2-6.高速フーリエ変換

2-6-1 離散フーリエ変換の行列表現

離散フーリエ変換・逆変換では、信号の値 $f(n)$ とスペクトルの値 $F(k)$ が、いずれも N 個の離散的なデータで与えられるので、ディジタル処理に適したフーリエ級数展開といえる。さらに、対称性を用いて演算量を低減することで、高速フーリエ変換(FFT)に発展させることができる。これに関連して、式(2.62)、(2.63)を行列表現で表わすことにする。

離散的な信号 $f(n)$ （$n = 0,1,2,\cdots,N-1$）とその離散フーリエ変換 $F(k)$ （$k = 0,1,2,\cdots,N-1$）を要素とするベクトル $\mathbf{f}$ 、$\mathbf{F}$ を、次のように定義する。

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f(0) \\ f(1) \\ \vdots \\ f(N-1) \end{bmatrix} \tag{2.68}$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} F(0) \\ F(1) \\ \vdots \\ F(N-1) \end{bmatrix} \tag{2.69}$$

さらに、次の N×N 行列 $\mathbf{M_N}$ を導入する。

$$\mathbf{M_N} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & W_N & W_N{}^2 & \cdots & W_N{}^{N-1} \\ 1 & W_N{}^2 & W_N{}^4 & \cdots & W_N{}^{2(N-1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & W_N{}^{N-1} & W_N{}^{2(N-1)} & \cdots & W_N{}^{(N-1)^2} \end{bmatrix} \tag{2.70}$$

これらを用いると、式(2.62)の離散フーリエ変換、式(2.63)の離散フーリエ逆変換は、それぞれ次のように表される。

$$\mathbf{F} = \mathbf{M_N}^*\mathbf{f} \tag{2.71}$$

$$\mathbf{f} = \frac{1}{N}\mathbf{M_N}\mathbf{F} \tag{2.72}$$

2-6-2 高速フーリエ変換の考え方

サンプリング数 N が 2 のべき乗である場合、離散フーリエ変換・逆変換の計算量を減少させて高速化する方法が考案されている（高速フーリエ変換（FFT））。ここでは、その考え方を説明する。

まず、N を偶数と仮定して $K = \dfrac{N}{2}$ とする。N 次元ベクトル $\mathbf{f}$ の第 i 成分を、i が偶数（0 も含める）の場合と奇数の場合に応じて、$\mathbf{f_E}$ と $\mathbf{f_O}$ の 2 つのベクトルに分割する。つまり、次のように分割する。

$$\mathbf{f_E} = \begin{bmatrix} f(0) \\ f(2) \\ \vdots \\ f(N-2) \end{bmatrix}、\mathbf{f_O} = \begin{bmatrix} f(1) \\ f(3) \\ \vdots \\ f(N-1) \end{bmatrix}$$

$\mathbf{f_E}$ と $\mathbf{f_O}$ の第 i 成分をそれぞれ $f_E(i)$ と $f_O(i)$ と書くことにすると、式(2.62)は次のようになる。

$$\begin{aligned} F(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} \left(W_N{}^{kn}\right)^* f(n) \\ &= \sum_{i=0}^{K-1} \left(W_N{}^{k2i}\right)^* f(2i) + \sum_{i=0}^{K-1} \left(W_N{}^{k(2i+1)}\right)^* f(2i+1) \\ &= \sum_{i=0}^{K-1} \left(W_N{}^{*2}\right)^{ki} f_E(i) + W_N{}^{*k} \sum_{i=0}^{K-1} \left(W_N{}^{*2}\right)^{ki} f_O(i) \end{aligned} \tag{2.73}$$

ベクトル $\mathbf{F}$ を、第 0 成分から第 $K-1$ 成分の上半分と、第 K 成分から第 $N-1$ 成分の下半分に分割して、次のベクトル $\mathbf{F_U}$ と $\mathbf{F_L}$ を定める。

$$\mathbf{F_U} = \begin{bmatrix} F(0) \\ F(1) \\ \vdots \\ F(K-1) \end{bmatrix}、\mathbf{F_L} = \begin{bmatrix} F(K) \\ F(K+1) \\ \vdots \\ F(N-1) \end{bmatrix}$$

$\mathbf{F_U}$ および $\mathbf{F_L}$ の第 k 成分 $F_U(k)$ 、$F_L(k)$ （$k = 0,1,2,\cdots,K-1$）は、それぞれ次のように表される。

$$F_U(k) = \sum_{i=0}^{K-1} \left(W_N{}^{*2}\right)^{ki} f_E(i) + W_N{}^{*k} \sum_{i=0}^{K-1} \left(W_N{}^{*2}\right)^{ki} f_O(i) \tag{2.74}$$

$$\begin{aligned} F_L(k) &= \sum_{i=0}^{K-1} \left(W_N{}^{*2}\right)^{(K+k)i} f_E(i) + W_N{}^{*(K+k)} \sum_{i=0}^{K-1} \left(W_N{}^{*2}\right)^{(K+k)i} f_O(i) \\ &= \sum_{i=0}^{K-1} \left(W_N{}^{*2}\right)^{ki} f_E(i) - W_N{}^{*k} \sum_{i=0}^{K-1} \left(W_N{}^{*2}\right)^{ki} f_O(i) \end{aligned} \tag{2.75}$$

ここで、$K = \dfrac{N}{2}$ であるから、$W_N{}^{*K} = -1$ 、$W_N{}^{*2K} = 1$ となることを用いている。

式(2.70)と同様に、次の K×K 行列 $\mathbf{M_K}$ 、

$$\mathbf{M_K} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & W_N{}^2 & W_N{}^4 & \cdots & W_N{}^{2(K-1)} \\ 1 & W_N{}^4 & W_N{}^8 & \cdots & W_N{}^{4(K-1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & W_N{}^{2(K-1)} & W_N{}^{4(K-1)} & \cdots & W_N{}^{2(K-1)^2} \end{bmatrix} \tag{2.76}$$

1、$W_N{}^*$ 、$W_N{}^{*2}$ 、…、$W_N{}^{*K-1}$ を対角成分とする次の K×K 対角行列 $\mathbf{D_K}$

$$\mathbf{D_K} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & W_N{}^{*} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & W_N{}^{*2} & \cdots & 0 \\ & & & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & W_N{}^{*K-1} \end{bmatrix} \tag{2.77}$$

を用いれば、式(2.74)、(2.75)から、$\mathbf{F_U}$ および $\mathbf{F_L}$ は次のように表すことができる。

$$\mathbf{F_U} = \mathbf{M_K}{}^{*}\mathbf{f_E} + \mathbf{D_K}\mathbf{M_K}{}^{*}\mathbf{f_O} \tag{2.78}$$

$$\mathbf{F_L} = \mathbf{M_K}{}^{*}\mathbf{f_E} - \mathbf{D_K}\mathbf{M_K}{}^{*}\mathbf{f_O} \tag{2.79}$$

式(2.78)と(2.79)をまとめると、$\mathbf{f}$ の離散フーリエ変換 $\mathbf{F}$ は、次の行列表現で表される。

$$\begin{aligned} \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{F_U} \\ \mathbf{F_L} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{M_K}{}^{*} & \mathbf{D_K}\mathbf{M_K}{}^{*} \\ \mathbf{M_K}{}^{*} & -\mathbf{D_K}\mathbf{M_K}{}^{*} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f_E} \\ \mathbf{f_O} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{I_K} & \mathbf{D_K} \\ \mathbf{I_K} & -\mathbf{D_K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{M_K}{}^{*} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M_K}{}^{*} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f_E} \\ \mathbf{f_O} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2.80}$$

ただし、$\mathbf{I_K}$ は K×K の単位行列を表す。

式(2.71)では、N 個の離散的な信号 $\mathbf{f}$ の離散フーリエ変換 $\mathbf{F}$ は N×N の行列 $\mathbf{M_N}$ を用いて $\mathbf{M_N}{}^{*}\mathbf{f}$ で表されていた。しかし、信号の個数 N が偶数の場合には、式(2.78)、(2.79)のように、N/2×N/2 の行列 $\mathbf{M_K}$ 、$\mathbf{D_K}$ や、N/2 次元のベクトル $\mathbf{f_E}$ 、$\mathbf{f_O}$ を用いて、$\mathbf{M_K}{}^{*}\mathbf{f_E}$ と $\mathbf{D_K}\mathbf{M_K}{}^{*}\mathbf{f_O}$ で表すことができる。つまり、離散フーリエ変換を行うために扱う行列のサイズが 1/2×1/2 となり、計算量が低減できる。

さらに $K = \dfrac{N}{2}$ が偶数であれば、同様の手順によってさらにサイズが 1/2×1/2 の行列、次元が 1/2 のベクトルを用いて $\mathbf{M_K}{}^{*}\mathbf{f_E}$ と $\mathbf{D_K}\mathbf{M_K}{}^{*}\mathbf{f_O}$ を表すことができる。つまり、N が 2 のべき乗であれば、この手順を繰り返すことができ、サイズの小さな行列とベクトルの積の積み重ね（和）で計算することができるようになり、極めて大きな計算量低減効果が得られる。このアルゴリズムが高速フーリエ変換である。