第 3 章　ラプラス変換

3-1.ラプラス変換の基礎

3-1-1 ラプラス変換の定義

フーリエ変換では、$-\infty < t < \infty$ で定義された関数 $f(t)$ に $e^{-j\omega t}$ をかけて $-\infty < t < \infty$ で積分していた。$t \to \pm\infty$ における $f(t)$ の振る舞いによっては積分が収束しない場合もある($F(\omega)$ が存在しない)。

これに対して、ラプラス変換では、区間 $0 \le t < \infty$ のみを考える。さらに、$e^{-j\omega t}$ の代わりに $e^{-(\sigma+j\omega)t}$ をかけて $0 \le t < \infty$ で積分する。このとき、σ は積分が収束するように適当に選ぶことを許す。このようにして変換された関数をラプラス変換とよぶ(変換可能な関数の範囲がフーリエ変換に比べて広がった)。

すなわち、$0 \le t < \infty$ で定義された関数 $f(t)$ が $t \to \infty$ で発散してフーリエ積分 $F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$ が計算できない。これに対して、$g(t) = f(t)e^{-\sigma t}$ を考え、$0 \le t < \infty$ 以外では $f(t) = 0$ として

$$G(\omega) = \int_0^{\infty} g(t)e^{-j\omega t}dt = \int_0^{\infty} f(t)e^{-\sigma t}e^{-j\omega t}dt \tag{3.1}$$

を計算する。σ を適当に選べば、この積分は存在し、$G(\omega)$ を計算することができる。

$s = \sigma + j\omega$ とおいて、あらためてラプラス変換・逆変換は次のように定義される。

ラプラス変換：

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt \tag{3.2}$$

ラプラス逆変換：

$$f(t) = \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st}ds \tag{3.3}$$

3-1-2 ラプラス変換の性質

関数 $f(t)$ をラプラス変換して $F(s)$ を求めることを、$F(s) = \mathcal{L}\left[f(t)\right]$ と書くことにする。ラプラス変換では次の関係(性質)が成り立つ。

(1)線形性

$$\mathcal{L}\left[\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)\right] = \alpha\mathcal{L}\left[f_1(t)\right] + \beta\mathcal{L}\left[f_2(t)\right] \tag{3.4}$$

(2)原関数の移動

$$\mathcal{L}\left[f(t-\tau)\right] = \exp(-s\tau)\mathcal{L}\left[f(t)\right] \quad (\tau > 0) \tag{3.5}$$

(3)像関数の移動

$$\mathcal{L}\left[\exp\left(-at\right)f(t)\right]=F(s+a) \tag{3.6}$$

(4)時間軸の拡大

$$\mathcal{L}\left[f(At)\right]=\frac{1}{A}F\left(\frac{s}{A}\right) \qquad (A>0) \tag{3.7}$$

(5)時間微分

$$\mathcal{L}\left[f'(t)\right]=s\mathcal{L}\left[f(t)\right]-f(0)$$

$$\mathcal{L}\left[f''(t)\right]=s^2\mathcal{L}\left[f(t)\right]-\left(sf(0)+f'(0)\right)$$

$$\mathcal{L}\left[f^{(n)}(t)\right]=s^n\mathcal{L}\left[f(t)\right]-\left(s^{n-1}f(0)+s^{n-2}f'(0)+s^{n-3}f''(0)+\cdots sf^{(n-2)}(0)+f^{(n-1)}(0)\right) \tag{3.8}$$

(6)畳み込み関数のラプラス変換

$f_1 * f_2=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$ に対して、$\mathcal{L}[f_1 * f_2]=\mathcal{L}[f_1]\mathcal{L}[f_2]$ (3.9)