2-4.シャノンの標本化定理

「周波数帯域がある値以下に制限されている波形は、その波形を一定時間間隔で標本化(サンプリング)して得られる標本値だけで再現できる。ここで、周波数帯域が W [Hz]以下に制限されていれば、$1/2W$ [sec]ごとに標本化すれば(サンプリング周波数 $2W$ [Hz])、この離散的な信号だけから元のアナログ波形が再現できる。」

※ ナイキスト周波数：サンプリング周波数 $2W$ で復元可能な原信号の最大周波数

[証明]

元の信号を $f(t)$、$1/2W$ [sec]ごとのサンプリング時刻を $t_i = i/2W$ $(i = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ とする。また、$f(t)$ のフーリエ変換を $F(\omega)$ とする。

(i)周波数帯域が W [Hz]以下に制限されているので、$|\omega| > 2\pi W$ で $F(\omega) = 0$ である。すなわち、$F(\omega)$ を $-2\pi W \le \omega \le 2\pi W$ でのみ定義された周期 $4\pi W$ の関数と考え、フーリエ級数で展開する。

$$F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp\left(jn \frac{2\pi}{4\pi W}\omega \right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp\left(j\frac{n}{2W}\omega \right) \tag{2.47}$$

ここで、$$c_n = \frac{1}{4\pi W}\int_{-2\pi W}^{2\pi W} F(\omega)\exp\left(-j\frac{n}{2W}\omega \right) d\omega \tag{2.48}$$

(ii) $F(\omega)$ のフーリエ逆変換から、

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-2\pi W}^{2\pi W} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \tag{2.49}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-2\pi W}^{2\pi W}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp\left(j\frac{n}{2W}\omega \right)\right) e^{j\omega t} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_{-2\pi W}^{2\pi W} \exp\left(j\frac{n}{2W}\omega \right) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} 2c_n \int_{0}^{2\pi W} \cos\left(\frac{n}{2W} + t \right)\omega d\omega$$

$$= \frac{1}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \left[\frac{\sin\left(\frac{n}{2W} + t \right)\omega}{\frac{n}{2W} + t} \right]_0^{2\pi W} = \frac{1}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \frac{\sin 2\pi W\left(\frac{n}{2W} + t \right)}{\frac{n}{2W} + t} = 2W\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \frac{\sin 2\pi W\left(t + \frac{n}{2W} \right)}{2\pi W\left(t + \frac{n}{2W} \right)}$$

n を書き直すと次式を得る。

$$f(t) = 2W\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{-n} \frac{\sin 2\pi W\left(t - \frac{n}{2W} \right)}{2\pi W\left(t - \frac{n}{2W} \right)} \tag{2.50}$$

一方、フーリエ逆変換の式(2.49)で$t_n = {}^{n}\!/_{2W}$とすると、

$$f(t_n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-2\pi W}^{2\pi W} F(\omega) e^{j\omega \frac{n}{2W}} d\omega$$

式(2.48)と見比べれば、$f(t_n) = 2Wc_{-n}$であることがわかる。

すなわち、式(2.50)は次のように書き改めることができる。

$$\therefore\ f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t_n) \frac{\sin 2\pi W\left(t - \frac{n}{2W}\right)}{2\pi W\left(t - \frac{n}{2W}\right)} \tag{2.51}$$

すなわち式(2.51)から、標本点$t_n = {}^{n}\!/_{2W}$における標本値$f(t_n)$がわかれば、元波形$f(t)$は、次の標本化関数(sinc 関数)$s_n(t)$と標本値$f(t_n)$から再現することができる。

$$s_n(t) = \frac{\sin 2\pi W\left(t - \frac{n}{2W}\right)}{2\pi W\left(t - \frac{n}{2W}\right)} \tag{2.52}$$

なお、標本化関数$s_n(t)$は次の特徴をもつ関数である。

・$s_0(t) = \dfrac{\sin 2\pi Wt}{2\pi Wt}$を$t_n = {}^{n}\!/_{2W}$だけ平行移動した関数である。

・$t_n = {}^{n}\!/_{2W}$ $(n = \pm1, \pm2, \pm3, \cdots)$で$s_0(t_n) = \dfrac{\sin n\pi}{n\pi} = 0$

・$s_0(0) = 1$

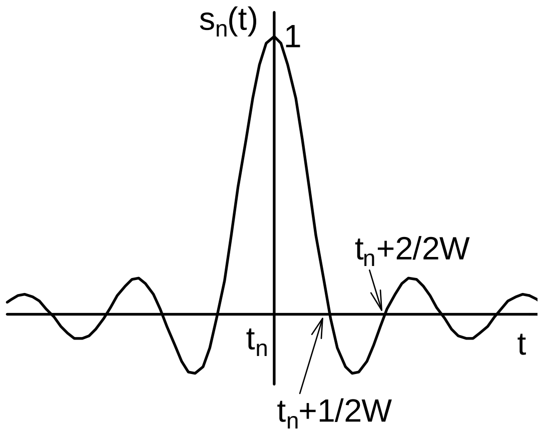

図 2-4 標本化関数$s_n(t)$