# 生体工学第一　2011. 4. 27

第４回講義内容

１．フラクタルモデルの復習

２．出席点の解説（動物の鼓動数について）

３．宿題の解説（釘のスケーリング）

４．枝分かれの法則

4.1　樹木の枝分かれ（2.5乗則の復習）

4.2　血管の３乗則

５．ホームワーク（血管の分岐角度）

# 樹木の枝の分岐則（2.5乗則）

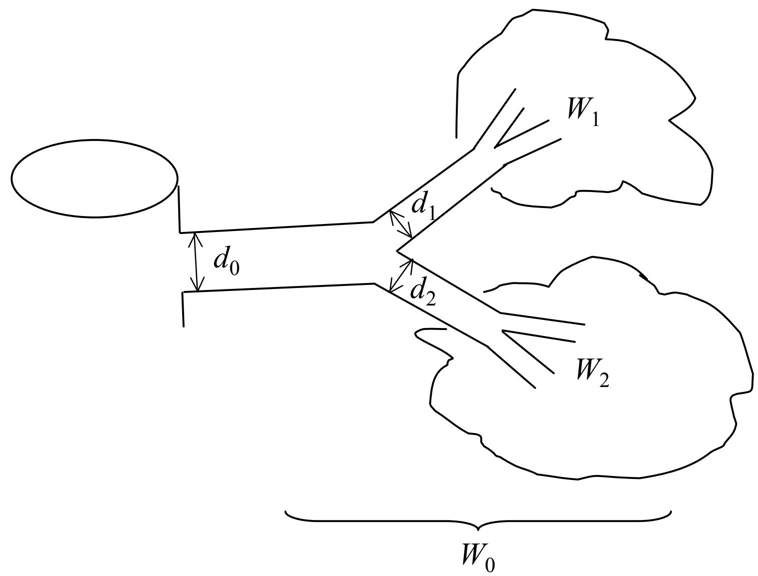
枝の重量と直径の関係

$$W \propto d^{2.5}$$

分岐した枝の関係

$$d_0^{2.5} = d_1^{2.5} + d_2^{2.5}$$

C.D.Murray(1927)



# 血管分岐の法則（３乗則）

$$r_0^n = r_1^n + r_2^n \qquad n = 2.8〜3.2$$

C.D.Murray(1927)

フラクタルモデルでは，n=2と仮定しているが、
計測から推定される指数はn=3である.

指数が２と３でどんな違いが出るのか？

n=2ならば分岐後も同じ流速になる.

n=3の場合には分岐後の流速はどうなる？

# 血管分岐の法則（３乗則）

$$r_0^n = r_1^n + r_2^n \qquad n = 2.8 \sim 3.2$$

C.D.Murray(1927)

血液供給は諸器官の活動を維持するのに必須.

→多すぎると無駄，少なすぎると支障

→したがって生命維持には適度な血液流量が必要

→何らかの法則性が成立していると予想.

# Murray の最小仕事モデル

基本的な考え方（一本の血管について考える）

・血管半径が小さすぎると

→粘性抵抗が増大→機械的エネルギーが増大.（not good）

→管内血液が減少→化学的エネルギーが減少.（good）

・血管半径が大きすぎると

→粘性抵抗が減少→機械的エネルギーが減少.（good）

→管内血液が増大→化学的エネルギーが増大.（not good）

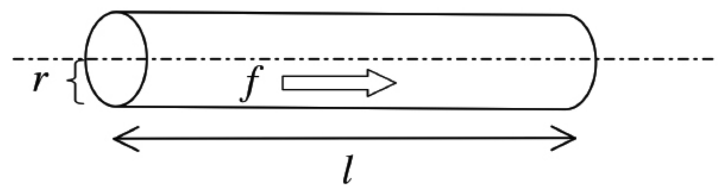
※化学的エネルギー：血管内の血液を活性化させておくのに必要なエネルギー. 管内血液量に比例（小さい方がよい）.

**機械的エネルギー$E_m$と化学的エネルギー$E_c$の総和の最小化**

# Murray の最小仕事モデル（続き）

$$F = E_m + E_c = \Delta p f + kV$$ （$k$ は定数）

$$f = \frac{\Delta p}{l}\frac{\pi r^4}{8\mu}$$ より




$$F = \frac{8\mu f^2 l}{\pi r^4} + k\pi r^2 l$$

仮定：血管内はポアズイユ流れ
（両端の圧力差を$\Delta p$とする．）

$F$ の最小値を求めるために $F$ を $r$ で偏微分する
と以下の関係式が得られる.

[redacted] $= \frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{k}{\mu}} = const.$ ←この計算が出席点

# 機械的エネルギー $E_m$

$\Delta pf$ が単位時間当たりの機械的エネルギーに相当する理由

◎仕事は $Fx$ で定義される.

◎断面積$A$の管内の流体が$\Delta t$に$\Delta x$だけ押し出されている状況を考える.

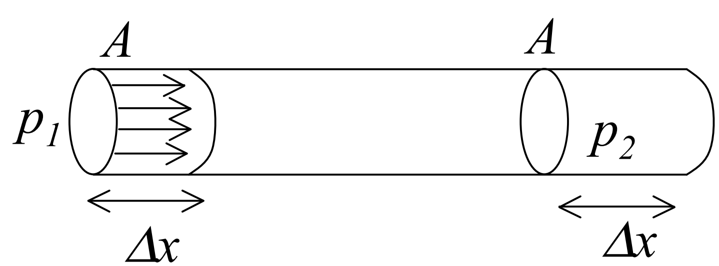
入口側で液体に対してなされる仕事は $p_1 A\Delta x$.
出口側の面では，圧力 $p_2$ が常に加わっている状態なので，
流体が外部に対して行う仕事は $p_2 A\Delta x$.
したがって，管内で流体の運動に必要なエネルギーは

$$p_1 A\Delta x - p_2 A\Delta x = (p_1 - p_2) A\Delta x = \Delta pA\Delta x$$

単位時間当たりでは

$$\Delta pA\Delta x/\Delta t = \Delta pf$$

となる.



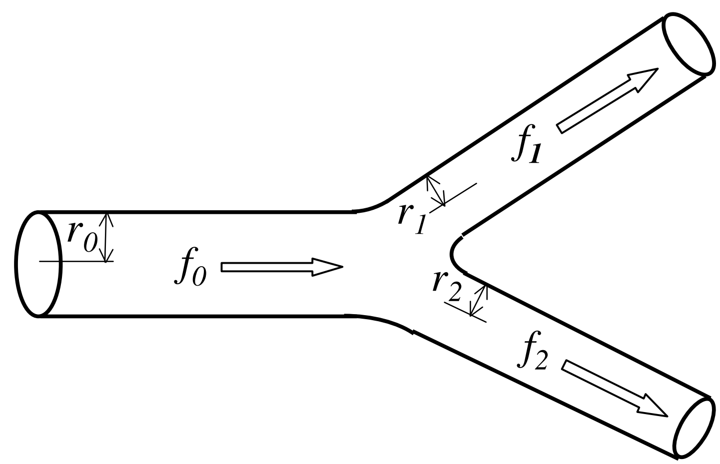
# Murray の最小仕事モデル（続き）

入口側，出口側の流量を $f_0$, $f_1$, $f_2$ とすると

$$\frac{f_0}{r_0^3} = \frac{f_1}{r_1^3} = \frac{f_2}{r_2^3}$$

$f_0 = f_1 + f_2$　より

$$r_0^3 = r_1^3 + r_2^3$$



第4回講義おわり