2-2-4 Parseval の等式

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|F(\omega)\right|^2 d\omega = 2\pi\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(t)\right|^2 dt \qquad (2.21)$$

[証明]

$$\mathcal{F}[\,f_1(t)\,f_2(t)] = \frac{1}{2\pi}F_1(\omega)*F_2(\omega)$$

すなわち、

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)\,f_2(t)e^{-j\omega t}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F_1(y)F_2(\omega-y)dy$$

において、ω=0 とおくと、

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)\,f_2(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F_1(y)F_2(-y)dy$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}F_1(\omega)F_2(-\omega)d\omega = 2\pi\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)\,f_2(t)dt$$

ここで、 $f_2(t) = g(t)*$ とすると、

$$F_2(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t)e^{-j(-\omega)t}dt = \int_{-\infty}^{\infty}g(t)*e^{j\omega t}dt = \left(\int_{-\infty}^{\infty}g(t)e^{-j\omega t}dt\right)* = G(\omega)* \qquad (2.22)$$

したがって、次の式が成り立つ

$$\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)G(\omega)*d\omega = 2\pi\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t)*dt \qquad (2.23)$$

ここで、特に $g(t) = f(t)$ とすれば、次の Parseval の等式が成り立つ。

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|F(\omega)\right|^2 d\omega = 2\pi\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(t)\right|^2 dt$$

———Parseval の等式の物理的な意味———

$f(t)$ を 1Ωの抵抗の両端の電圧とすれば、 $\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(t)\right|^2 dt$ は 1Ωの抵抗が消費する全電力を表す。

これが $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\left|F(\omega)\right|^2}{2\pi}d\omega$ に等しいということは、$\frac{\left|F(\omega)\right|^2}{2\pi}$ がωにおけるスペクトル成分に含まれるエネルギー密度を表しているということを意味する。

2-2-5 時間波形と周波数スペクトルの双対性

時間関数 $f(t)$ をフーリエ変換するとスペクトル密度 $F(\omega)$ が得られる。すなわち、$\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$、$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]$ であるから、時間領域と周波数領域の間には双対関係が存在する。

双対関係の例として、次のことがあげられる。

・時間軸上の 1 点でのみ非零の値をもつ関数は δ 関数であり、その周波数スペクトルは－∞から∞の周波数軸上で一定値 1 をもつ。

・一つの周波数成分だけをもつ関数は正弦関数もしくは直流であり、その周波数スペクトルは $\delta(\omega)$ である。このような関数は、時間軸上では－∞から∞で一定の振幅をもつ。

2-2-6 その他

フーリエ変換の結果に負の周波数 ω が含まれることにとまどいを感じるかも知れない。$f(t)$ が実関数の場合には、式(2.2)から次の関係が成り立つ。

$$F(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{j\omega t} dt = F(\omega)^* \tag{2.24}$$

このとき、フーリエ逆変換で $F(\omega)$ から $f(t)$ を求めると、次のようになる。

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} F(-\omega) e^{-j\omega t} d\omega + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{0}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega\right)^* + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} \mathrm{Re}\left[F(\omega) e^{j\omega t}\right] d\omega \end{aligned}$$

すなわち、実関数 $f(t)$ を得るためには、正の周波数の正弦波成分 $e^{j\omega t}$ だけでよいことがわかる。