^{2}\varepsilon\mu$

数学公式を用いる。

 $\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = k^2 \mathbf{E}$

ここで、 $\rho = 0$ より $\nabla \cdot \mathbf{D} = \varepsilon \nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ だから、 $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ を得る。ゆえに $\nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0$

上の式を電界の**ヘルムホルツの波動方程式**と言う(波動方程式の3次元バージョン)。 なお、磁界Hも同方程式を満足する。 $\nabla^2 H + k^2 H = 0$

1) k方向へ進む平面波はこの方程式の1つの解である。

(Aとkは次の関係を満たす。ここでは結果だけをまとめ、導出は2で行う)



ポインティング・ベクトル(Poynting Vector) その場を通過する電磁波の電力密度を示す。上のベクトルの大きさが単位面 積あたりを通過する電力量であり、向きは電力が進む方向を示す。 線形重ね合せも解である(波動方程式の線形性より)。

$$\mathbf{E} = \sum_{i} \mathbf{E}_{i} = \sum_{i} \mathbf{A}_{i} e^{-j\mathbf{k}_{i}\cdot\mathbf{r}}$$
$$\left|\mathbf{k}_{i}\right| = k$$

- $\mathbf{A}_i \cdot \mathbf{k}_i = \mathbf{0}$
 - \mathbf{k}_i は波*i*の波数ベクトル

 A_i の振幅と位相はそれぞれr = 0の場所での波iの振幅と位相を表す。

 $\mathbf{k}_i = \mathbf{k}$ (全ての \mathbf{k}_i が同じ \mathbf{k})のとき、偏波を考察(3.3節)

k, ≠一定(k, が異なる)のとき、定在波(あるいは定常波)を考察(3.2節)

2) 波動方程式を満足する条件としてΑとβを求めてみる。

Α, βが場所に依らないことを仮定

 $\mathbf{E} = \mathbf{A}e^{-j\mathbf{\beta}\cdot\mathbf{r}}$ $\mathbf{A} \succeq \mathbf{\beta} \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{k} \text{知数として、解を上の式のように仮定する},$ $\mathbf{A} = \hat{x}A_x + \hat{y}A_y + \hat{z}A_z$ $\mathbf{\beta} = \hat{x}\beta_x + \hat{y}\beta_y + \hat{z}\beta_z$ $\mathbf{r} = \hat{x}x + \hat{y}y + \hat{z}z \qquad (位置ベクトル)$

$$\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{E}e^{+j\omega t} = \mathbf{A}e^{-j\mathbf{\beta}\cdot\mathbf{r}}e^{+j\omega t}$$

$$= \mathbf{A}e^{j(\omega t - \mathbf{\beta}\cdot\mathbf{r})} = f(\omega t - \mathbf{\beta}\cdot\mathbf{r}) \qquad \text{平面波}$$

$$\dot{\mathbf{C}}$$

$$\dot{\mathbf{E}}_{x} = A_{x}e^{-j\mathbf{\beta}\cdot\mathbf{r}}e^{+j\omega t} \rightarrow A_{x}\sin(\omega t - \mathbf{\beta}\cdot\mathbf{r})$$

$$\dot{E}_{y} = A_{y}e^{-j\mathbf{\beta}\cdot\mathbf{r}}e^{+j\omega t} \rightarrow A_{y}\sin(\omega t - \mathbf{\beta}\cdot\mathbf{r})$$

$$\dot{E}_{z} = A_{z}e^{-j\mathbf{\beta}\cdot\mathbf{r}}e^{+j\omega t} \rightarrow A_{z}\sin(\omega t - \mathbf{\beta}\cdot\mathbf{r})$$

Helmholtz の方程式の解であるために、



$$\begin{aligned} \frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}} E_{x} &= \frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}} \Big[A_{x} e^{-j(\beta_{x}x+\beta_{y}y+\beta_{z}z)} \Big] = -\beta_{x}^{2} E_{x} \\ \frac{\partial^{2}}{\partial y^{2}} E_{x} &= -\beta_{y}^{2} E_{x} \\ \frac{\partial^{2}}{\partial z^{2}} E_{x} &= -\beta_{z}^{2} E_{x} \\ -(\beta_{x}^{2}+\beta_{y}^{2}+\beta_{z}^{2}) E_{x} + k^{2} E_{x} = 0 \\ |\mathbf{\beta}| &= k \qquad (非自明解 \, \mathbf{E} \neq 0 \, \mathbf{E} 持 \mathbf{O} \mathbf{E} 持 \mathbf{O} \mathbf{E} \mathbf{E}) \end{aligned}$$

上の結果によって、Maxwell の方程式の解の平面波は光速で進むことがわかる。(後述)

さらに、波源のない時のガウスの法則を満足するために、

 $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ $\nabla \cdot \mathbf{E} = -j\beta_x E_x - j\beta_y E_y - j\beta_z E_z$ $= -j\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{E} = 0$

波の進行方向βと変位方向Eは直交するので横波である。

2 つの必要条件

 $|\boldsymbol{\beta}| = k$ (光速) $\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{A} = 0$ (横波) 磁界を求める。($\beta \epsilon_k = k\hat{k}$ で表す。)

よって、 $\mathbf{E} = \eta \mathbf{H} \times \hat{\mathbf{k}}$

$$\begin{aligned} \mathbf{\mathcal{P}} \mathbf{\mathcal{P}} = \mathbf{\mathcal{F}} - \mathbf{\mathcal{O}} \hat{\mathbf{\mathcal{I}}} \mathbf{\mathcal{I}} \mathbf{I}} \mathbf{\mathcal{I}} \mathbf{\mathcal{I$$

平面波の波動的、物理的性質 β 方向に速度 $\frac{\omega}{\beta}$ で進む平面波、 $|\beta| = \beta = k$ であるから、 波の速度 $v_g = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} = c \equiv 3 \times 10^8 [m/s]$ 位相速度(phase velocity) $v_p = \frac{\omega}{k\cos\theta} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} \frac{1}{\cos\theta} = \frac{c}{\cos\theta}$

波長(wave length) ______ 位相が2π進む距離

$$(\omega t - kr) - \{\omega t - k(r + \Delta r)\} = 2\pi$$

$$k\Delta r = 2\pi$$

$$\lambda \equiv \Delta r = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{c}{f}$$

$$\pm O \vec{x} \vec{z} \vec{y},$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

とも書けるので、 $1/\lambda$ は 1[m]あたりの波の数と解釈することもでき、その 2π 倍にはなっているが k は **波数**(wave number)あるいは位相定数(phase constant)と呼ばれる。また、 β やk は波数ベクトルと呼ばれる。



3) 解の形式を仮定せずに、波動方程式を解く。

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0$$

V⁻E+k⁻E = 0
-様性の仮定。
上の3次元パージョンの式を解くのは
煩雑なので、ここではx,y方向に界は
一様と仮定して1次元問題(xのみの関数)を解く。

$$\frac{\partial}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y} = 0, \quad E_y = E_z = 0$$

 $\frac{\partial^2}{\partial z^2} E_x + k^2 E_x = 0$
 $E_x = ae^{+jkz} + be^{-jkz}$
 $E_x e^{j\alpha z} = ae^{+jkz+j\alpha z} + be^{-jkz+j\alpha z}$
 $= ae^{+j\omega(t+\sqrt{e\mu z})} + be^{+j\omega(t-\sqrt{e\mu z})}$
 $= ae^{+j\omega(t+\frac{z}{c})} + be^{+j\omega(t-\frac{z}{c})}$
 $c = \frac{1}{\sqrt{e\mu}} \equiv \sqrt{9 \times 10^{16}} = 3 \times 10^8 = 30 \text{万} \text{ km/sec} = 29.98 \text{万} \text{ km/sec}$

これをファラデーの法則に代入し、磁界を求める。

$$\mathbf{H} = -\frac{1}{j\omega\mu} \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{j\omega\mu} \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}, \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}, \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \\
= -\frac{1}{j\omega\mu} \hat{y} \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{1}{j\omega\mu} \hat{y} (jkae^{+jkz} - jkbe^{-jkz}) \\
= \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \hat{y} (-ae^{+jkz} + be^{-jkz}) \\
\mathbf{H} = \frac{1}{\eta} \hat{y} (-ae^{+j\omega(t+\frac{z}{c})} + be^{+j\omega(t-\frac{z}{c})}) \\
\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \cong \sqrt{9 \times 4\pi \times 10^9 \times 4\pi \times 10^{-7}} = \sqrt{3^2 \cdot 4^2 \cdot \pi^{2^2} \cdot 10^2}$$

$$\mathbf{H}_y$$

+ z および - z 方向に進行する 2 つの平面波の合成となる。*a* と*b* は条件により決定される係数である。



つまり、エネルギーの進行方向は-k方向であり、波数ベクトルと逆向きになっている。波のエネルギーは向こうへ行くのに、波のうねりはこちらへ向かって来るという イメージである。このような媒質を最初に調べたのは Veselago[1]である。プラズマは 低周波において等価的に負の誘電率を示すことが考察のきっかけになったものと思 われる。左手系媒質は負屈折率を有するのでスネルの法則においてθ,が負になる(光 線は手前側に屈折)や右手系媒質と逆のドップラー効果(波源に向かうと観測周波数 が下がる)を示すなどの性質がある。

Veselago は左手系媒質の性質を示し、その構成法の提案をしたが、実現には至らなかった。同時期に、微小構造で等価的に媒質定数を模擬する人工誘電体や人工磁性体の研究が行われていた(その後、統一的に**メタマテリアル**と呼ばれるようになって整理されてきた)。Pendry は金属リングの一部をカットしたスプリットリング共振器を用いた負透磁率媒質を報告[2]し、その後 Smith は金属導体棒を用いた負誘電率媒質と組み合わせて負屈折率の動作を実験的に確認した[3]。また、マイクロ波分野において

は伝送線路による解釈を用いて、CRLH 伝送線路モデルの提案が行われ(複数の研究 者が同時期に行われた)、広帯域なメタマテリアルの設計法が発展した[4]。

さらなるメタマテリアルの応用として、無反射でエバネッセント波をも結像しうる 屈折率-1の平板レンズ(パーフェクトレンズ)、小型マイクロ波回路、小型アンテナ、 クローキングを利用した透明マントの応用などが期待されている。現在ではマイクロ 波工学、アンテナ工学、光学など様々な分野で活発に研究が行われている。

参考文献

- [1] V.G. Veselago, "The electrodynamics of substances with simultaneously negative values of ε and μ .", Soviet Physics Uspekhi, vol. 10, no.4, pp.509-514, Feb. 1968.
- [2] J. B. Pendry, A. J. Holden, D. J. Robbins, and W. J. Stewart. "Magnetism from conductors and enhanced nonlinear phenomena," IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol. 47, no. 11, pp. 2075–1084, Nov. 1999.
- [3] D. R. Smith, W. J. Padilla, D. C. Vier, S. C. Nemat-Nasser, and S. Schultz. "Composite medium with simultaneously negative permeability and permittivity," Phys. Rev. Lett., vol. 84, no. 18, pp. 4184–4187, May 2000.
- [4] C. Caloz and T. Itoh, Electromagnetic Metamaterials, John Wiley & Sons, 2006.

3.2 定在波(standing wave) (あるいは定常波。進行方向の異なる複数の波の合成波)

磁界の定在波

$$E_{x} = ae^{+j\omega(t+\frac{z}{c})} + be^{-j\omega(t-\frac{z}{c})}$$

$$H_{y} = \frac{1}{\eta} \left[-ae^{+j\omega(t+\frac{z}{c})} + be^{-j\omega(t-\frac{z}{c})} \right]$$

$$= \frac{1}{\eta} \left[-a\sin(\omega t + kz) + b\sin(\omega t - kz) \right]$$

$$= \frac{1}{\eta} \frac{\left[(-a+b)\cos kz \sin \omega t + (-a-b)\sin kz \cos \omega t \right]}{D}$$

$$= \frac{1}{\eta} \sqrt{C^{2} + D^{2}} \sin(\psi + \omega t) \qquad \left(\sin \psi = \frac{C}{\sqrt{C^{2} + D^{2}}}, \cos \psi = \frac{D}{\sqrt{C^{2} + D^{2}}} \right)$$

$$\eta f_{H}(z) = \sqrt{(a-b)^{2} \cos^{2} kz + (a+b)^{2} \sin^{2} kz}$$

$$= \sqrt{a^{2} + b^{2} - 2ab \cos^{2} kz + 2ab \sin^{2} kz}$$

$$= \sqrt{a^{2} + b^{2} - 2ab \cos(2kz)}$$

電圧定在波と節腹逆

$$\eta f_{H}(z) = \sqrt{a^{2} + b^{2} + 2ab\cos(2kz + \pi)}$$
$$= \sqrt{a^{2} + b^{2} + 2ab\cos\left\{2k(z + \frac{\pi}{2k})\right\}}$$

$$= \sqrt{a^{2} + b^{2} + 2ab\cos\left\{2k(z + \frac{\lambda}{4})\right\}} = f\left(z + \frac{\lambda}{4}\right)$$

と節腹逆

定在波比 (Voltage Standing Wave Ratio: VSWR) $f^{2}(z) = a^{2} + b^{2} + 2ab[\cos^{2} kz - \sin^{2} kz]$ $=a^2+b^2+2ab\cos(2kz)$ 山谷(節腹)の周期: $2kz = 2\pi$, $z = \frac{\pi}{k} = \frac{\lambda}{2}$ (半波長) $\dot{E}_{x} = f(z)\sin[\omega t - \tau(z)]$ \downarrow 包絡線(時間に依らぬ場所の関数)

a,bともに正を仮定。

 $\frac{a+b}{|a-b|}$ を電圧定在波比(Voltage Standing Wave Ratio: VSWR)という。 |a| + |b|

一般の a,b に対しては、

$$\frac{|a|+|b|}{|a|-|b|}$$

VSWR 1の場合:定在波(standing wave) VSWR=1の場合:進行波(traveling wave)

)定在波 $a,b \neq 0$ 、 特別な例: a = b VSWR=

c.f.: http://www-antenna.ee.titech.ac.jp/~hira/hobby/edu/em/standing/index-j.html

 $|\mathbf{k}_1| = |\mathbf{k}_2| = k$

角度 で交差する2つの平面波に関し、定在波の様子を求めよ。 定在波比、定在波の周期、定在波の山 or 谷、等位相面

Mathematica を使ってより視覚的に描くと次のようになる($\theta = 30^{\circ}$ の例)。

3次元グラフ

等高線グラフ

例 = 0° x 方向間隔: $\frac{2\pi}{k} \rightarrow$ 波長 λ_0 = 90° x 方向間隔: $\frac{2\sqrt{2}\pi}{k}$

= 180° x 方向間隔:∞

3.3 偏波

k(*ź*)方向に進む2つの平面波を考える。

今、次の場合を考える。

したがって、進行方向に向かってその方向に垂直な面上での、電界ベクトルの瞬時値 の軌跡を求めると。

 $a \ge b \ge O$ 比(max(|a/b|, |b/a|) ≥ 1)を軸比という。

a,bともに正またはともに負とすると、場所を止めて電磁波の進行方向(+z方向)を見たとき、時間とともに左向きに回転する(左旋偏波)。もしa,bが異符号であれば、右回りに回転する(右旋偏波)。

また|a| = |b|であれば、円偏波という。さらに、|a/b|が0か無限である場合、軌跡はx=0あるいはy=0の直線となり、直線偏波となる。より一般にはa,bは複素であり(x成 分とy成分との位相差は90°とは限らず)電界ベクトルの軌跡は傾いた楕円となる。

c.f.: http://www-antenna.ee.titech.ac.jp/~hira/hobby/edu/em/polarization/index-j.html

電界と磁界は互いに直角なベクトルであって、進行方向に直角な面内に存在している。 2次元のベクトルには、2つの独立な成分があり、独立な通信を行うことができる。 電界ベクトルの向きを、偏波という。テレビは水平偏波、ラジオは垂直偏波、携帯電 話は垂直偏波、衛星放送は円偏波、GPS は円偏波など。

