2-5.離散フーリエ変換

2-5-1 離散フーリエ変換の定義

連続的な周期信号 $f(t)$ を、サンプリングした離散的な周期信号 $f_s(t)$ で置き換える。すなわち、サンプリングの周期を T_s、原信号 $f(t)$ の周期を NT_s（N は整数）とすると、サンプリングした信号 $f_s(t)$ は次の式で表される。

$$f_s(t) = \sum_{n=0}^{N-1} f(t)\left(T_s \delta(t - nT_s)\right) \tag{2.53}$$

右辺に T_s がかけてあるのは、サンプリングした信号 $f_s(t)$ をサンプリング間隔 T_s にわたって時間積分した値が、原信号 $f(t)$ の時間積分値のよい近似になるようにするためである。

$f_s(t)$ を NT_s の周期関数とみなして複素フーリエ級数で展開すると、そのフーリエ係数は次のようになる。

$$c_k = \frac{1}{NT_s}\int_{-\varepsilon}^{NT_s-\varepsilon}\left(\sum_{n=0}^{N-1} f(t)\left(T_s\delta(t-nT_s)\right)\right)\exp\left(-jk\frac{2\pi}{NT_s}t\right)dt \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \tag{2.54}$$

積分範囲は原信号の任意の 1 周期 NT_s でよいが、デルタ関数が積分の上限、下限にかからないように微小量 ε だけ移動させている。式(2.54)の積分を計算すると、次のようになる。

$$\begin{aligned}
c_k &= \frac{1}{NT_s}\sum_{n=0}^{N-1}\int_{-\varepsilon}^{NT_s-\varepsilon} f(t)\left(T_s\delta(t-nT_s)\right)\exp\left(-jk\frac{2\pi}{NT_s}t\right)dt \\
&= \frac{1}{NT_s}\sum_{n=0}^{N-1} T_s f(nT_s)\exp\left(-jk\frac{2\pi}{NT_s}nT_s\right) \\
&= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f(nT_s)\exp\left(-j\frac{2\pi}{N}kn\right)
\end{aligned} \tag{2.55}$$

ここで、k を $k+N$ と置き換えると次式が成り立つ。

$$\begin{aligned}
c_{k+N} &= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f(nT_s)\exp\left(-j\frac{2\pi}{N}(k+N)n\right) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f(nT_s)\exp\left(-j\left(\frac{2\pi}{N}kn + 2n\pi\right)\right) \\
&= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f(nT_s)\exp\left(-j\frac{2\pi}{N}kn\right) = c_k
\end{aligned}$$

したがって、式(2.55)のフーリエ係数は N の周期性をもつ (係数の指数を N 増減すると同じ係数になる)。

フーリエ級数展開で学んだように、<u>**連続**周期信号のスペクトルは**離散**スペクトル</u>であった。上で述べたことは、<u>**離散**周期信号 $f_s(t)$ のスペクトルは**離散周期**スペクトルになる</u>ということを意味する。フーリエ級数によって元の信号を得るためには、周期スペクトルなので $k=0$ から $k=N-1$ まで加算すればよい(同じスペクトルの繰り返しであるから無限に加算したら結果は発散する)。すなわち、次のようにして元の信号が得られる。

$$f_s(t) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k \exp\left(jk \frac{2\pi}{NT_s} t \right) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(nT_s) \sum_{k=0}^{N-1} \exp\left(-jk \frac{2\pi}{NT_s} nT_s \right) \exp\left(jk \frac{2\pi}{NT_s} t \right)$$
$$= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(nT_s) \sum_{k=0}^{N-1} \exp\left(jk \frac{2\pi}{NT_s} (t - nT_s) \right) \tag{2.56}$$

また、$t = mT_s$ なるサンプリング時刻における $f(t)$ を計算すると、次のように $f(mT_s)$ に一致する。

$$\begin{aligned} f(mT_s) &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(nT_s) \sum_{k=0}^{N-1} \exp\left(jk \frac{2\pi}{NT_s} (mT_s - nT_s) \right) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(nT_s) \sum_{k=0}^{N-1} \exp\left(jk \frac{2\pi}{N} (m - n) \right) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(nT_s) N \delta_{nm} \\ &= f(mT_s) \end{aligned} \tag{2.57}$$

式(2.56)で $t = nT_s$ とおくと、次の式を得る。

$$f(nT_s) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{n=0}^{N-1} f(nT_s) \exp\left(-jk \frac{2\pi}{N} n \right) \right) \exp\left(jn \frac{2\pi}{N} k \right) \tag{2.58}$$

ここで、 $f(n) = f(nT_s)$ として、

$$F(k) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n) \exp\left(-jk \frac{2\pi}{N} n \right) \text{-----離散フーリエ変換} \tag{2.59}$$

$$f(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F(k) \exp\left(jn \frac{2\pi}{N} k \right) \text{----離散フーリエ逆変換} \tag{2.60}$$

と離散フーリエ変換・逆変換を定義する。

次の変数 W_N は、複素平面上の単位円を N 分割した点を表わす。

$$W_N = \exp\left(j \frac{2\pi}{N} \right) \tag{2.61}$$

この W_N を用いて、離散フーリエ変換・逆変換を表わすと次のようになる。

$$F(k) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n) W_N^{-kn} = \sum_{n=0}^{N-1} f(n) \left(W_N^{kn} \right)^* \qquad (k = 0,1,2,\cdots,N-1) \tag{2.62}$$

$$f(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F(k) W^{nk} \qquad (n = 0,1,2,\cdots,N-1) \tag{2.63}$$

2-5-2 離散フーリエ変換の性質

(1) 線形性

二つの離散信号列$\{f(n)\}=\{f(0), f(1), \ldots, f(N-1)\}$と$\{g(n)\}=\{g(0), g(1), \ldots, g(N-1)\}$の離散フーリエ変換が、それぞれ$\{F(k)\}$、$\{G(k)\}$で与えられるとしたら、2 つの離散信号列の線形和からなる信号列$\{\alpha_1 f(n)+\alpha_2 g(n)\}$の離散フーリエ変換は$\alpha_1\{F(k)\}+\alpha_2\{G(k)\}$となる。

(2) 対称性

離散信号列$\{f(n)\}$の離散フーリエ変換が$\{F(k)\}$で与えられるとしたら、式(2.63)の離散フーリエ逆変換でnを$-n$と書き換え

$$f(-n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}F(k){W_N}^{-nk} \quad (n=0,1,2,\cdots,N-1)$$

さらに、nとkを入れ換えて

$$f(-k)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}F(n){W_N}^{-kn}=\sum_{n=0}^{N-1}\frac{F(n)}{N}{W_N}^{-kn} \quad (k=0,1,2,\cdots,N-1) \qquad (2.64)$$

となる。したがって、$\left\{\frac{F(n)}{N}\right\}$の離散フーリエ変換は$\{f(-k)\}$となる。

(3) 時間推移

周期NT_sの連続信号$f(t)$に対して、mサンプリング間隔mT_sだけ時間軸上で移動させた信号$g(t)$を考える。すなわち、$g(t)=f(t-mT_s)$とする。このとき、$f(t)$、$g(t)$のサンプリング信号列$\{f(n)\}$、$\{g(n)\}$の間には次の関係がある。

$$\begin{aligned}&\{g(0), g(1),\cdots, g(m-1), g(m), g(m+1),\cdots, g(N-1)\}\\&\quad=\{f(-m), f(1-m),\cdots, f(-1), f(0), f(1),\cdots, f(N-1-m)\}\\&\quad=\{f(N-m), f(N-m+1),\cdots, f(N-1), f(0), f(1),\cdots, f(N-1-m)\}\end{aligned} \qquad (2.65)$$

$W_N=\exp\left(j\frac{2\pi}{N}\right)$にも$N$の周期性があることを考慮すれば、$\{g(n)\}$の離散フーリエ変換は次のようになる。

$$\begin{aligned}G(k)&=\sum_{n=0}^{N-1}g(n){W_N}^{-kn}\\&=f(N-m){W_N}^{-0}+f(N-m+1){W_N}^{-k}+\cdots+f(N-1){W_N}^{-k(m-1)}\\&\qquad+f(0){W_N}^{-km}+f(1){W_N}^{-k(m+1)}+\cdots+f(N-1-m){W_N}^{-k(N-1)}\\&=\sum_{n=0}^{N-1}f(n){W_N}^{-k(n+m)}\\&={W_N}^{-km}\sum_{n=0}^{N-1}f(n){W_N}^{-kn}\end{aligned}$$

$F(k)=\sum_{n=0}^{N-1}f(n){W_N}^{-kn} \quad (k=0,1,2,\ldots,N-1)$は信号列$\{f(n)\}$の離散フーリエ変換を表すので、$\{g(n)\}$の離散フーリエ変換$\{G(k)\}$は$\{F(k)\}$と次の関係にある。

$$G(k)={W_N}^{-km}F(k) \quad (k=0,1,2,\ldots,N-1) \qquad (2.66)$$

(4)周波数推移

信号列$\{f(n)\}$の離散フーリエ変換を$\{F(k)\}$とすると、離散フーリエ変換の定義式(2.62)においてkを$k-m$とおくと、次の関係が成り立つ。

$$F(k-m)=\sum_{n=0}^{N-1} f(n){W_N}^{-(k-m)n}=\sum_{n=0}^{N-1}\left\{f(n){W_N}^{mn}\right\}{W_N}^{-kn} \tag{2.67}$$

すなわち、$\{F(k)\}$を周波数領域でmだけシフトした$\{F(k-m)\}$の離散フーリエ逆変換は、$f(n){W_N}^{mn}$ ($n=0,1,2,\cdots,N-1$)となる。