7　動的計画法

この章では動的計画法 (DP) のアイデアを説明します。DP はベルマン（R.E.Bellman) によって案出され、工学、経済学、その他の多くの分野において使用されてきました。線形計画法は線形関数の場合だけを取り扱うのに対して、動的計画法は非線形の関数、解析的な形になっていない関数も取り扱えます。しかし、一般的な数理計画問題に常に適用できるわけではなく、問題が多段決定問題、つまり、各段における決定の系列を求めるような問題に変換できれば、動的計画法によって解くことが可能です。動的計画法の特徴は、再帰方程式 (漸化式) を巧妙につくるところにあります。

DP の考え方を理解するため、まず、次の例を見ましょう。

例 7.1. 総額 3 単位の資金を四つのプロジェクトにどのように配分したら、最大の収益が得られるのかという問題を考えます。第 i プロジェクトに x_i 単位を投資した場合の収益 $g_i(x_i)$ は次のように与えられており、

	0	*1*	*2*	*3*
$g_1(x_1)$	*0*	*5.0*	*7.0*	*8.0*
$g_2(x_2)$	*0*	*4.0*	*6.0*	*6.5*
$g_3(x_3)$	*0*	*6.0*	*7.5*	*8.0*
$g_4(x_4)$	*0*	*7.0*	*8.0*	*8.4*

この問題は次のように定式化されます。

$$\begin{aligned} \max. \quad & f(x_1,x_2,x_3,x_4) = g_1(x_1)+g_2(x_2)+g_3(x_3)+g_4(x_4) \\ s.t. \quad & x_1+x_2+x_3+x_4 \le 3 \\ & x_i \ge 0,\ i=1,...,4. \end{aligned} \tag{7}$$

最大の収益が得るために、総額 3 単位の資金を四つのプロジェクトにどのように配分したらよいでしょうか。

DP の基本的考え方を説明するため、資金 c 単位、プロジェクト の個数 N であるような一般化した問題について議論します。このとき、上の問題は次の関数値 $f_N(c_N)$, (ここでは $c_N = c$) を求めることと同じです。

$$f_N(c_N) = \max_{x_1+x_2+\cdots+x_N \le c_N} \{g_1(x_1)+g_2(x_2)+\cdots+g_N(x_N)\}.$$

資金の配分方法の一つはベクトル $x = (x_1,x_2,x_3,x_4)$ に対応し、これを政策と呼ぶことにします。また、関数値を最適にする政策を最適政策と言います。$N \ge 2$ のとき、

$$\begin{aligned} f_N(c_N) = \quad & \max_{0\le x_N\le c_N} \{ \max_{x_1+x_2+\cdots+x_{N-1}\le c_N-x_N} \{g_1(x_1)+g_2(x_2)+\cdots+g_{N-1}(x_{N-1})+g_N(x_N)\}\} \\ & \max_{0\le x_N\le c_N} \{g_N(x_N) + \max_{x_1+x_2+\cdots+x_{N-1}\le c_N-x_N} \{g_1(x_1)+g_2(x_2)+\cdots+g_{N-1}(x_{N-1})\}\} \end{aligned} \tag{8}$$

となり、$f_N(c)$ の定義式を用いると、

$$f_{N-1}(c_N - x_N) = \max_{x_1+x_2+\cdots+x_{N-1}\le c_N - x_N} \{g_1(x_1) + g_2(x_2) + \cdots + g_{N-1}(x_{N-1})\}$$

と表わされるので、上の式 (8) は

$$f_N(c_N) = \max_{0\le x_N\le c_N} \{g_N(x_N) + f_{N-1}(c - x_N)\} \tag{9}$$

と書きかえ可能です。特に、$N = 1$ に対しては

$$f_1(c_1) = \max_{0\le x_1\le c_1} g_1(x_1) = g_1(c_1)$$

となり、上の問題 (7) を解くことは $f_N(c)$ についての方程式

$$\begin{aligned} & f_1(c_1) = g_1(c_1) \\ & f_N(c_N) = \max_{0\le x_N\le c_N} \{g_N(x_N) + f_{N-1}(c_N - x_N)\} \quad (N \ge 2) \end{aligned} \tag{10}$$

を解くことと同じです。上の式 (10) は $f_N(c)$ に対する再帰方程式 (漸化式) で、最適性の原理を表しています。

> 最適性の原理: 決定の全系列にわたって最適化を行うためには、初期の状態と最初の決定がどんなものであっても、残りの決定は最初の決定から生じた状態に関して最適な政策を構成していなければならない

別の表現をすれば、「最適経路中の部分経路もまた最適経路になっている」ということを意味しています。

$f_N(c)$ を解くには、$f_{N-1}(c_N - x_{N-1}) = f_{N-1}(c_{N-1})$, $c_{N-1} = 0, 1, \ldots, c$ が分からなければなりません。式 (9) で N を $N-1$ としますと、

$$f_{N-1}(c_{N-1}) = \max_{0\le x_{N-1}\le c_{N-1}} \{g_{N-1}(x_{N-1}) + f_{N-2}(c_{N-1} - x_{N-1})\}$$

となります。上の式で示すように、$f_{N-1}(c_{N-1})$ を計算するには、$f_{N-2}(c_{N-1} - x_{N-1}) = f_{N-2}(c_{N-2})$, $c_{N-2} = 0, 1, \ldots, c$ が分からなければなりません。以下同様に考えてみると、

$$\begin{aligned} f_2(c_2) &= \max_{0\le x_2\le c_2} \{g_2(x_2) + f_1(c_2 - x_2)\} \\ &= \max_{0\le x_2\le c_2} \{g_2(x_2) + f_1(c_1)\} \end{aligned} \tag{11}$$

となります。最終的に $f_1(c_1)$ が分かっていれば、上のプロセスを逆に辿っていけば、最適値 $f_N(c)$ を計算することができます。

次に再帰方程式にもとづいて最初の例 7.1 を解いてみます。

式 (11) にある $f_1(c_2 - x_2)$ において、$c_2 = 0, 1, 2, 3$ と $0 \le x_2 \le c_2$ より、$f_2(c_2)$ を計算するとき、$f_1(0)$、$f_1(1)$、$f_1(2)$、$f_1(3)$ を必要とします。これは手元に投資可能の金額それぞれ０単位、１単位、

２単位、３単位をプロジェクト１に投資するときの最大利益を計算することです。プロジェクト１に投資可能な金額を $c_1 = 0, 1, 2, 3$ とします。$N = 1$ のとき、これらを計算しておきます。

$$c_1 = 0 \quad : \quad f_1(0) = 0, \quad x_1^* = 0$$

$$c_1 = 1 \quad : \quad f_1(1) = 5, \quad x_1^* = 1$$

$$c_1 = 2 \quad : \quad f_1(2) = 7, \quad x_1^* = 2$$

$$c_1 = 3 \quad : \quad f_1(3) = 8, \quad x_1^* = 3$$

$N = 2$ のとき、$f_2(c_2)$ を計算します。手元にある c_2 単位の金額をプロジェクト１、２に投資する場合の最大利益を計算します。$c_2 = 0, 1, 2, 3$ より、f_2 のそれぞれの値が以下になります。ここで、上で計算された f_1 が使われています。

$$c_2 = 0 \quad : \quad f_2(0) = g_2(0) + f_1(0) = 0$$

$$x_2^* = 0, c_1 = 0$$

$$c_2 = 1 \quad : \quad f_2(1) = \max \begin{cases} g_2(1) + f_1(0) = 4 \\ g_2(0) + f_1(1) = 5^* \end{cases} = 5$$

$$x_2^* = 0, c_1 = 1.$$

$$c_2 = 2 \quad : \quad f_2(2) = \max \begin{cases} g_2(0) + f_1(2) = 7 \\ g_2(1) + f_1(1) = 9^* \\ g_2(2) + f_1(0) = 6 \end{cases} = 9$$

$$x_2^* = 1, c_1 = 1$$

$$c_2 = 3 \quad : \quad f_2(3) = \max \begin{cases} g_2(0) + f_1(3) = 8 \\ g_2(1) + f_1(2) = 11^* \\ g_2(2) + f_1(1) = 11^* \\ g_2(3) + f_1(0) = 6.5 \end{cases} = 11$$

$$x_2^* = 1, c_1 = 2.$$

$$x_2^* = 2, c_1 = 1.$$

同様の考え方で、$N = 3$ のとき

$$c_3 = 0 \quad : \quad f_3(0) = g_3(0) + f_2(0) = 0$$

$$x_3^* = 0, c_2 = 0$$

$$c_3 = 1 \quad : \quad f_3(1) = \max \begin{cases} g_3(0) + f_2(1) = 5 \\ g_3(1) + f_2(0) = 6^* \end{cases} = 6$$

$$x_3^* = 1, c_2 = 0.$$

$$c_3 = 2 \quad : \quad f_3(2) = \max \begin{cases} g_3(0) + f_2(2) = 9 \\ g_3(1) + f_2(1) = 11^* \\ g_3(2) + f_2(0) = 7.5 \end{cases} = 11$$

$$x_3^* = 1, c_2 = 1.$$

$$c_3 = 3 \quad : \quad f_3(3) = \max \begin{cases} g_3(0) + f_2(3) = 11 \\ g_3(1) + f_2(2) = 15^* \\ g_3(2) + f_2(1) = 12.5 \\ g_3(3) + f_2(0) = 8 \end{cases} = 15$$

$$x_3^* = 1, c_2 = 2.$$

$N = 4$ のとき

$$c_3 = 0 \quad : \quad f_4(0) = g_4(0) + f_3(0) = 0$$

$$x_4^* = 0, c_3 = 0.$$

$$c_4 = 1 \quad : \quad f_4(1) = \max \begin{cases} g_4(0) + f_3(1) = 6 \\ g_4(1) + f_3(0) = 7^* \end{cases} = 7$$

$$x_4^* = 1, c_3 = 0.$$

$$c_4 = 2 \quad : \quad f_4(2) = \max \begin{cases} g_4(0) + f_3(2) = 11 \\ g_4(1) + f_3(1) = 13^* \\ g_4(2) + f_3(0) = 8 \end{cases} = 13$$

$$x_4^* = 1, c_3 = 1.$$

$$c_4 = 3 \quad : \quad f_4(3) = \max \begin{cases} g_4(0) + f_3(3) = 15 \\ g_4(1) + f_3(2) = 18^* \\ g_4(2) + f_3(1) = 14 \\ g_4(3) + f_3(0) = 8.4 \end{cases} = 18$$

$$x_4^* = 1, c_3 = 2.$$

$f_4(3)$ より、最大収益は 18 になります。最適解は各プロジェクトへの投資の内訳ですので、上の計算を逆に辿って求めることができます。

$x_4^* = 1$、そのとき、残りの資金は２単位です。

$x_3^* = 1$、 そのとき、残りの資金は１単位です。

$x_2^* = 0$、 そのとき、残りの資金は１単位です。

$x_1^* = 1$。

以上をまとめますと資金の最適配分は次のようになります。

プロジェクト **1** に **1** 単位を投資、	得られる利益は **5** 単位
プロジェクト **2** に **0** 単位を投資、	得られる利益は **0** 単位
プロジェクト **3** に **1** 単位を投資、	得られる利益は **6** 単位
プロジェクト **4** に **1** 単位を投資、	得られる利益は **7** 単位

例 **7.2.** $c,\ a_1, ..., a_n$ は正の定数とする。条件

$$x_1, ..., x_n \geq 0,\ \sum_{i=1}^{n} x_i = c$$

のもとで関数 $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2$ の最小値を求めよ。

$f_N(y)$ を N 個の変数に限定したときの問題の関数値：

$$\begin{aligned} f_N(y) = \quad & \textbf{mininize} \quad \sum_{i=1}^{N} a_i x_i^2 \\ & \textbf{subject to} \quad \sum_{i=1}^{N} x_i = y,\ \ x_1, ..., x_N \geq 0 \end{aligned}$$

とする (ただし、$y \geq 0$) と、例 **7.2** で求める最小値は $f_n(c)$ となります。最適性の原理を用いると、次の方程式が得られます。

$$\begin{aligned} & f_1(y) = a_1 y^2 \\ & f_N(y) = \min_{0 \leq x_N \leq y} \{a_N x_N^2 + f_{N-1}(y - x_N)\} \qquad (N \geq 2). \end{aligned}$$

$N = 2$ のとき、

$$f_2(y) = \min_{0 \leq x_2 \leq y} \{a_2 x_2^2 + f_1(y - x_2)\} = \min_{0 \leq x_2 \leq y} \{a_2 x_2^2 + a_1 (y - x_2)^2\}.$$

ここで、

$$g(x_2) = a_2 x_2^2 + a_1 (y - x_2)^2$$

とおけば、

$$g'(x_2) = 2a_2 x_2 - 2a_1 (y - x_2).$$

よって、$g'(x_2) = 0$ から、

$$x_2 = x_2(y) = \frac{a_1 y}{a_1 + a_2} = \frac{1}{a_2} \frac{y}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}}$$

が得られます。従って、$g(x_2)$ の最小値 $f_2(y)$ は

$$f_2(y) = a_2 (\frac{a_1 y}{a_1 + a_2})^2 + a_1 (y - \frac{a_1 y}{a_1 + a_2})^2 = \frac{y^2}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}}$$

となります。しかも、この値は

$$x_1 = x_1(y) = y - x_2(y) = y - \frac{a_1 y}{a_1 + a_2} = \frac{a_2 y}{a_1 + a_2} = \frac{y}{a_1(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2})}$$
$$x_2 = x_2(y) = \frac{y}{a_2(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2})}$$

のときに達成されます。次に最適解の一般形式を帰納法で証明します。$N = n-1$ に対して

$$x_i(y) = \frac{y}{a_i(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_{n-1}})}, \qquad i = 1, 2, \cdots, n-1,$$

のとき、

$$f_{n-1}(y) = \frac{y^2}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_{n-1}}}$$

が成りたつと仮定すると、$N = n$ の場合には

$$f_n(y) = \min_{0 \le x_n \le y} \{a_n x_n^2 + \frac{(y - x_n)^2}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_{n-1}}}\}$$

となります。右辺の括弧内を $g(x_n)$ とおくと、

$$g'(x_n) = 2a_n x_n - \frac{2(y - x_n)}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_{n-1}}}.$$

$g'(x_n) = 0$ から、

$$x_n(y) = \frac{y}{a_n(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n})}$$

が得られます。したがって、$g(x_n)$ の最小値 $f_n(y)$ の値は

$$\begin{aligned} f_n(y) &= a_n\Big(\frac{y}{a_n(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n})}\Big)^2 \\ &+ \frac{1}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{n-1}}}\Big(y - \frac{y}{a_n(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n})}\Big)^2 \\ &= \frac{y^2}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}} \end{aligned}$$

となります。しかも、$x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ の値に関しては

$$\begin{aligned} x_i = x_i(y - x_n(y)) &= \frac{1}{a_i(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_{n-1}})}\Big(y - \frac{y}{a_n(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n})}\Big) \\ &= \frac{y}{a_i(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n})}, \qquad i = 1, \ldots, n-1 \end{aligned}$$

となっています。したがって、例 **7.2** の最適値は $f_n(c) = \dfrac{c^2}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}$、最適解は $x_i = x_i(c) = \dfrac{c}{a_i(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n})}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ となります。

例 **7.3.** *0-1 ナップザック問題:* 品物 $G_1, G_2 \ldots, G_n$ をナップザックに詰めてハイキングに出かけたい。すべての品物を詰めようとすると、品物の体積 a_i $(i = 1, \ldots, n)$ の総和がナップザックの容量 b を越えてしまいます。それぞれの品物に対して価値 c_i $(i = 1, \ldots, n)$ が与えられており、どの品物をナップザックに詰めていけば一番価値が高くなるかを考えたい。
『容量 y の中に詰める品物の候補を $G_1, \ldots, G_k$ に限定したときに得られる最大の価値』を $f_k(y)$ として、$f_k(y)$ に関する再帰方程式 (漸化式) を示しなさい。また、$n = 4$、$b = 10$ とし、c_j と a_j を以下のように設定して、$f_4(10)$ を求めなさい。

j	1	2	3	4
c_j	1	3	5	9
a_j	2	3	4	7

品物が $G_1, G_2 \ldots, G_n$ の n 個の場合、それぞれに変数 $x_1, \ldots, x_n$ を設定し、

$$x_j = \begin{cases} 1, & \text{品物 } G_j \text{をナップザックに詰めるとき} \\ 0, & \text{品物 } G_j \text{をナップザックに詰めないとき} \end{cases}$$

と定めます。これにより、この問題は以下のように定式化できます。

$$(P) \left| \begin{array}{ll} \textbf{maximize} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \textbf{subject to} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leq b \\ & x_j \in \{0, 1\}, \quad j = 1, \ldots, n \end{array} \right. \tag{12}$$

ただし、係数 a_j, c_j $(j = 1, \ldots, n)$, b はすべて正の定数で

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n > b$$

であるものとします。

ここで、$f_k(y)$ は、

$$\begin{aligned} f_k(y) = \max\{c_1x_1 + \ldots + c_kx_k : \ & a_1x_1 + \ldots + a_kx_k \leq y, \\ & x_j \in \{0, 1\}, \ (j = 1, \ldots, k)\} \end{aligned}$$

になります。この関数は各 $k = 1, \ldots, n$ と $y = 0, 1, \ldots, b$ について定義されます。特に、$f_n(b)$ はもと

のナップザック問題の最大値に一致します。$f_k(y)$ ($k=1,\dots,n$ と $y=0,1,\dots,b$) の間には、

$$f_1(y)=\begin{cases}0 & y<a_1\text{のとき}\\ c_1 & a_1\le y\text{のとき}\end{cases}$$

$$f_k(y)=\max\{f_{k-1}(y),f_{k-1}(y-a_k)+c_k\}\quad(k=2,3,\dots,n)$$

が成立します。ただし、$y-a_k<0$ の時には、$f_{k-1}(y-a_k)=-\infty$ と仮定しています。$f_k(y)$ は、品物 G_k を持って行かないときの最大値 $f_{k-1}(y)$ と G_k を持って行くときの最大値 $f_{k-1}(y-a_k)+c_k$ の大きい方になっています。$f_4(10)$ の計算については、例 **7.1** と同様にやってみてください。

7.1 演習問題

演習問題 7.1. 3つの変数 x_1,x_2,x_3 はいずれも非負の整数とする。このとき、$2x_1+x_2+x_3\le 7$ の条件のもとで、関数

$$2x_1^2+2x_2^2+x_3^2$$

を最大になるように、x_1,x_2 及び x_3 の値を定めよ。

演習問題 7.2. いま、5人の科学者を A、B 及び C のプロジェクトに割り付けようとしているが、科学者を各プロジェクトへそれぞれ x_A、x_B 及び x_C 人割り付けたとすると、その効果は、

$$f_A(x_A)f_B(x_B)f_C(x_C)$$

となるという。ここで、$f(x)$ なる関数は次の表によって、その値があたえられているという。効果を最大にさせるような科学者を各プロジェクトに配分する案を作りなさい。

科学者の数	効果関数		
	$f_A(x_A)$	$f_B(x_B)$	$f_C(x_C)$
0	1	1	1
1	2	3	2
2	5	6	3
3	8	9	5
4	15	12	7
5	30	20	10

演習問題 7.3. 制約条件 $x_1+x_2+\cdots+x_N=c, x_i\ge 0$ の下に

$$x_1x_2\cdots x_N$$

を最大にする $x_1,x_2,\cdots x_N,x_i\ge 0$ を求めよ。

演習問題 7.4. ある造船会社では、向こう *3* 期にわたって造船計画を立てなければならない。各期における需要造船隻数と造船能力隻数は表 *23*、*24* の通りである。この場合、明らかに需要隻数は造船能力を越えているので、残業などによる割増し作業と作りだめによる在庫によって需要を満たす計画を考えている。割増し作業による支出増は表 *25* の通りである。また、在庫による 1 隻を次期まで持ち越すごとに *2* 億円の在庫費用がかかる。最適な造船計画を動的計画法で求めよ。

表 23: 需要隻数

	1 期	2 期	3 期
隻数	2	4	9

表 24: 造船能力隻数

	1 期	2 期	3 期
隻数	5	4	3

表 25: 割増し作業支出増

能力を越えた造船隻数	1	2	3	4	5	6
支出増費用（億円）	3	9	15	22	30	35

演習問題 7.5. 世界で最大の銅生産国チリにある鉱業会社の生産性を考慮した 1 期の売上高を見積りたい。この会社には、掘削機 1 台と大型トラック複数台を 1 つの重機グループとして運営している。現在使用可能な重機グループは４つあり、それぞれを活用するには最低でも１０人、６人、４人、２人の労働者が必要である。銅鉱石の市場価格と 1 期中の採掘量を反映した上記の重機グループ当りの売上高はそれぞれ５、２、１、２単位である。

a. 現在日雇い労働者が１７人いるとすれば、１期の最大の売上高はどのような最適化問題を解けば求まるか。

b. 動的計画法を用いて上記で定式化した問題を解け。

c. 日雇い労働者の人数が９人の時に、売上高は何単位になるか。