10　整数計画問題 – 巡回セールスマン問題

ここでは、整数計画問題のもう一つの問題例として巡回セールスマン問題を紹介します。巡回セールスマン問題は、何か所かの地点とその地点間の距離が与えられたとき、全ての地点を巡り、元に戻る最短の道順を求める問題です。

例 10.1. *(タクシー相乗り問題)*
大学のサークルの新入生歓迎コンパが繁華街の渋谷で開かれた。最後まで残った新入生のうち何人かは、すでに終電がなくなってしまったため、同じ方面の A,B,C,D の 4 人がまとまって、1 台のタクシーで渋谷から帰ることとなった。渋谷と A,B,C,D の 4 人の家の計 *5* 地点間の距離を示したものが表 *26* になっており、行は始点、列は終点を示している。タクシー代は先輩が払うため、どんな順番で 4 人の家を巡れば、最も走行距離が短くなるかを考えたい。

表 26: 5 地点間の距離 c_{ij}(km)

	地点 1(渋谷)	地点 2(A)	地点 3(B)	地点 4(C)	地点 5(D)
地点 1(渋谷)	-	4.0	4.0	4.7	5.0
地点 2(A)	0.0	-	1.2	2.5	1.7
地点 3(B)	0.0	1.2	-	1.0	1.4
地点 4(C)	0.0	2.5	1.0	-	2.0
地点 5(D)	0.0	1.7	1.4	2.0	-

4 人の家からそれぞれ渋谷までの距離を、タクシー代に含まれないので便宜上 **0** とおき、タクシーは渋谷から出発して、4 人の家を巡り、再び渋谷に戻ると考えれば、まさに巡回セールスマン問題となっています。

10.1　巡回セールスマン問題のモデル化

まず、ネットワークを使って問題をモデル化します。出発点も含め、各地点に $1, 2, \ldots, n$ と番号をつけます。上の例では $n = 5$ であり、また、地点 i から地点 j までの移動距離を c_{ij}**(km)** とします。

図 **6** が、各地点を頂点、各地点間を結ぶ道を枝、タクシーの移動する距離を枝の重みとする有向ネットワーク $N = (V, E, c)$ です。V, E, c は、それぞれ、頂点の集合、枝の集合、枝の重みを表す関数です。そこで、『4 人の家の巡り方』を、このネットワーク N 上で、『すべての地点を巡る有向な閉路』(このような閉路を一般に巡回路, **Hamilton tour** と呼ぶ) としてみれば、タクシー相乗り問題は、巡回路の中で枝の重みの総和が最小のものを見つける問題と考えられます。すなわち、巡回路を構成するように、しかもその巡回路の枝の重みの総和を最小にするように、ネットワーク中の枝を選び出す問題と考えられます。

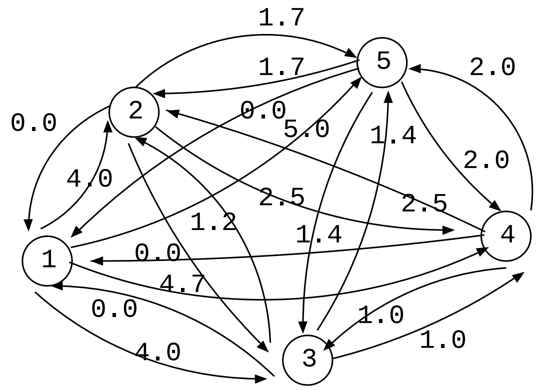


図 6: タクシー相乗り問題のネットワーク

次に、この問題を数理計画問題として定式化してみます。枝 $(i,j) \in E$ に変数 x_{ij} を対応させ、

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{枝 } (i,j) \text{ を巡回路に使う} \\ 0, & \text{枝 } (i,j) \text{ を巡回路に使わない} \end{cases} \qquad (i,j) \in E$$

と約束します。選ばれた枝が巡回路を構成するには、全ての頂点において、必ずどれか１本の出枝と１本の入枝が巡回路に使われなくてはならないので、変数 x_{ij} は、次の関係式

$$\begin{aligned} \sum_{(i,j)\in\delta_i^+} x_{ij} = 1, \quad i = 1,2,\ldots,n \\ \sum_{(i,j)\in\delta_j^-} x_{ij} = 1, \quad j = 1,2,\ldots,n \end{aligned} \tag{16}$$

を満たす必要があります。ここで、δ_i^+ は、頂点 i から外向きに出ている枝の集合、δ_j^- は頂点 j へ内向きに入る枝の集合を表します。また、このとき、巡回路の枝の重みの総和は、$\sum_{(i,j)\in E} c_{ij}x_{ij}$ と表せます。そこで、式 **(16)** を制約条件にした、以下の数理計画問題

$$(AP) \left| \begin{array}{ll} \textbf{minimize} & z_{AP} = \sum_{(i,j)\in E} c_{ij}x_{ij} \\ \textbf{subject to} & \sum_{(i,j)\in\delta_i^+} x_{ij} = 1, \quad i = 1,2,\ldots,n \\ & \sum_{(i,j)\in\delta_j^-} x_{ij} = 1, \quad j = 1,2,\ldots,n \\ & x_{ij} \in \{0,1\}, \quad (i,j) \in E \end{array} \right.$$

を定義します。最適な巡回路を得るためには **(AP)** に対してさらに『路がつながっていないといけない』という制約 (これは部分巡回路除去制約と呼ばれます) が必要です。制約式 **(16)** を満たすだけでは、図 **7** に示すように、$x_{ij} = 1$ となる枝 (i,j) の集合 $X = \{(i,j) \in E | x_{ij} = 1\}$ が、一部の頂点だけをめぐる閉路で、枝の数が n 本未満となる複数の部分巡回路を構成し、一つの巡回路とならない場合も存在するからです。従って、巡回セールスマン問題を数理計画問題として定式化するには、

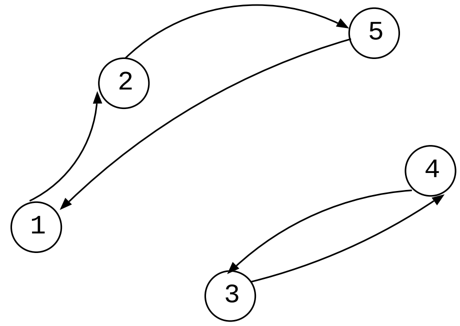


図 7: 部分巡回路の例

$$
(TSP)\left|\begin{array}{ll}
\textbf{minimize} & z_{AP} = \sum_{(i,j)\in E} c_{ij}x_{ij} \\
\textbf{subject to} & \sum_{(i,j)\in\delta_i^+} x_{ij} = 1, \quad i = 1,2,\ldots,n \\
 & \sum_{(i,j)\in\delta_j^-} x_{ij} = 1, \quad j = 1,2,\ldots,n \\
 & x_{ij} \in \{0,1\}, \quad (i,j) \in E \\
 & X = \{(i,j) \in E | x_{ij} = 1\} \text{ が部分巡回路を含まない}
\end{array}\right.
$$

のように、さらに部分巡回路除去制約式を追加しなくてはいけません。逆に、問題 **(AP)** が、巡回セールスマン問題 **(TSP)** から部分巡回路除去制約式を除いた緩和問題になっています。

(AP) は **6** 節で扱った輸送問題において、供給地と需要地の個数が等しく、かつ、すべての供給量 a_i と需要量 b_j が共に **1** の特殊な問題 (これは割当問題と呼ばれる) になります。問題 **(AP)** においては、**0-1** 整数条件 $x_{ij} \in \{0,1\}, (i,j) \in E$ を $0 \le x_{ij} \le 1, (i,j) \in E$ に置き換えても、**(AP)** の最適解では x_{ij} が **0** または **1** になります。このことより、**(AP)** を整数計画問題として解く必要もなく、輸送計画問題として解けば充分であることがわかります。そこで、緩和問題 **(AP)** から得られる下界と分枝限定法を組み合わせて、巡回セールスマン問題を解いてみましょう。

10.2 分枝限定法による巡回セールスマン問題の解法

ここでは、分枝限定法を行なう上で重要となる子問題の定義と、分枝操作を中心に説明します。

10.2.1 子問題の定義

子問題としては、変数 x_{ij} のうち、すでにいくつかの変数が 0 または 1 に固定されているものとします。ネットワーク N で考えるなら、枝の中に、けっして通ってはいけない枝 (この集合を E^0 とします) と、必ず通らなければいけない枝 (この集合を E^1 とします) が存在することになります。以後、この子問題を $(TSP[E^0, E^1])$ と表記します。枝 (p,q) が通れない場合は、枝の重みを $c_{pq} = \infty, (p,q) \in E^0$

とみなした完全グラフ[1]を考えます。逆に、枝 (p,q) を必ず通らなければならない場合は、(p,q) を除く頂点 p からのすべての出枝と、(p,q) を除く頂点 q へのすべての入枝を通ることが許されなくなるので、これら通ることができない枝の重みを ∞ に置き換えます。したがって、枝の重みを適当につけ替えたネットワークを再構築すれば、子問題自身も、元の問題と同様に巡回セールスマン問題と考えることができます。このことから、子問題に対する緩和問題も、元の問題と同様に割当問題として定義できます。

10.2.2 分枝操作

次に、分枝操作、すなわち、緩和問題を解いた結果、緩和問題の最適解が複数の部分巡回路を構成するとき、親問題をどのようにして子問題に分割すればよいか説明します。なお、適当な枝の重みのつけ替えを行なえば、列挙木上の任意の子問題を巡回セールスマン問題とみなすことができるので、以下では、子問題 $(TSP[E^0,E^1])$ を分枝対象の親問題と考えて説明します。

X に含まれる部分巡回路のうち、枝数が最小の部分巡回路 (枝数を s とします) に注目してそれに仮の番号をつけて、その枝集合を

$$A=\{(1,2),(2,3),\ldots,(s,1)\}\in X$$

とします。そこで、次のように、親問題 $(TSP[E^0,E^1])$ を s 個の子問題

子問題 **1:** $(TSP[E^0\bigcup\{(1,2)\},E^1])$

$x_{12}=0$ の制約を追加

子問題 **2:** $(TSP[E^0\bigcup\{(2,3)\},E^1\bigcup\{(1,2)\}])$

$x_{12}=1$, $x_{23}=0$ の制約を追加

$\cdots$

子問題 s**:** $(TSP[E^0\bigcup\{(s,1)\},E^1\bigcup\{(1,2),(2,3),\ldots,(s-1,s)\}])$

$x_{12}=1$, $x_{23}=1$, $x_{34}=1$, $\ldots$, $x_{(s-1)s}=1$, $x_{s1}=0$ の制約を追加

に分割します。これは、まず親問題を、枝 $(1,2)$ を通れない子問題と、枝 $(1,2)$ を必ず通る子問題におおきく２分割し、さらに、後者の子問題を、２つ目の枝 $(2,3)$ を通れない子問題と、枝 $(2,3)$ を必ず通る子問題に２分割します。以下同様な操作を、枝集合 A に属する各枝に関して次々に行ない、合計 s 個の子問題を生成した形です。この様子を図 **8** に示します。この操作で生成される s 個の子問題は、互いに実行可能領域が重ならず、しかも、親問題 $(TSP[E^0,E^1])$ の可能解を１つも漏らさないように、分割されていることに注意しましょう。なお、枝数が最小の部分巡回路を選ぶのは、分枝される子問題の数を少なくするための工夫です。

10.2.3 数値例

それでは、例 **10.1** に示した『タクシー相乗り問題』を実際に解いてみましょう。

[1]任意の 2 頂点間に枝があるグラフのこと

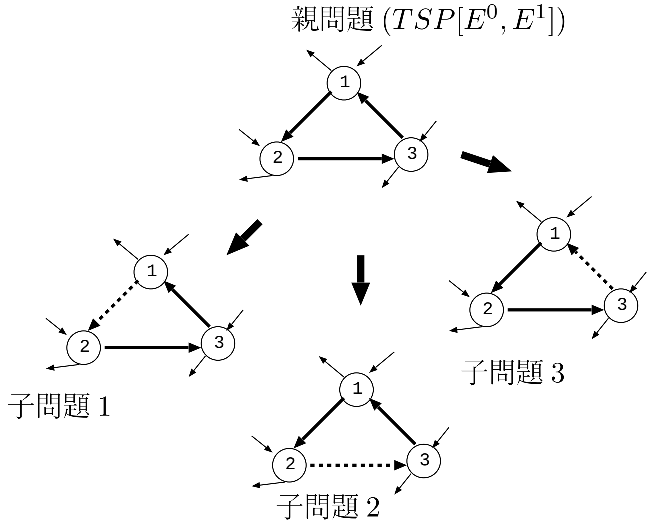


図 8: 分枝操作

親問題 $TSP[E^0, E^1] = TSP[\{\phi\}, \{\phi\}]$

まず、図 **6** のネット ワークで緩和問題 (**AP**) を解きましょう。前述のように輸送問題として定式化されますが、退化していることに注意してください。また、地点 i から i への移動距離として ∞ を想定しており、表において **“-”** で示しています。

表 27: 割当問題の変数

i, j	1	2	3	4	5	a_i
1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	1
2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	x_{25}	1
3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}	x_{35}	1
4	x_{41}	x_{42}	x_{43}	x_{44}	x_{45}	1
5	x_{51}	x_{52}	x_{53}	x_{54}	x_{55}	1
b_j	1	1	1	1	1	

表 28: 5 地点間の距離 c_{ij}

i, j	1	2	3	4	5
1	-	4.0	4.0	4.7	5.0
2	0.0	-	1.2	2.5	1.7
3	0.0	1.2	-	1.0	1.4
4	0.0	2.5	1.0	-	2.0
5	0.0	1.7	1.4	2.0	-

輸送問題の解法 (跳び石法) を適用した計算結果は、表 **29〜36** に示しています。緩和解として図 **10(a)** に示す枝が選ばれます。このときの目的関数値は、$z_{AP} = 7.7$ です。この緩和解は、部分巡回路を含むため、巡回セールスマン問題 (**TSP**) の可能解ではありません。代わりに、(**TSP**) の最適値 z_{TSP} の下界として、$z_{TSP} \geq 7.7$ を得ました。

そこで、部分巡回路 $3 \to 4 \to 3$ に注目し、$E^0 = \{(3,4)\}$, $E^1 = \phi$ とした子問題 1 と、$E^0 = \{(4,3)\}$, $E^1 = \{(3,4)\}$ とした子問題 2 に分枝し、再びそれぞれの緩和問題を解きます。

子問題 1 $TSP[E^0, E^1] = TSP[\{(3,4)\}, \{\phi\}]$

$E^0 = \{(3,4)\}$ により、地点 **3** から地点 **4** への距離を $c_{34} = \infty$ として設定し、親問題を解いたように緩和問題を解きます。子問題 1 の緩和解は図 **10(b)** に示しています。各自、計算をしてこの緩和解

表 29: x_{ij} の値 (1 反復目)

i, j	1	2	3	4	5	a_i
1		1	0			1
2			1	0		1
3				1	0	1
4	0				1	1
5	1					1
b_j	1	1	1	1	1	

表 30: 被約費用 $\bar{c}_{ij}$ (1 反復目)

i, j	1	2	3	4	5	u_i
1	-	4	4	-0.6	-0.7	0.0
2	-0.9	-	1.2	2.5	-1.2*	-2.8
3	0.6	1.5	-	1.0	1.4	-4.3
4	0	2.2	0.7	-	2	-3.7
5	0	1.4	1.1	0.4	-	-3.7
v_j	3.7	4.0	4.0	5.3	5.7	

表 31: x_{ij} の値 (2 反復目)

i, j	1	2	3	4	5	a_i
1		1	0			1
2			1		0	1
3				1	0	1
4	0				1	1
5	1					1
b_j	1	1	1	1	1	

表 32: 被約費用 $\bar{c}_{ij}$ (2 反復目)

i, j	1	2	3	4	5	u_i
1	-	4	4	0.6	0.5	0.0
2	0.3	-	1.2	1.2	1.7	-2.8
3	0.6	0.3	-	1.0	1.4	-3.1
4	0	1.0	-0.5*	-	2	-2.5
5	0	0.2	-0.1	0.4	-	-2.5
v_j	2.5	4.0	4.0	4.1	4.5	

表 33: x_{ij} の値 (3 反復目)

i, j	1	2	3	4	5	a_i
1		1	0			1
2			0		1	1
3				1	0	1
4	0		1			1
5	1					1
b_j	1	1	1	1	1	

表 34: 被約費用 $\bar{c}_{ij}$ (3 反復目)

i, j	1	2	3	4	5	u_i
1	-	4	4	0.6	0.5	0.0
2	-0.2*	-	1.2	1.2	1.7	-2.8
3	0.1	0.3	-	1.0	1.4	-3.1
4	0	1.5	1	-	0.5	-3.0
5	0	0.7	0.4	0.9	-	-3.0
v_j	3.0	4.0	4.0	4.1	4.5	

表 35: x_{ij} の値 (4 反復目)

i, j	1	2	3	4	5	a_i
1		1	0			1
2	0				1	1
3				1	0	1
4	0		1			1
5	1					1
b_j	1	1	1	1	1	

表 36: 被約費用 $\bar{c}_{ij}$ (4 反復目)

i, j	1	2	3	4	5	u_i
1	-	4	4	0.4	0.3	0.0
2	0	-	0.2	1.2	1.7	-3.0
3	0.3	0.5	-	1.0	1.4	-3.3
4	0	1.5	1	-	0.3	-3.0
5	0	0.7	0.4	0.7	-	-3.0
v_j	3.0	4.0	4.0	4.3	4.7	

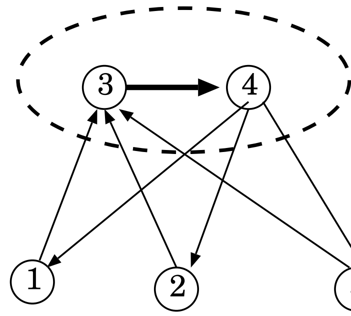


図 9: 縮約した巡回セールスマン問題

が得られるかどうか、確認してください (演習問題 **10.1**)。

<u>子問題２ $TSP[E^0, E^1] = TSP[\{(4,3)\}, \{(3,4)\}]$</u>

必ず地点 **3** から地点 **4** へ移動するため、これら **2** つの地点を 1 つの地点として縮約した **4** 地点の巡回セールスマン問題とみなすことができます。図 **9** が示すように、各地点 i から $<3,4>$ に向かうときの移動距離は c_{i3} を用いて、$<3,4>$ から各地点 j に向かうときの移動距離は c_{4j} を用いて計算を行ないます。また、$E^0 = \{(4,3\}$ により、地点 **4** から地点 **3** への移動距離は $c_{43} = \infty$ となります。そして割当問題を解いて緩和解が得られたら、その関数値に c_{34} を足した値が最適解の一つの下界値となります。

表 37: 割当問題の変数

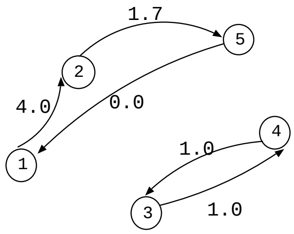
i, j	1	2	$<3,4>$	5	a_i
1	x_{11}	x_{12}	$x_{1<3,4>}$	x_{15}	1
2	x_{21}	x_{22}	$x_{2<3,4>}$	x_{25}	1
$<3,4>$	$x_{<3,4>1}$	$x_{<3,4>2}$	$x_{<3,4><3,4>}$	$x_{<3,4>5}$	1
5	x_{51}	x_{52}	$x_{5<3,4>}$	x_{55}	1
b_j	1	1	1	1	

表 38: 距離 c_{ij}

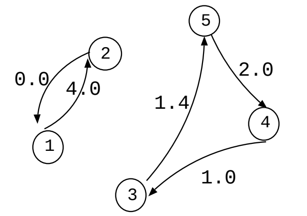
i, j	1	2	$<3,4>$	5
1	-	4.0	4.0	5.0
2	0.0	-	1.2	1.7
$<3,4>$	0.0	2.5	-	2.0
5	0.0	1.7	1.4	-

子問題２の緩和解は図 **10(c)** に示しています。この緩和解が得られるかどうか、確認してください (演習問題 **10.2**)。

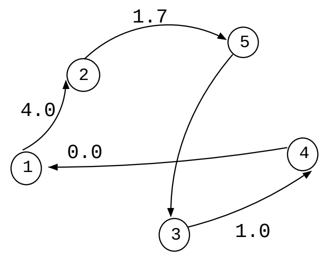
このとき、子問題２の緩和解 $1 \to 2 \to 5 \to 3 \to 4 \to 1$ は部分巡回路をもたないので、**(TSP)** の可



(a)$x_{12} = x_{25} = x_{51} = x_{34} = x_{43} = 1$



(b)$x_{12} = x_{21} = x_{35} = x_{54} = x_{43} = 1$



(c)$x_{12} = x_{25} = x_{53} = x_{34} = x_{41} = 1$

図 10: 子問題の緩和解と下界

能解となります。この可能解を暫定解、その目的関数値 $z_{AP} = 8.1$ を暫定値 $z^0 = 8.1$ とします。すなわち、**(TSP)** の上界値として、$z_{TSP} \leq 8.1$ を得ました。一方、子問題 1 では、部分巡回路を含む緩和解しか得られなかったので、その目的関数値 $z_{AP} = 8.4$ は子問題 1 の下界となります。ここで、下界が暫定値 $z^0 = 8.1$ を上回っていたため、子問題 1 に対して、これ以上分枝操作を継続しても、子問題 1 からは **(TSP)** の最適解は得られません (分枝停止)。したがって、すべての子問題を調べ終わったので、子問題 2 で得られた現在の暫定解、すなわち、ルート渋谷 $\Rightarrow A \Rightarrow D \Rightarrow B \Rightarrow C \Rightarrow$ 渋谷が、巡回セールスマン問題の最適解となります。また、現在の暫定値が最適値となり、$z_{TSP} = 8.1$ が得られます。

10.3　巡回セールスマン問題の応用例

巡回セールスマン問題は、ナップザック問題と並び、組み合わせ最適化の分野で代表的な問題の一つです。表 **39-40** の『巡回セールスマン問題と関連分野の年表』より、巡回セールスマン問題は、非常に多くの研究がなされていることがわかります。目的地数 n の大きな問題に対して厳密な最適解を求める競争が世界レベルで行なわれていて、現在の世界記録は $n = 85,900$ です **(2006** 年 **4** 月に解けた**)**[2]。

最適解が求まっていない有名な **Mona Lisa** 問題では $n = 100,000$**.** 暫定値が **5,757,191**、下界値が **5,757,054** なので、その残差は **137 (0.0024%)** となっている。現在、暫定値を更新すれば **US$1000** の賞金がもらえることになっている[3]。

[2]興味のある方は http://www.tsp.gatech.edu/に詳しい情報があります。
[3]http://www.tsp.gatech.edu/data/ml/monalisa.html 参照。

表 39: 巡回セールスマン問題と関連分野の年表

年	巡回セールスマン問題	関連分野
1759	Euler: ナイトの巡回問題	
1941		Hitchcock: 輸送問題の誕生
1947		Dantzig: 線形計画の誕生
1948	Flood: RAND 社における巡回セールスマン問題の誕生	
1954	Dantzig, Fulkerson&Johnson: 切除平面法によるアメリカ合衆国 49 都市問題の解決	
1956:		Bellman: 動的計画法の概念の提示
1957:		Ford&Fulkerson: 輸送問題に対する算法
1958:		Gomory: 整数計画に対する切除平面法
1960:		Land&Doig: 整数計画に対する分枝限定法
1962	Held&Karp: 動的計画法の適用による 16 都市問題の解決	
1963	Little ら：分枝限定法という名前の導入と巡回セールスマン問題への適用	
1973		Cook: 充足可能性問題の $\mathcal{NP}$-完全性
1973	Lin&Kerninghan：深さ優先のローカルサーチの適用による効率的なアルゴリズム	
1979		Khachian: 線形計画問題がクラス $\mathcal{P}$ に含まれるとの証明
1984		Karmarkar: 大規模線形計画問題に対する多項式時間算法 (内点法) の提案
1991	Miller&Pekny: 並列分枝限定法による 500,000 都市の (ランダムな) 非対称巡回セールスマン問題の解決	
1993	Applegate, Bixby, Chvatal &Cook：並列計算機を使った branch and cut 法による 4461 都市問題の解決	
2001	Applegate, Bixby, Chvatal &Cook：ライス大とプリンストン大の 110 プロセッサからなるネットワークを用いた 15,112 都市問題の解決	

表 40: 巡回セールスマン問題と関連分野の年表（続き）

年	巡回セールスマン問題	関連分野
2004	Applegate,Bixby,Chvatal,Cook&Helsgaun: スウェーデンの都市を巡る問題の解決	
2006	Applegate,Bixby,Chvatal,Cook,Espinoza, Goycoolea&Helsgaun：VSLI の応用問題で 85,900 都市を巡る問題の解決	

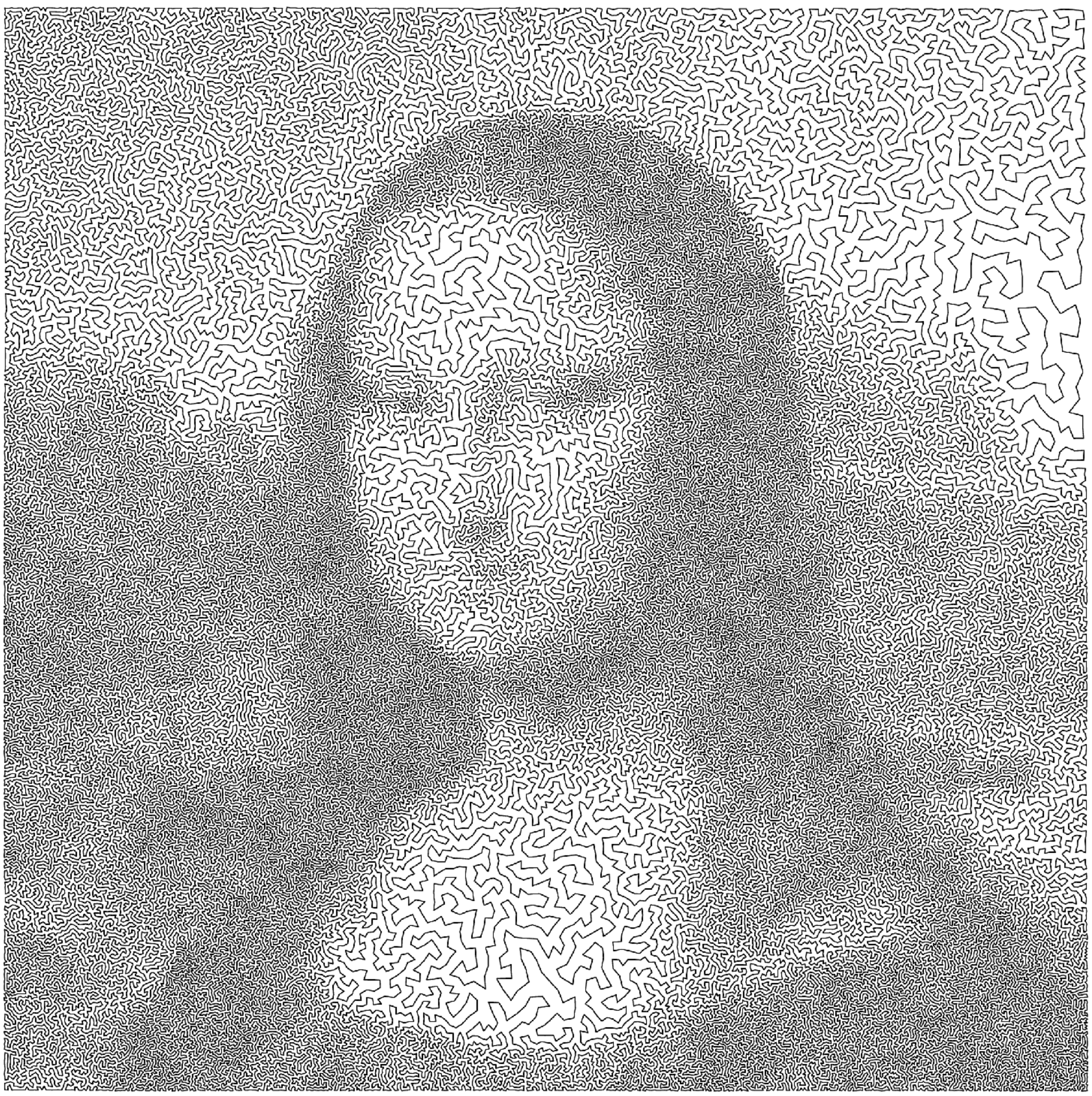


図 11: Mona Lisa の肖像画を元に作った 100,000 都市問題に対する現時点で最適な巡回路

また、巡回セールスマン問題はアカデミックな研究だけでなく、現実の問題に様々な形で応用されています。

プリント基板実装順序問題

テレビ、ビデオデッキ、パソコンといった電器製品には、IC、抵抗といった、多くの電子部品がハンダ付けされたプリント基板が使われています。以前は、人の手作業で、部品をプリント基板に挿入し、ハンダ付けをしていましたが、最近では、そのほとんどが実装機と呼ばれる機械を使い、部品を自動的にプリント基板に挿入し、ハンダ付けをしています。機械による実装では、基板を前後・左右に動かすことで、部品をつかんでいる挿入ヘッドの直下に、基板上の部品挿入箇所を移動させ、挿入ヘッドが部品を次々と基板に実装します。このとき、機械を効率よく動かすためには、基板を移動させる距離 (あるいは時間) の総和が最小になるように、実装順序を決めることが重要となります。基板を動かすことは、相対的に、”挿入ヘッド” という名のセールスマンが、全部の部品の挿入箇所を巡回することになります。したがって、この問題は巡回セールスマン問題としてモデル化できます。

10.4 演習問題

演習問題 10.1. タクシー相乗り問題の子問題 1 から緩和問題を構築し、子問題 1 の下界値を求めなさい。

演習問題 10.2. タクシー相乗り問題の子問題 2 から緩和問題を構築し、子問題 2 の下界値を求めなさい。

演習問題 10.3. 南米南部の 4 都市を最安ルートで巡る計画を立てたい。ただし、最初に出発する都市と最終的に到着する都市は同一であるとする。4 都市間の航空券は以下の表に比例した代金で購入できる。ただし、*1*（モンテビデオ)、*2*（ブエノスアイレス)、*3*（サンチアゴ)、*4*（ラパス）の略を用いている。

		到着都市			
		1	*2*	*3*	*4*
出発都市	*1*	∞	*1*	*6*	*12*
	2	*1*	∞	*6*	*12*
	3	*7*	*5*	∞	*9*
	4	*11*	*11*	*10*	∞

a. この問題を一般的な最適化問題として（つまり、具体的な数字はいれずに記号を用いて）定式化せよ。

b. 分枝限定法を用いたいが、元問題（親問題）の緩和問題の最適解および最適値を求めよ。

c. 上記の答えを用いて、子問題は幾つ生成されるか。またそれらの緩和問題はどのような特徴（制約式）を持っているか。