生体工学第一　2011.4.13

第２回講義内容

１．出席点の問題:
　　枝の2.5乗則（出席点）

２．基礎代謝率

３．0.75乗則：熱放散による説明（前回の復習）

４．0.75乗則：二つの学説

　4.1　弾性相似則モデル

　4.2　フラクタルモデル（次回に講義）

出席点：枝の2.5乗則を示せ

枝と重量と周径の実測結果
Murray(1927)

配付資料参照

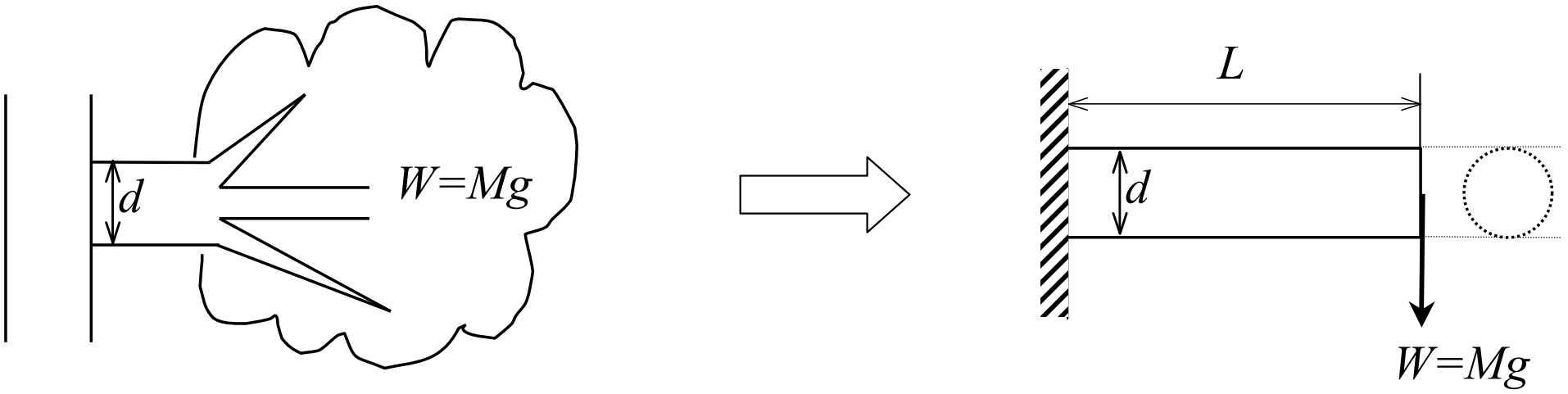
枝の重量と
直径の関係

$$W \propto C^{2.5}$$

⇩

$$M \propto d^{2.5}$$

枝の力学モデル



$$\sigma = \frac{MgL}{Z} = \frac{WL}{Z} \qquad (1)$$

$$Z = \text{断面係数} \qquad (2)$$

$$W = Mg = \frac{\pi d^2}{4} L\rho g \qquad (3)$$

Mとdの関係式
（Lは消去される）

ρ ：枝を直はりとしてモデル化したときの平均質量密度 [kg/m^3]

樹木の枝の分岐則（2.5乗則）

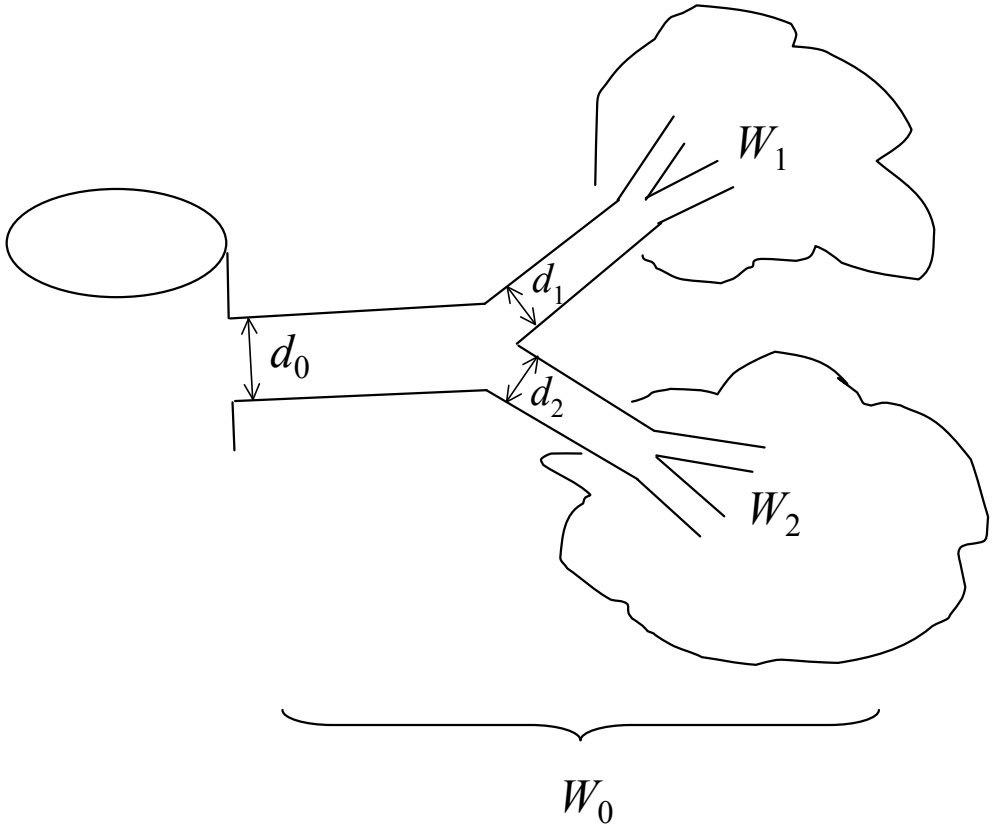
枝の重量と直径の関係

$$W \propto M \propto d^{2.5}$$

分岐した枝の関係

$$d_0^{2.5} = d_1^{2.5} + d_2^{2.5}$$

C.D.Murray(1927)



2. 5乗則の導出

枝を片もちはりでモデル化

式の導出にどんな仮定が設定されているか

- 枝の強度を曲げ応力で評価
- 枝は幹に対して垂直（→別の角度ならどうなる？）
- 枝は円柱形（断面形状はどこも同じ）
- 枝は相似形（葉の付き方はどの木もほぼ同じ）
- 木材は均質で材質、密度は木の種類によらず同じ

動物の代謝率：0.75乗則

生物の質量M_bと安静時の単位時間当たりの代謝エネルギーPとの間には，両対数軸上できれいな線形関係が成立している.

配付資料参照

From *Scaling*,
K.S.Nielsen

基礎代謝率と生物の質量の関係

$$P \propto M_b^{0.75}$$

0.75乗則

単位質量あたりでは

$$P_u \propto M_b^{-0.25}$$

熱放散の考え方では指数はいくつになるか

まず，生物の形を球体（半径 r）と仮定して指数を求める.

考え方：

生物の質量M_bはr^3に比例

身体から出る熱量は表面積Sに比例.（Sはr^2に比例）

単位時間当たりの熱量が基礎代謝率Pに比例.

PとM_bの関係から指数は. . .

生物の形を円柱と仮定したら0.75になるのでは？

結論：体表面積が最小となる条件下でも0.75乗則は説明できない.

どうやって0.75乗を説明するのか？

なるべく多くの動物に共通する現象で説明したい.

→　それが可能ならば，より説得力が出る.

→　学説として価値があると評価される.

「弾性相似則モデル」は何に注目したのか？

指数0.75の導出

McMahon （1973年）の学説

基本的な考えかた：

地上（重力下）で動物が体躯の形状を維持するには筋肉を活動させる必要があり，これが基礎代謝率に関係していると考える．（胴体が大きければ，筋肉の断面積も増えるが質量も増加する．胴体を弾性体と仮定すると，動物の胴体の長さと質量の間には，折れ曲がりにくさに関して相似的な関係があると予想される．）

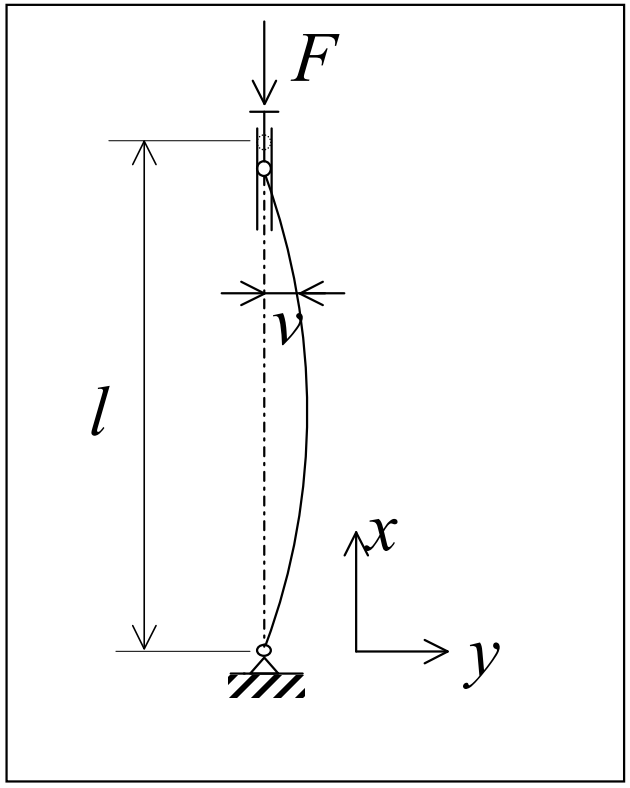
弾性相似則を適用

身体の折れ曲がりにくさを数式で表現

↓

弾性はりの座屈条件を利用

$$F = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$



E: ヤング率

I: 断面二次モーメント

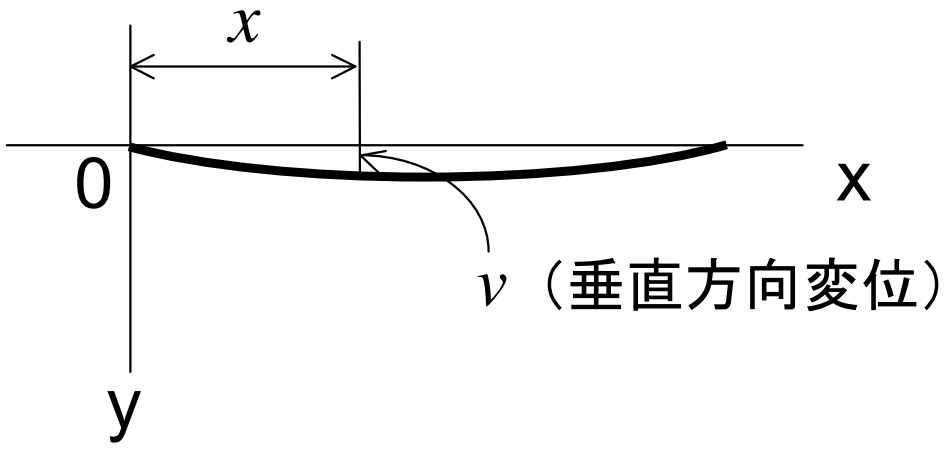
座屈条件の導出

はりのたわみの方程式

曲げモーメントの正方向

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{EI}$$

EI: 曲げ剛性



なぜ $\dfrac{d^2v}{dx^2}=\dfrac{M}{EI}$ となるのか？

軸線から y 離れた箇所でのひずみは　$\dfrac{y}{r}=\varepsilon$

応力は　$\sigma=E\varepsilon=\dfrac{y}{r}E$

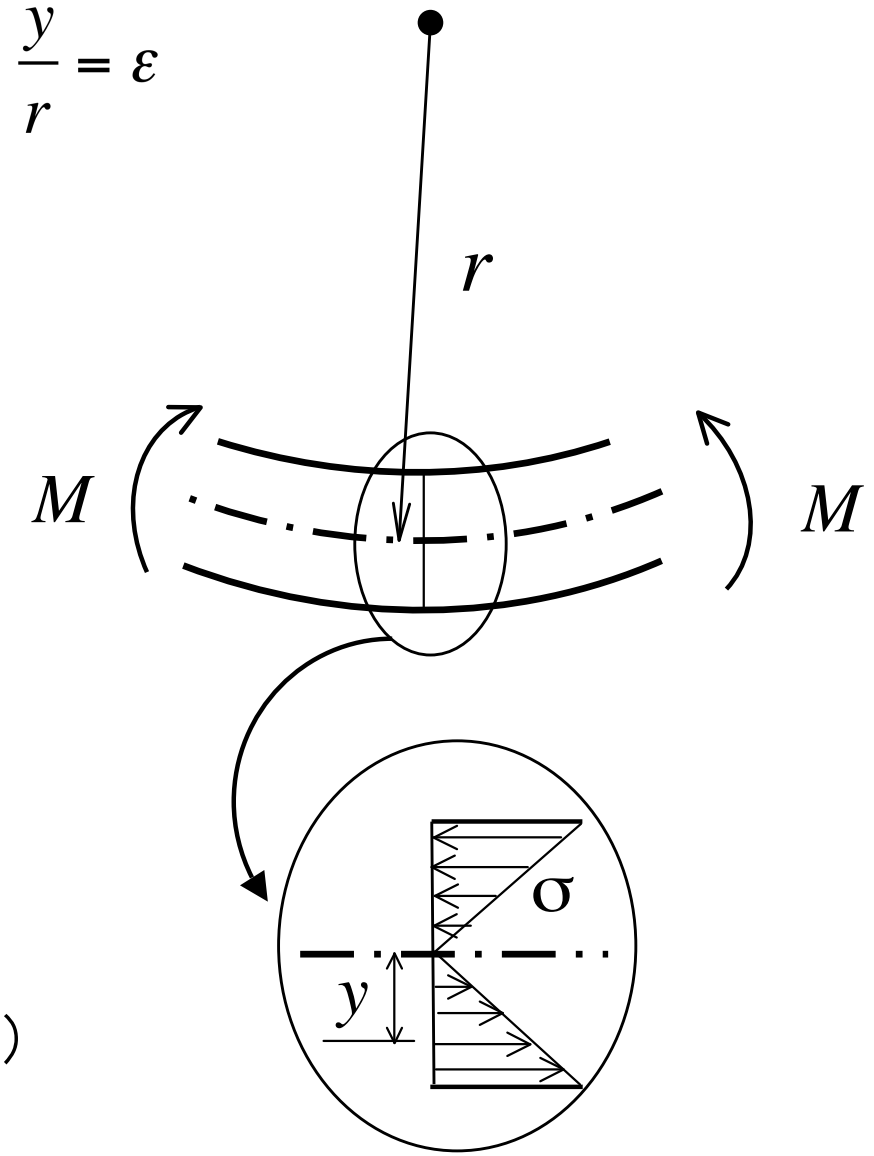
したがってモーメント M は

$$M=\int_A \sigma y dA=\frac{E}{r}\int_A y^2 dA=\frac{EI}{r}$$

一方，曲率半径の式は

$$\frac{1}{r}=\frac{\dfrac{d^2v}{dx^2}}{\left\{1+\left(\dfrac{dv}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}\approx\frac{d^2v}{dx^2}$$

（変形が小さい場合）

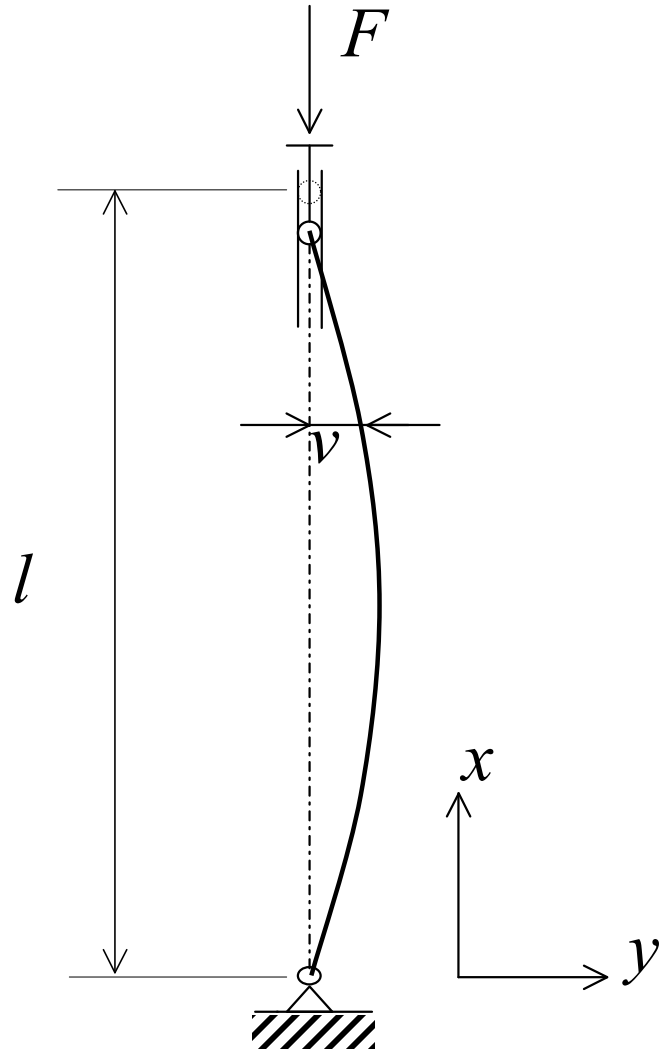


座屈条件の導出（続）

はりを縦方向にして考える

内力と外力とのつりあいの条件式を考えると，次式のようになる．

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} + Fv = 0$$



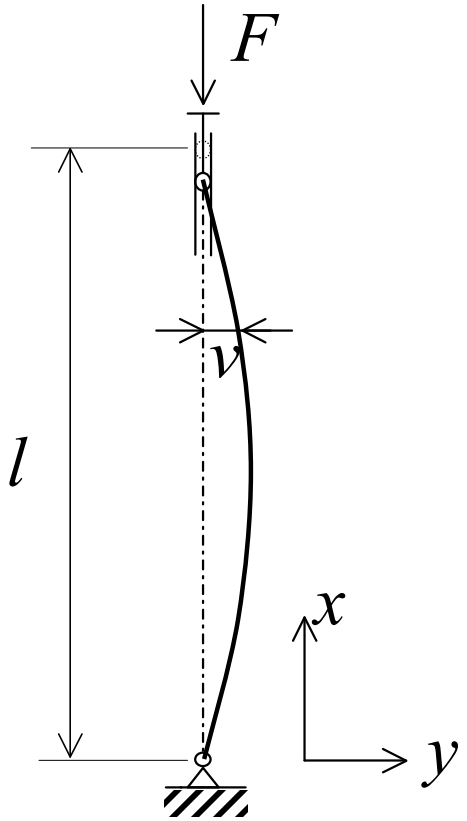
座屈条件の導出（続）

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} + Fv = 0$$

微分方程式の解

$$v = C_1\cos\alpha x + C_2\sin\alpha x$$

ここで　$\alpha = \sqrt{\dfrac{F}{EI}}$



境界条件

x=0 で v= 0 → $C_1 = 0$

x=l で v= 0 → $C_2\sin\alpha l = 0$.

２番目の境界条件で $C_2 = 0$ は意味がない.

→ $\alpha l = m\pi$（mは整数）が成立する必要がある.

$$F = m^2\frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

m= 1 のときオイラーの座屈条件という.

弾性相似則（続き）

F は胴体の重量に比例すると仮定

$$F \propto \pi d^2 l \rho g$$

ρ : 見かけ上の密度

g ： 重力加速度

d :胴体の直径

座屈しない限界長さ l_k と直径 d の関係

$$l_k{}^3 \propto d^2$$

胴体質量($l_k d^2$)は全体の質量M_b
に比例すると仮定すると

$$d \propto M_b{}^{\frac{3}{8}}$$

筋肉の活動

身体が座屈しないように胴体の筋肉が活動（収縮）する仕事量を見積もる.

筋肉の仕事量 $W \propto \sigma A \Delta l$

単位時間当たり $P \propto \sigma A \dfrac{\Delta l}{\Delta t}$

σ :筋肉の単位面積あたりの収縮力

A :筋肉の断面積

Δl : 収縮長さ

Δt : 収縮時間

筋肉の収縮力，収縮速度は一定と仮定

$$P \propto M_b^{\frac{3}{4}}$$

0.75乗則を導き出すために必要な仮定

- 基礎代謝量に重力が関与している.

（身体の姿勢を維持するエネルギーに関係）

- 動物の胴体は弾性体で近似できる.

（材料が一様な円柱とみなすことができる.）

- 胴体の折れ曲がりにくさにオイラーの座屈条件を適用可能である.
- 座屈条件の荷重は生物体の質量に比例する.
- 筋肉の動作特性はどの動物も同じ.
- 生物全体の質量は胴体の質量に比例.

0.75乗則：もう一つの学説

G.B.West, J.H.Brown and B.J.Enquist,
Science, Vol.276, pp.122-126(1997)

次回の講義で紹介

生体工学第一　　2011.4.13

第２回講義内容

１．出席点の問題:
　　枝の2.5乗則（出席点）

２．基礎代謝率

３．0.75乗則：熱放散による説明（前回の復習）

４．0.75乗則：二つの学説

　4.1　弾性相似則モデル

　4.2　フラクタルモデル（次回に講義）

第２回講義おわり