第 11 回　応力テンソル（２）

無機材料工学科
准教授　安田公一

１．主応力

単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ を持つ任意の面 ds における応力ベクトル $\boldsymbol{\sigma}^n$ は，応力テンソルσ_{ij} で表すことができる．一般的には，応力ベクトル $\boldsymbol{\sigma}^n$ は単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ に平行ではないが，ある特定の面では，応力ベクトル$\boldsymbol{\sigma}^n$ は単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ に平行となり，剪断成分がゼロになることある．この面のことを主応力面と言い，その応力ベクトルの大きさを主応力と言う．

主応力面の単位法線ベクトルを $\boldsymbol{m}$ で表し，それに対応する主応力の大きさをσで表すと，主応力面での応力ベクトル$\boldsymbol{\sigma}^m$ は，次式で表される．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}^m &= \sigma\cdot\mathbf{m} \\ &= \sigma\cdot(\mathbf{i}\upsilon_{\mathrm{mx}}+\mathbf{j}\upsilon_{\mathrm{my}}+\mathbf{k}\upsilon_{\mathrm{mz}})\end{aligned} \quad (1)$$

ここで，$\upsilon_{\mathrm{mx}}, \upsilon_{\mathrm{my}}, \upsilon_{\mathrm{mz}},$ は主応力面の単位法線ベクトルの方向余弦である．一方，主応力面の応力ベクトル$\boldsymbol{\sigma}^m$ は次のように表されることは，前回の(9)式で述べた．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}^m = &\boldsymbol{i}(\upsilon_{mx}\sigma_{xx}+\upsilon_{my}\sigma_{yx}+\upsilon_{mz}\sigma_{zx}) \\ &+\boldsymbol{j}(\upsilon_{mx}\sigma_{xy}+\upsilon_{my}\sigma_{yy}+\upsilon_{nz}\sigma_{zy}) \\ &+\boldsymbol{k}(\upsilon_{mx}\sigma_{xz}+\upsilon_{my}\sigma_{yz}+\upsilon_{mz}\sigma_{zz})\end{aligned} \quad (2)$$

(1)式 と(2)式を等値すると，

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{i}(\upsilon_{mx}\sigma_{xx}-\upsilon_{mx}\sigma+\upsilon_{my}\sigma_{yx}+\upsilon_{mz}\sigma_{zx}) \\ &+\boldsymbol{j}(\upsilon_{mx}\sigma_{xy}+\upsilon_{my}\sigma_{yy}-\upsilon_{my}\sigma+\upsilon_{nz}\sigma_{zy}) \\ &+\boldsymbol{k}(\upsilon_{mx}\sigma_{xz}+\upsilon_{my}\sigma_{yz}+\upsilon_{mz}\sigma_{zz}-\upsilon_{mz}\sigma) \quad = \quad 0\end{aligned} \quad (3)$$

ここで，ベクトル $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ は一次独立なベクトルであるから，(3)式を満足するυ_{mi} (i = x, y, z) に関する連立一次方程式を得る．

$$\begin{aligned}\upsilon_{mx}(\sigma_{xx}-\sigma)+\upsilon_{my}\sigma_{yx}+\upsilon_{mz}\sigma_{zx} &= 0 \\ \upsilon_{mx}\sigma_{xy}+\upsilon_{my}(\sigma_{yy}-\sigma)+\upsilon_{nz}\sigma_{zy} &= 0 \\ \upsilon_{mx}\sigma_{xz}+\upsilon_{my}\sigma_{yz}+\upsilon_{mz}(\sigma_{zz}-\sigma) &= 0\end{aligned} \quad (4)$$

この連立 1 次方程式が自明でない解を持つためには，

$$\begin{vmatrix}\sigma_{xx}-\sigma & \sigma_{yx} & \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy}-\sigma & \sigma_{zy} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz}-\sigma\end{vmatrix} = 0 \quad (5)$$

(5)式を展開して，

$$\sigma^3 - J_1\sigma^2 + J_2\sigma - J_3 = 0 \qquad (6)$$

ここで， J_1, J_2, J_3 は，次式で定義されている．

$$J_1 = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} \qquad (7)$$

$$J_2 = \begin{vmatrix} \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{zz} & \sigma_{zx} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{xx} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{vmatrix} \qquad (8)$$

$$J_3 = \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} \qquad (9)$$

ここで，(6)式は，3 次方程式なので，一般的に 3 つの根を持つ．これら 3 つの解が，主応力$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$の大きさを表している．

（以下省略）

２．平衡方程式

図１には，x, y, z 軸に垂直な面を持つ微小体積要素を示す．x 軸に関するニュートンの並進運動に関する運動方程式を書くと，

$$\begin{aligned}\rho dxdydz\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \left(\sigma_{xx} + \frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}dx\right)dydz - \sigma_{xx}dydz \\ &+ \left(\sigma_{yx} + \frac{\partial\sigma_{yx}}{\partial y}dy\right)dzdx - \sigma_{yx}dzdx \\ &+ \left(\sigma_{zx} + \frac{\partial\sigma_{zx}}{\partial z}dz\right)dxdy - \sigma_{zx}dxdy \\ &+ f_x dxdydz \qquad (14)\end{aligned}$$

ここで，ρ は密度， u はx 軸方向の変位， f_x は体積力である．y 軸やz 軸方向にも同様な式が成り立ち，それぞれの式で同じ値で符号が違うものを相殺すると，最終的に，次の 3 つの方程式が得られる．．

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{zx}}{\partial z} + f_x \qquad (15)$$

$$\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial\sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{yx}}{\partial z} + f_y \qquad (16)$$

$$\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial\sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z} + f_x \qquad (17)$$

ここで， v と w はy 軸とz 軸方向の変位である．もし，この体積要素が内部応力によって静的釣り合い状態にあるならば，これらの方程式の左辺は０になるはずである．このようにして，応力テンソルの平衡方程式が次のように得られる．

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} + f_x = 0 \qquad (18)$$

$$\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial z} + f_y = 0 \qquad (19)$$

$$\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + f_x = 0 \qquad (20)$$

さらに，体積力 $\boldsymbol{f}$ がなければ，

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} = 0 \qquad (21)$$

$$\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial z} = 0 \qquad (22)$$

$$\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0 \qquad (23)$$

次に，z 軸に関するニュートンの回転運動に関する運動方程式を検討する．同様にして，いくつかの項を相殺すると，x 軸と y 軸に関する同様な方程式が得られる．

$$I_1 \frac{\partial^2 \omega_{yz}}{\partial t^2} = \left(\sigma_{yz} - \sigma_{zy}\right) dxdydz \qquad (25)$$

$$I_2 \frac{\partial^2 \omega_{zx}}{\partial t^2} = \left(\sigma_{zx} - \sigma_{xz}\right) dxdydz \qquad (26)$$

$$I_3 \frac{\partial^2 \omega_{xy}}{\partial t^2} = \left(\sigma_{xy} - \sigma_{yx}\right) dxdydz \qquad (27)$$

しかしながら，慣性モーメント I_i (i=1,2,3) の大きさは ρdx^5 程度であるので，これらの方程式の左辺は高位の無限小として無視しても良い．すなわち，

$$\sigma_{yz} = \sigma_{zy} \qquad (28)$$

$$\sigma_{zx} = \sigma_{xz} \qquad (29)$$

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx} \qquad (30)$$

この導出から，応力テンソルは対称テンソルであることがわかる．また，それ故に，3 つの主応力は実数となって，主応力面は互いに直交することがわかる．