第 2 章　フーリエ変換

2-1.フーリエ変換の基礎

2-1-1 フーリエ変換の定義

$f(t)$ を周期 T の周期関数として、$f(t)$ のフーリエ級数複素表現を考える。フーリエ級数の複素展開係数 $c_n = \dfrac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\tau)\exp\left(-jn\dfrac{2\pi}{T}\tau\right)d\tau$ を式(1.16)の級数表現に代入すると、次式をえる。

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\tau)\exp\left(-jn\frac{2\pi}{T}\tau\right)d\tau\right)\exp(jn\frac{2\pi}{T}t)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\tau)\exp\left(jn\frac{2\pi}{T}(t-\tau)\right)d\tau$$

$\dfrac{1}{T} = \dfrac{\omega}{2\pi} = \dfrac{(n+1)\omega - n\omega}{2\pi}$ だから、$\omega_n = n\omega = n\dfrac{2\pi}{T}$ とすると $\dfrac{1}{T} = \dfrac{\omega_{n+1}-\omega_n}{2\pi}$ となる。すなわち、$f(t)$ は次のように表わされる。

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\omega_{n+1}-\omega_n\right)\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\tau)\exp\left(j\omega_n(t-\tau)\right)d\tau \qquad (2.1)$$

ここで $T \to \infty$（周期∞）の極限、すなわち孤立波（非周期関数）を考えると、

$$d\omega = \omega_{n+1} - \omega_n = \frac{2\pi}{T} \to 0$$

となるから、ω_n は連続変数 ω になる。また、$\sum_{n=-\infty}^{\infty}$ は連続変数 ω に関する積分で置き換えられ、式(2.1)は次のように書き換えられる。

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\exp\left(j\omega(t-\tau)\right)d\tau d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau e^{j\omega t}d\omega$$

この式で、

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt \qquad (2.2)$$

とおけば、関数 $f(t)$ は次のように表される。

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}d\omega \qquad (2.3)$$

式(2.2)で与えられる $F(\omega)$ を $f(t)$ のフーリエ変換とよぶ。また、式(2.3)はフーリエ逆変換とよぶ。

周波数ωの正弦波成分$e^{j\omega t}$を振幅$F(\omega)\dfrac{d\omega}{2\pi}$だけ含むと考えると、式(2.3)は「全ての$\omega$についてこれを加算した結果が関数$f(t)$になる」ということを表していると解釈できる。このことから、$F(\omega)$を$f(t)$のスペクトル密度とよぶこともある。

[注意]
フーリエ変換の定義には次のようなものもある。（定義が異なる）

$$F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

2-1-2 フーリエ積分

$f(t)$が実関数であるとして$e^{-j\omega t}=\cos\omega t - j\sin\omega t$を用いると、式(2.2)の$F(\omega)$は次のようになる。

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t dt - j\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega t dt = A(\omega)-jB(\omega) \qquad (2.4a)$$

$$A(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t dt \quad \text{：フーリエ余弦変換（} A(-\omega)=A(\omega) \text{）} \qquad (2.4b)$$

$$B(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega t dt \quad \text{：：フーリエ正弦変換（} B(-\omega)=-B(\omega) \text{）} \qquad (2.4c)$$

これを用いると、フーリエ逆変換は次のようになる。

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(A(\omega)-jB(\omega)\right)\left(\cos\omega t + j\sin\omega t\right)d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(A(\omega)\cos\omega t + B(\omega)\sin\omega t\right)d\omega + \frac{j}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(A(\omega)\sin\omega t - B(\omega)\cos\omega t\right)d\omega \end{aligned}$$

ここで、第二項の被積分関数はωについて奇関数であるから、第二項の積分は 0 となり次式を得る。

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(A(\omega)\cos\omega t + B(\omega)\sin\omega t\right)d\omega \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\cos\omega\tau d\tau \cos\omega t + \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\sin\omega\tau d\tau \sin\omega t\right)d\omega \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\cos\omega\left(t-\tau\right)d\tau\right)d\omega \qquad (2.5) \end{aligned}$$

2-1-3 フーリエ変換の存在

【定理】

$f(t)$ の絶対積分が収束、すなわち $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$ の場合、$F(\omega)$ が存在する。

$F(\omega)$ は孤立波のスペクトル密度を与え、連続関数である。これに対して、c_n は周期波のスペクトルを与え、離散値をとる。$F(\omega)$ を用いてフーリエ逆変換によって $f(t)$ を計算すると、$f(t)$ が連続な領域では元の関数 $f(t)$ と一致し、$f(t)$ の飛びのある点では $\frac{1}{2}\left(f(t+0)+f(t-0)\right)$ となる。

[注意]

飛びのある点におけるフーリエ逆変換の結果については、フーリエ級数の飛びのある点におけるふるまいと同様である。