

## 11 割当問題

$n$  人の人に  $n$  個の仕事を割り当てるとき、最も効率のよい割り当てを見つけるための問題です。それぞれの人がそれぞれの仕事をしたときに得られる利益 (かかるコスト) が予想されているとします。そのとき、どの人にどの仕事を割り当てると全体の利益が最大になるか (全体のコストが最小になるか) という観点から定式化を行います。下で見るように、輸送問題の特別な形とも見ることができませんが、整数計画問題の 1 つともいえます。ハンガリー法などの特別な解法があるため解きやすい問題です。

例えば、表 41 のように A,B,C,D の 4 人が、a,b,c,d の 4 つの仕事を終える予想時間が与えられているとします。誰にどの仕事を割り当てるのが最も都合がよいでしょうか。仕事で見ると、a は B、b は D、c は C がやるのがよさそうだが、d も C がよいので、c と競合してしまう。こういう事情を考えて割当案を定める必要があります。

|   | A | B  | C | D |
|---|---|----|---|---|
| a | 5 | 4  | 7 | 6 |
| b | 6 | 7  | 3 | 2 |
| c | 8 | 11 | 2 | 5 |
| d | 9 | 8  | 6 | 7 |

表 41: A,B,C,D が a,b,c,d の仕事を終える予想時間

各人への仕事の割り当ては (c,a,b,d) のように順列の形で表せるから、あらゆる割り当て方は  $n!$  通りであり、それぞれについて所要時間を  $8 + 4 + 3 + 7 = 22$  のように計算してその最小値を探せば、この問題を解くことができます。しかし、この方法では  $n$  が 10 でもとても実用にはならないほどの計算を必要とします。

人  $i$  に仕事  $j$  が割り当てられたら、 $x_{ij} = 1$ 、割り当てられなかったら  $x_{ij} = 0$  という値をとる変数  $x_{ij}$  を用いると、

$$\begin{aligned}
 x_{11} + x_{12} + \dots + x_{1n} &= 1, & x_{11} + x_{21} + \dots + x_{n1} &= 1, \\
 x_{21} + x_{22} + \dots + x_{2n} &= 1, & x_{12} + x_{22} + \dots + x_{n2} &= 1, \\
 &\dots & & \\
 x_{n1} + x_{n2} + \dots + x_{nn} &= 1, & x_{1n} + x_{2n} + \dots + x_{nn} &= 1,
 \end{aligned}$$

となるから、この制約条件は輸送問題の制約式の右辺がすべて 1 という場合になっています。一方、 $x_{ij}$  が 0 か 1 ということなので整数条件になり、整数計画問題と見ることもできます。輸送問題のアルゴリズムで解いても良いのですが、もっと容易なアルゴリズム (ハンガリー法) があります。

## 11.1 ハンガリー法

ハンガリーのケーニッヒの業績をしのんでつけられた名前とされています。表 41 の例を用いて、アルゴリズムの説明をします。

### ハンガリー法

ステップ 1: 各行の各要素からその行の最小値を引き、さらに各列から最小値を引きます。(結果は表 37)

ステップ 2: 0 を各行各列から 1 つずつ選ぶことができれば、その 0 の位置の組が割当案になります。(表 37 ではそれができないので、次に進みます。表 39 では、表 40 または表 41 を作ることができるので、最適解の総費用 17 が得られて終わりです。)

ステップ 3: すべての 0 をできるだけ少ない数の縦または横の線で覆います。(表 38 では、縦 2 本、横 1 本の線で覆いましたが、縦 1 本、横 2 本で覆っても、計 3 本であることには変わりありません)

ステップ 4: 線で消されていない要素から、それらの最小値を引き、縦横の線の重なっている要素に加えます。ステップ 2 に戻ります。(表 38 の消されていない要素から 2 を引き、縦横の線の重なっている要素に加えると、表 39 になります)

ステップ 1 では、先に行の最小値を引きましたが、先に列の最小値を引いても構いません。こうすると、表 42 が得られます。ここから行の最小値を引くと表 39 になるので、最初の段階で解が得られたことになります。

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 3 | 2 |
| 3 | 5 | 1 | 0 |
| 5 | 9 | 0 | 3 |
| 2 | 2 | 0 | 1 |

表 37

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 3 | 2 |
| 3 | 5 | 1 | 0 |
| 5 | 9 | 0 | 3 |
| 2 | 2 | 0 | 1 |

表 38

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 5 | 4 |
| 1 | 3 | 1 | 0 |
| 3 | 7 | 0 | 3 |
| 0 | 0 | 0 | 1 |

表 39

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| 1 |   |   |   |
|   |   |   | 1 |
|   |   | 1 |   |
|   | 1 |   |   |

表 40(割当案)

|   |  |   |   |
|---|--|---|---|
| 1 |  |   |   |
|   |  |   | 1 |
|   |  | 1 |   |
| 1 |  |   |   |

表 41(割当案)

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 5 | 4 |
| 1 | 3 | 1 | 0 |
| 3 | 7 | 0 | 3 |
| 4 | 4 | 4 | 5 |

表 42

割当問題は、費用の和が最小になる組を各行各列から 1 つずつ選び出して作るのので、各行、各列の費用が、どの要素についても同一量だけ多くても、あるいは少なくとも、最適解 (最低費用の割当)

にはまったく影響がありません。そこでステップ 1 の操作を行いました。費用 0 の要素だけで割り当てができれば、最低の費用の割り当てが完了したことを意味します。

ステップ 3、ステップ 4 での計算はケーニッヒの定理に基づきます。これはまた、ネットワークの上の流れの問題とも密接に関係しています。

## 11.2 ケーニッヒの定理

同じ行や同じ列から 2 個以上選ばないように 0 を選びたいのですが、表 37 の場合には、どのように 0 を選んだら良いでしょうか。この表の場合には、3 行目、4 行目には 0 が 1 個しかないのにその 0 が 3 列目にあるので、同じ行/列に 2 個以上並ばないような独立な 0 はせいぜい 3 個までしか選ぶことができません。このように、どの行にも、またどの列にも 0 があるにもかかわらず、各行各列から 0 を 1 つずつ選ぶことができない場合があります。

### ケーニッヒの定理

どの行や列からも 2 個以上選ばないようにして選ぶことができる 0 の最大個数は、すべての 0 を消すために必要な線の最小本数に等しい。

表 37 では独立な 0 を 3 個までは選べますが 4 個は選ぶことができません。この定理を使うと、すべての 0 を 3 本の線で消すことができることが分かります。そこで、その 3 本の線を実際にひいてみると、例えば表 38 のようになります。線が引かれていない成分の中で最小の数は 2 になるので、

- (1) すべての成分から 2 を引きます、そして
- (2) 線が引かれている行や列には、それぞれ 2 を足します。

これは、

- (1') すべての成分から 2 を引きます、そして
- (2') 2 本の線がひかれている成分 (2 本の線の交点) に 2 を足します、そして
- (3') 1 本の線が引かれている成分には何もしません、

という手続きと同じです。これを実行しますと表 39 になり、今度はどの行や列からも 2 個以上選ばないように 4 個の 0 を選ぶことが可能です。よって、これで解を求めることができました。

このように、どの行や列からも 2 個以上選ばないように 4 個の 0 を選ぶことが、1 度でできなくても、ステップ 2～ステップ 4 を 2 度 3 度と繰り返せばできるようになります。その理由は次のとおりです。線で消されていない成分の最小の数を  $a$  とするとき、

- (1') すべての成分から  $a$  を引きます、そして
- (2') 2 本の線がひかれている成分 (2 本の線の交点) に  $a$  を足します、そして

(3') 1本の線が引かれている成分には何もしません、

という操作を施すことによって、成分の総和は確実に減っていきます。従って、何度か繰り返すうちに0がだんだん多くなり、ついには、各行各列から重ならないように1個ずつ0を選ぶことができるようになります。

### 11.3 タクシー相乗り問題の緩和問題 (AP)

前章の例 10.1 において『タクシー相乗り問題』を紹介し、実際に分枝限定法を用いて解いてみました。分枝限定法において、緩和問題 (AP) を何度か解く必要がありましたが、そのときには、緩和問題 (AP) を輸送問題とみなして、飛び石法を適用しました。しかし、(AP) は供給地と需要地の個数が等しく、かつ、すべての供給量  $a_i$  と需要量  $b_j$  が共に 1 の特殊な問題 (割当問題) なので、(AP) を割当問題とみなしてハンガリー法を適用する方が簡単です。

ハンガリー法のステップ 1 において、「各列の各要素からその列の最小値を引き、さらに各行から最小値を引く」手順を取ることにします。先に各行から最小値を引くよりも、後々の計算がずっと簡単になるので、確認してください (演習問題 11.1)。

5 地点間の距離  $c_{ij}$  として 次の表が与えられていました。

| i, j | 1   | 2   | 3   | 4   | 5   |
|------|-----|-----|-----|-----|-----|
| 1    | -   | 4.0 | 4.0 | 4.7 | 5.0 |
| 2    | 0.0 | -   | 1.2 | 2.5 | 1.7 |
| 3    | 0.0 | 1.2 | -   | 1.0 | 1.4 |
| 4    | 0.0 | 2.5 | 1.0 | -   | 2.0 |
| 5    | 0.0 | 1.7 | 1.4 | 2.0 | -   |

表 43

この表に対して、まず各列の各要素からその列の最小値を引くと表 44 が得られ、さらに各行から最小値を引くと表 45 が得られます。0 を各行各列から 1 つずつ選ぶことができないので、ステップ 3 においてすべての 0 をできるだけ少ない数の縦または横の線で覆います。その結果、表 46 が得られました。線で消されていない要素から、それらの最小値 (0.3) を引き、縦横の線の重なっている要素に加えると、表 47 になります。表 48 が示すように、0 を各行各列から 1 つずつ選ぶことができるので、その 0 の位置の組が割当案になり終わります。

### 11.4 演習問題

演習問題 11.1. 表 43 に対し、ハンガリー法のステップ 1 として「各行の各要素からその行の最小値を引き、さらに各列から最小値を引く」手順も試してみましょう。

|     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|
| -   | 2.8 | 3.0 | 3.7 | 3.6 |
| 0.0 | -   | 0.2 | 1.5 | 0.3 |
| 0.0 | 0.0 | -   | 0.0 | 0.0 |
| 0.0 | 1.3 | 0.0 | -   | 0.6 |
| 0.0 | 0.5 | 0.4 | 1.0 | -   |

表 44

|     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|
| -   | 0.0 | 0.2 | 0.9 | 0.8 |
| 0.0 | -   | 0.2 | 1.5 | 0.3 |
| 0.0 | 0.0 | -   | 0.0 | 0.0 |
| 0.0 | 1.3 | 0.0 | -   | 0.6 |
| 0.0 | 0.5 | 0.4 | 1.0 | -   |

表 45

|     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|
| -   | 0.0 | 0.2 | 0.9 | 0.8 |
| 0.0 | -   | 0.2 | 1.5 | 0.3 |
| 0.0 | 0.0 | -   | 0.0 | 0.0 |
| 0.0 | 1.3 | 0.0 | -   | 0.6 |
| 0.0 | 0.5 | 0.4 | 1.0 | -   |

表 46

|     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|
| -   | 0.0 | 0.5 | 0.9 | 0.8 |
| 0.0 | -   | 0.2 | 1.2 | 0.0 |
| 0.3 | 0.0 | -   | 0.0 | 0.0 |
| 0.0 | 1.0 | 0.0 | -   | 0.3 |
| 0.0 | 0.2 | 0.4 | 0.7 | -   |

表 47

|   |  |   |   |   |
|---|--|---|---|---|
| 1 |  |   |   |   |
|   |  |   |   | 1 |
|   |  |   | 1 |   |
|   |  | 1 |   |   |
| 1 |  |   |   |   |

表 48(割当案)

**演習問題 11.2.** タクシー相乗り問題の子問題 1 から構築した緩和問題を割当問題とみなし、ハンガリー法を用いて解いて、子問題 1 の下界値を求めなさい。

**演習問題 11.3.** タクシー相乗り問題の子問題 2 についても同様にして、子問題 2 の下界値を求めなさい。

**演習問題 11.4.** 共通要素を持たないが同じ要素数を持つ 2 つの頂点集合  $U$  と  $V$  と、それらに属する頂点を結ぶ枝集合を  $E = \{(i, j) \mid \forall i \in U, \forall j \in V\}$  とする。枝には重み  $c = \{c_{ij} \in \mathbb{R} \mid c_{ij} > 0, (i, j) \in E\}$  が与えられている。この時、 $G(U, V, E, c)$  は重み付き 2 部グラフと呼ばれる。

- $U$  と  $V$  からそれぞれ丁度 1 つずつ頂点を選んだ頂点のペアからなる集合を考える。ペア同士が互いに共通した頂点を持たないもののなかで最大重み総和を実現するものを求めるにはどのような整数計画問題を解けばよいか。
- 講義に出て来たどの方法を用いれば上記の問題は解けるか。またその理由を書け。
- $|U| = |V| = 2n$ 、 $n$  は正の整数とする。 $U$  の 1 つの頂点から  $V$  の丁度 2 つの頂点、及び  $V$  の 1 つの頂点から  $U$  の丁度 2 つの頂点を結ぶ枝だけが残るようにしたい。この時、枝の最大重み総和を実現するものを求めるにはどのような整数計画問題を解けばよいか。

**演習問題 11.5.** 社員と仕事の割当問題を考える。下記の表は社員  $A \sim E$  がそれぞれ仕事  $a \sim e$  を終了するのに予想される時間を示している。同時に仕事が出来ると仮定したら、最良の割当はどのようなものか。また、5 人の社員が同時に仕事を始めたとなると、全ての仕事が終了する予想時間は何時間か。

|    |     | 仕事  |     |     |     |     |
|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
|    |     | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $e$ |
| 社員 | $A$ | 4   | 5   | 2   | 2   | 5   |
|    | $B$ | 5   | 4   | 1   | 3   | 4   |
|    | $C$ | 6   | 2   | 6   | 4   | 3   |
|    | $D$ | 1   | 6   | 5   | 5   | 5   |
|    | $E$ | 7   | 2   | 3   | 1   | 6   |

## 12 最短路問題

頂点の集合  $V$ 、枝の集合  $E$ 、枝の重みを表す関数  $c$  を用いて定義された有向ネットワーク  $N = (V, E, c)$  が与えられているとする。

2つの頂点  $s$  と  $t$  (それぞれ始点と終点) が定められた時、 $s$  から  $t$  への長さ (重さ) 最小の道を見つける問題を最短路問題と呼ぶ。また、全ての2頂点間の最短路を求める問題も最短路問題の一つである。

最短路問題を解く最も有名な方法が Dijkstra のアルゴリズムである。

### ダイクストラ法

ステップ 1:  $S := \emptyset$ ,  $\bar{S} := V$ ,  $d(i) := \infty$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ),  $d(s) := 0$  と  $\text{prev}(s) := 0$  とおく。

ステップ 2:  $|S| = n$  ( $= |V|$ ) であれば終了、 $d(t)$  が最短距離の長さで、その道は  $t, \text{prev}(t), \text{prev}(\text{prev}(t)), \dots$  を逆にたどっていけば良い。

ステップ 3:  $d(i) = \min\{d(j) \mid j \in \bar{S}\}$  となる  $i \in \bar{S}$  を求めて  $S := S \cup \{i\}$ ,  $\bar{S} := \bar{S} \setminus \{i\}$  とおく。

全ての  $(i, j) \in E$  について、もし  $d(j) > d(i) + c_{ij}$  ならば  $d(j) := d(i) + c_{ij}$ ,  $\text{prev}(j) := i$  とおき、ステップ 2 へ。

ダイクストラ法は始点  $s$  から他の全ての頂点への最短路を正しく求め、その計算量は  $O(|V|^2)$  であることが証明できるが、ここでは省略する。

図 12 のネットワークに対して、始点  $s$  から終点  $t$  をダイクストラ法を用いて解いてみよう。

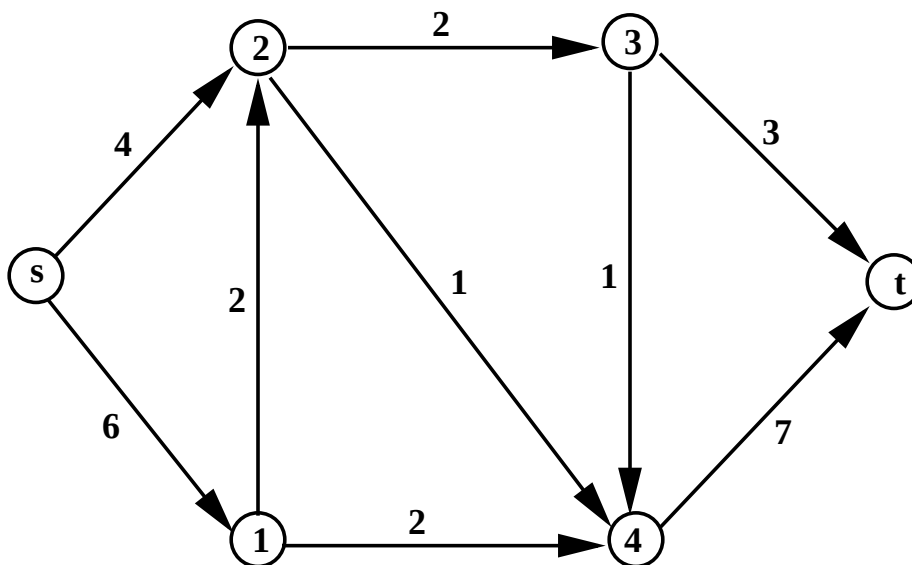


図 12: 最短路問題

初期化

$$\begin{aligned} S &= \emptyset, & \bar{S} &= \{s, 1, 2, 3, 4, t\} \\ d(s) &= 0, & d(1) &= \infty, & d(2) &= \infty, & d(3) &= \infty, & d(4) &= \infty, & d(t) &= \infty \\ \text{prev}(s) &= 0, & \text{prev}(1) &=, & \text{prev}(2) &=, & \text{prev}(3) &=, & \text{prev}(4) &=, & \text{prev}(t) &= \end{aligned}$$

$i = s$  を選択

$$\begin{aligned} S &= \{s\}, & \bar{S} &= \{1, 2, 3, 4, t\} \\ d(s) &= 0, & d(1) &= 6, & d(2) &= 4, & d(3) &= \infty, & d(4) &= \infty, & d(t) &= \infty \\ \text{prev}(s) &= 0, & \text{prev}(1) &= s, & \text{prev}(2) &= s, & \text{prev}(3) &=, & \text{prev}(4) &=, & \text{prev}(t) &= \end{aligned}$$

$i = 2$  を選択

$$\begin{aligned} S &= \{s, 2\}, & \bar{S} &= \{1, 3, 4, t\} \\ d(s) &= 0, & d(1) &= 6, & d(2) &= 4, & d(3) &= 6, & d(4) &= 5, & d(t) &= \infty \\ \text{prev}(s) &= 0, & \text{prev}(1) &= s, & \text{prev}(2) &= s, & \text{prev}(3) &= 2, & \text{prev}(4) &= 2, & \text{prev}(t) &= \end{aligned}$$

$i = 4$  を選択

$$\begin{aligned} S &= \{s, 2, 4\}, & \bar{S} &= \{1, 3, t\} \\ d(s) &= 0, & d(1) &= 6, & d(2) &= 4, & d(3) &= 6, & d(4) &= 5, & d(t) &= 12 \\ \text{prev}(s) &= 0, & \text{prev}(1) &= s, & \text{prev}(2) &= s, & \text{prev}(3) &= 2, & \text{prev}(4) &= 2, & \text{prev}(t) &= 4 \end{aligned}$$

$i = 1$  ( $i = 3$  と選択する可能性もある)

$$\begin{aligned} S &= \{s, 1, 2, 4\}, & \bar{S} &= \{3, t\} \\ d(s) &= 0, & d(1) &= 6, & d(2) &= 4, & d(3) &= 6, & d(4) &= 5, & d(t) &= 12 \\ \text{prev}(s) &= 0, & \text{prev}(1) &= s, & \text{prev}(2) &= s, & \text{prev}(3) &= 2, & \text{prev}(4) &= 2, & \text{prev}(t) &= 4 \end{aligned}$$

$i = 3$  を選択

$$\begin{aligned} S &= \{s, 1, 2, 3, 4\}, & \bar{S} &= \{t\} \\ d(s) &= 0, & d(1) &= 6, & d(2) &= 4, & d(3) &= 6, & d(4) &= 5, & d(t) &= 9 \\ \text{prev}(s) &= 0, & \text{prev}(1) &= s, & \text{prev}(2) &= s, & \text{prev}(3) &= 2, & \text{prev}(4) &= 2, & \text{prev}(t) &= 3 \end{aligned}$$

$i = t$  では何もすることがなく終了。よって、最短路の距離は 9 で最短路は  $s \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow t$  である。

## 12.1 演習問題

演習問題 12.1. 図 13 のネットワークに対して  $s$  から  $t$  までの最短距離とその長さを求めよ。



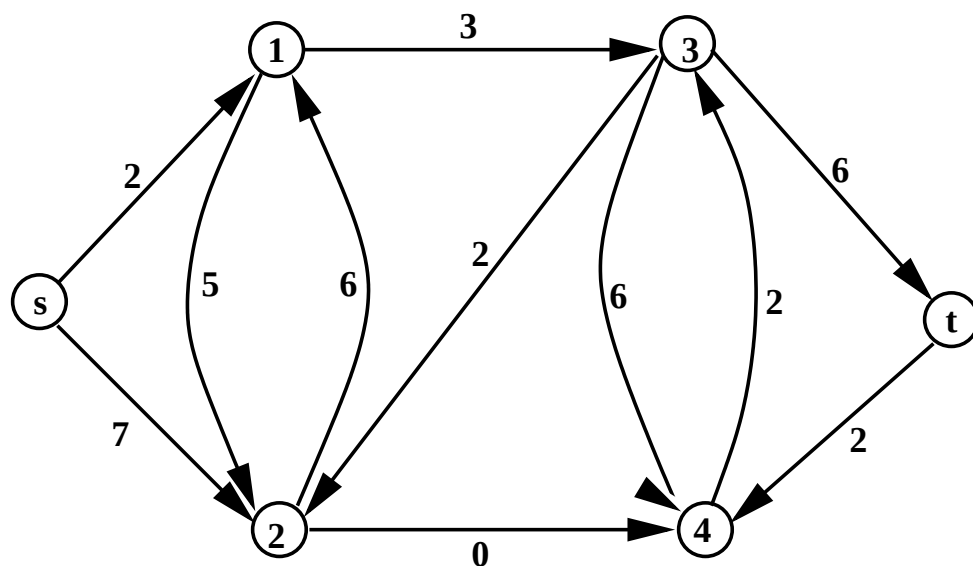


图 13: 最短路問題