第5章　三相交流

発電所から変電所までの送電線による電力輸送や工場用の電動機などの大電力機器には三相交流が使われている。この章では，三相交流の基礎と簡単な故障計算について学ぶ。

5.1　三相回転磁界

次式のように位相が $2\pi/3$ ずつ異なった電流

$$I_a = I_m \sin \omega t \tag{5.1a}$$

$$I_b = I_m \sin \left(\omega t - \frac{2}{3}\pi \right) \tag{5.1b}$$

$$I_c = I_m \sin \left(\omega t - \frac{4}{3}\pi \right) \tag{5.1c}$$

を図 5.1 のように配置されたコイルに流すと

$$H_a = H_m \sin \omega t \tag{5.2a}$$

$$H_b = H_m \sin \left(\omega t - \frac{2}{3}\pi \right) \tag{5.2b}$$

$$H_c = H_m \sin \left(\omega t - \frac{4}{3}\pi \right) \tag{5.2c}$$

の磁界が得られる。

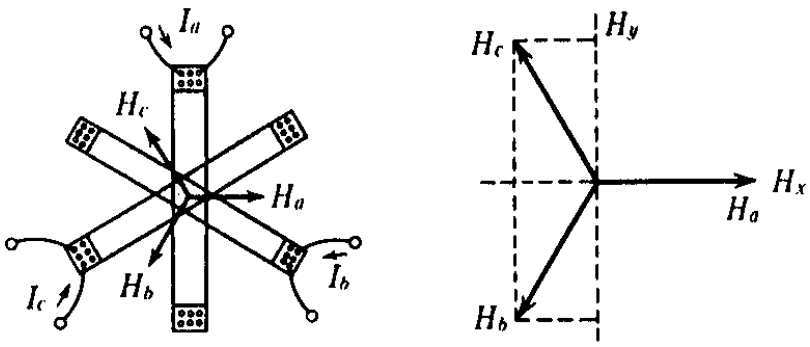

図 5.1: 三相回転磁界

これらの磁界の x 成分と y 成分を求めると

$$H_{ax} = H_m \sin \omega t \tag{5.3a}$$
$$H_{ay} = 0 \tag{5.3b}$$
$$H_{bx} = -\frac{1}{2} H_m \sin\left(\omega t - \frac{2}{3}\pi\right) \tag{5.3c}$$
$$H_{by} = -\frac{\sqrt{3}}{2} H_m \sin\left(\omega t - \frac{2}{3}\pi\right) \tag{5.3d}$$
$$H_{cx} = -\frac{1}{2} H_m \sin\left(\omega t - \frac{4}{3}\pi\right) \tag{5.3e}$$
$$H_{cy} = \frac{\sqrt{3}}{2} H_m \sin\left(\omega t - \frac{4}{3}\pi\right) \tag{5.3f}$$

である。したがって

$$H_x = H_{ax} + H_{bx} + H_{cx} = \frac{3}{2} H_m \sin \omega t \tag{5.4}$$
$$H_y = H_{by} + H_{cy} = \frac{3}{2} H_m \cos \omega t \tag{5.5}$$

これより

$$H = H_x + j\, H_y = \frac{3}{2} H_m\, e^{-j\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)} \tag{5.6}$$

の回転磁界が得られることがわかる。

5.2　三相電源

図 5.2 に示すY形電源の複素表示による三相電圧は

$$V_a = V_e\, e^{j\omega t} \tag{7a}$$
$$V_b = V_e\, e^{j\left(\omega t - \frac{2}{3}\pi\right)} \tag{7b}$$
$$V_c = V_e\, e^{j\left(\omega t - \frac{4}{3}\pi\right)} \tag{7c}$$

と表され，V_a，V_b，V_c を相電圧という。習慣的に，相回転は時計方向にとる。式 (7a)，(7b)，(7c) の三相電圧を**対称三相電圧**と呼ぶ。この場合，電圧の総和は

$$V_a + V_b + V_c = V_e\, e^{j\omega t}\left(1 + e^{-j\frac{2}{3}\pi} + e^{-j\frac{4}{3}\pi}\right) = 0 \tag{5.8}$$

である。

線間電圧 V_{ab} は $e^{j\omega t}$ を省略すると

$$\begin{aligned} V_{ab} &= V_a - V_b = V_e\left(1 - e^{-j\frac{2}{3}\pi}\right) = V_e\left(\frac{3}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= \sqrt{3} V_e \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2}\right) \\ &= \sqrt{3} V_e e^{j\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3} V_e \angle 30^\circ \end{aligned} \tag{5.9}$$

と表される。すなわち，線間電圧は相電圧の $\sqrt{3}$ 倍である。

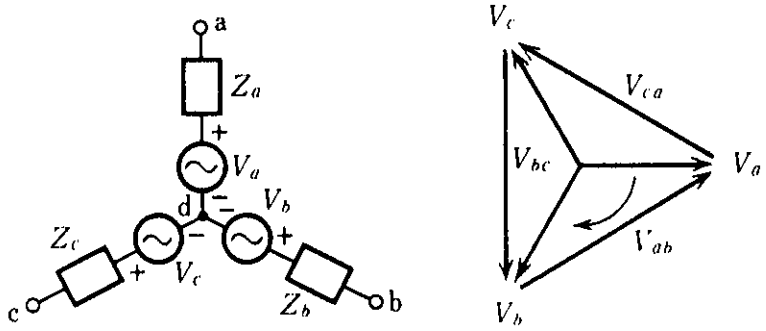

図 5.2: Y 形電源と電圧ベクトル

5.3　対称三相回路

図 5.3 のような Y 形対称三相回路では

$$
\begin{aligned}
I_n &= I_a + I_b + I_c \\
&= \frac{V_a}{Z_S + Z_\ell + Z_R} + \frac{V_b}{Z_S + Z_\ell + Z_R} + \frac{V_c}{Z_S + Z_\ell + Z_R} \\
&= \frac{V_a + V_b + V_c}{Z_S + Z_\ell + Z_R} = 0
\end{aligned}
\tag{5.10}
$$

上式で，最後の導出に式 (5.8) を代入した。すなわち，中性線電流は零なので中性線はなくてもよい。

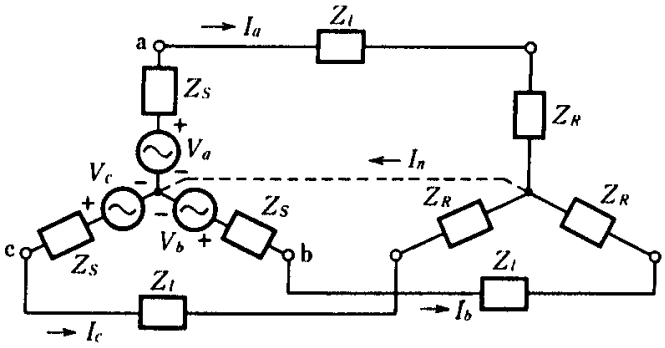

図 5.3: 対称 Y 形三相回路

単相交流で距離 ℓ を電力伝送するためには往復で 2ℓ 分の損失がある。一方，三相交流では単相交流の 3 倍の電力を伝送するのに 3ℓ 分の損失ですむ。

1 相分のインピーダンスを $|Z_t|e^{j\theta}$ とすると a 相の瞬時電力は

$$
p_a = \frac{V_e^2}{|Z_t|}\sin\omega t\sin(\omega t - \theta) = \frac{V_e^2}{2|Z_t|}\{\cos\theta - \cos(2\omega t - \theta)\} \tag{5.11}
$$

と表される。三相の瞬時電力を足し合わせると

$$
\begin{aligned}
p_t &= \frac{V_e^2}{2|Z_t|}\left\{3\cos\theta - \cos(2\omega t - \theta) - \cos\left(2\omega t - \theta - \frac{4}{3}\pi\right) - \cos\left(2\omega t - \theta + \frac{4}{3}\pi\right)\right\} \\
&= \frac{V_e^2}{2|Z_t|}3\cos\theta
\end{aligned}
\tag{5.12}
$$

となり，瞬時電力は時間変化せず，一定である。

5.4　非対称三相交流の対称座標分解

電力系統は，通常運転時は対称三相交流回路であるが，事故時には非対称三相交流回路となるので，非対称三相交流の解析が必要になる。このとき，対称座標法を用いると解析が容易になる。

任意の非対称三相交流は，三相が同時に同じ方向にはたらく零相分，時計方向に回転する正相分，反時計方向に回転する逆相分の対称成分に分解できる。

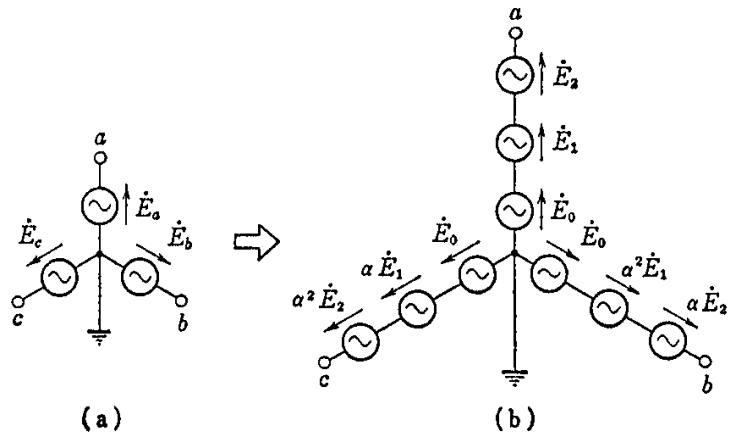

図 5.4: Y 形三相起電力の対称分分解

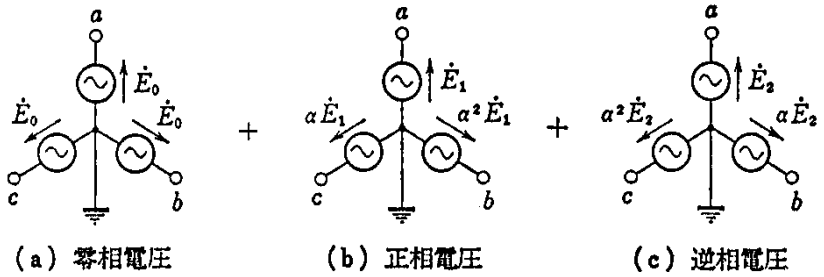

図 5.5: 対称分電圧

位相を 120° 進ませるオペレータ α

$$\alpha = e^{j\frac{2}{3}\pi} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \tag{5.13}$$

を用いると，対称三相交流電圧は V_a (図 5.4(a) では E_a) を基準にして

$$V_a = V_a,\ \ V_b = \alpha^2 V_a,\ \ V_c = \alpha V_a \tag{5.14}$$

と表される。

任意の非対称三相交流電圧は，対称分電圧 V_0，V_1，V_2 を用いて

$$\begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_0 \\ V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \tag{5.15}$$

と表すことができる。逆に，非対称三相交流電圧の対称分の分解には次式を使う。

$$\begin{bmatrix} V_0 \\ V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \end{bmatrix} \tag{5.16}$$

5.5 三相交流発電機の基本式

図 5.6 に示す三相交流発電機は構造が対称で，無負荷時には各相の出力端子には $\dot{E}_a$，$\dot{E}_b$，$\dot{E}_c$ の対称三相交流電圧が現れているとする。発電機が負荷に $\dot{I}_a$，$\dot{I}_b$，$\dot{I}_c$ の電流を供給するときの端子電圧 $\dot{V}_a$，$\dot{V}_b$，$\dot{V}_c$ は

$$\dot{V}_a = \dot{E}_a - \dot{v}_a \tag{5.17a}$$

$$\dot{V}_b = \dot{E}_b - \dot{v}_b \tag{5.17b}$$

$$\dot{V}_c = \dot{E}_c - \dot{v}_c \tag{5.17c}$$

で与えられる。ただし，$\dot{v}_a$，$\dot{v}_b$，$\dot{v}_c$ は発電機の各相のインピーダンスによる電圧降下である。

上式の対称分は

$$\dot{V}_0 = -\dot{v}_0 \tag{5.18a}$$

$$\dot{V}_1 = \dot{E}_1 - \dot{v}_1 \tag{5.18b}$$

$$\dot{V}_2 = -\dot{v}_2 \tag{5.18c}$$

となる。ただし $\dot{E}_1 = \dot{E}_a$ である。

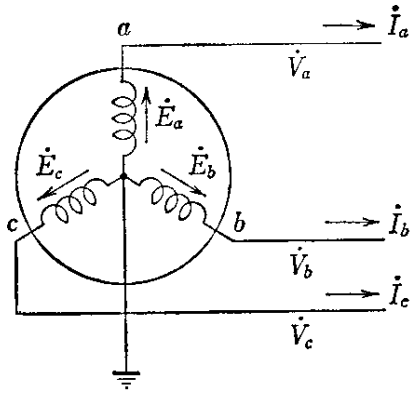

図 5.6: 三相交流発電機

ここで $\dot{v}_0$，$\dot{v}_1$，$\dot{v}_2$ について，さらに考察する。発電機の a，b，c 各相にそれぞれ $\dot{I}_1$，$\alpha^2\dot{I}_1$，$\alpha\dot{I}_1$ の正相対称三相電流を流すと各相の電圧降下は電流に比例する。その比例定数を $\dot{Z}_1$ とすれば，各相の電圧降下はそれぞれ $\dot{Z}_1\dot{I}_1$，$\alpha^2\dot{Z}_1\dot{I}_1$，$\alpha\dot{Z}_1\dot{I}_1$ である。したがって，$\dot{v}_1 = \dot{Z}_1\dot{I}_1$ と表される。

同様に，逆相分および零相分の電圧降下に対する比例定数をそれぞれ $\dot{Z}_2$，$\dot{Z}_0$ とすると各対称分の電圧降下はそれぞれ $\dot{Z}_2\dot{I}_2$，$\dot{Z}_0\dot{I}_0$ と表される。すなわち

$$\dot{v}_0 = \dot{Z}_0\dot{I}_0,\quad \dot{v}_1 = \dot{Z}_1\dot{I}_1,\quad \dot{v}_2 = \dot{Z}_2\dot{I}_2 \tag{5.19}$$

これを式 (5.18a)，(5.18b)，(5.18c) に代入すると

$$\dot{V}_0 = -\dot{Z}_0\dot{I}_0 \tag{5.20a}$$
$$\dot{V}_1 = \dot{E}_a - \dot{Z}_1\dot{I}_1 \tag{5.20b}$$
$$\dot{V}_2 = -\dot{Z}_2\dot{I}_2 \tag{5.20c}$$

となる。これを**三相交流発電機の基本式**と呼ぶ。また，$\dot{Z}_0$，$\dot{Z}_1$，$\dot{Z}_2$ をそれぞれ発電機の零相インピーダンス，正相インピーダンス，逆相インピーダンスと呼び，これらを一括して発電機の**対称分インピーダンス**と称する。

5.6　三相交流発電機の故障計算

前節で求めた式を用いて，三相交流発電機の故障計算を行うことができる。送電線を含む三相交流回路は，故障点から見たとき，鳳－テブナンの定理により，内部インピーダンスを持つ等価な三相交流発電機と見なすことができる。したがって，ここでの故障計算は三相交流系統の故障計算でもある。

5.6.1　1 線地絡

図 5.7 のように，三相発電機の a 端子で地絡が生じたとする。このときの地絡電流 $\dot{I}_a$ および b，c 端子の電圧 $\dot{V}_b$，$\dot{V}_c$ を求めてみる。ただし，発電機の対称分インピーダンスを $\dot{Z}_0$，$\dot{Z}_1$，$\dot{Z}_2$，a 相の起電力を $\dot{E}_a$ とする。

故障時の端子条件は

$$\dot{I}_b = \dot{I}_c = 0 \tag{5.21}$$

$$\dot{V}_a = 0 \tag{5.22}$$

である。

対称分電流は式 (5.16) と同型の式から求めることができるので，式 (5.21) を代入すると

$$\dot{I}_0 = \dot{I}_1 = \dot{I}_2 = \frac{\dot{I}_a}{3} \tag{5.23}$$

が得られる。

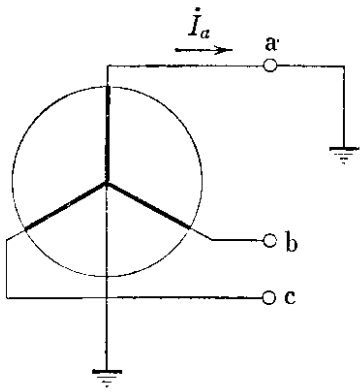

図 5.7: 三相交流発電機の 1 端子地絡

また，式 (5.15) を参照すると，式 (5.22) の条件より

$$\dot{V}_0 + \dot{V}_1 + \dot{V}_2 = 0 \tag{5.24}$$

と書ける。これに発電機の基本式を代入すると

$$-\dot{Z}_0\dot{I}_0 + \dot{E}_a - \dot{Z}_1\dot{I}_1 - \dot{Z}_2\dot{I}_2 = 0 \tag{5.25}$$

となる。これに式 (5.23) を用いると次式が得られる。

$$\dot{I}_a = \frac{3\dot{E}_a}{\dot{Z}_0 + \dot{Z}_1 + \dot{Z}_2} \tag{5.26}$$

この結果は図式的にも求めることができる。すなわち，発電機の基本式の各対称分を等価回路で表し，端子条件を満足するように接続すると図 5.8 のようになる。この図からも直ちに式 (5.26) の結果が得られる。

なお，式 (5.26) からわかるように，a 端子から見た発電機の内部インピーダンスは

$$\frac{\dot{E}_a}{\dot{I}_a} = \frac{\dot{Z}_0 + \dot{Z}_1 + \dot{Z}_2}{3} \tag{5.27}$$

である。

対称分電流の値を発電機の基本式に代入すると $\dot{V}_0$，$\dot{V}_1$，$\dot{V}_2$ が求められ，これより次式の各端子電圧が導かれる。

$$\dot{V}_b = \dot{V}_0 + \alpha^2\dot{V}_1 + \alpha\dot{V}_2 = \frac{(\alpha^2-1)\dot{Z}_0 + (\alpha^2-\alpha)\dot{Z}_2}{\dot{Z}_0 + \dot{Z}_1 + \dot{Z}_2}\dot{E}_a \tag{5.28}$$

$$\dot{V}_c = \dot{V}_0 + \alpha\dot{V}_1 + \alpha^2\dot{V}_2 = \frac{(\alpha-1)\dot{Z}_0 + (\alpha-\alpha^2)\dot{Z}_2}{\dot{Z}_0 + \dot{Z}_1 + \dot{Z}_2}\dot{E}_a \tag{5.29}$$

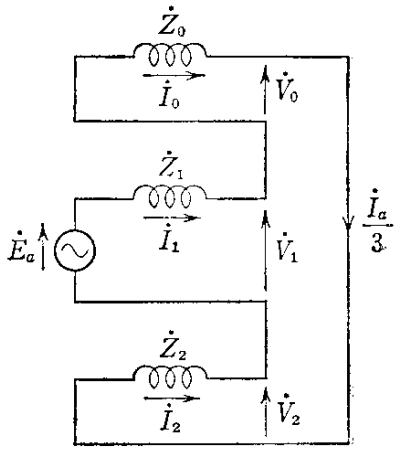

図 5.8: 1 線地絡時の対称分等価回路

5.6.2　2 線地絡

b，c 端子で地絡が生じたとすると，端子条件は

$$\dot{V}_b = \dot{V}_c = 0, \quad \dot{I}_a = 0 \tag{5.30}$$

となり，これを対称分の関係に書き直すと

$$\dot{V}_0 = \dot{V}_1 = \dot{V}_2, \quad \dot{I}_0 + \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = 0 \tag{5.31}$$

となる。

この式と発電機の基本式とを連立して解くと次式が得られる。

$$\dot{I}_0 = -\dot{Z}_2\dot{E}_a/\Sigma \tag{5.32a}$$

$$\dot{I}_1 = (\dot{Z}_0 + \dot{Z}_2)\dot{E}_a/\Sigma \tag{5.32b}$$

$$\dot{I}_2 = -\dot{Z}_0\dot{E}_a/\Sigma \tag{5.32c}$$

ただし，ここで $\Sigma = \dot{Z}_0\dot{Z}_1 + \dot{Z}_1\dot{Z}_2 + \dot{Z}_2\dot{Z}_0$ である。

この結果は図式的にも求めることができる。すなわち，発電機の基本式の関係を表す等価回路を，式 (5.31) を満足するように接続すると図 5.9 が得られる。これより直ちに，各対称分電流が求められる。

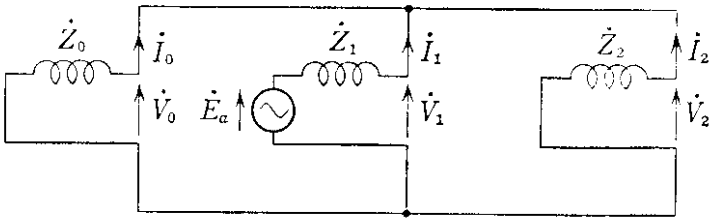

図 5.9: 2 線地絡時の対称分等価回路

索 引

アドミタンス 7, 9

位相 1
位相速度 39
位相面 39
インダクター 3, 4, 8
インダクタンス 5, 20, 37, 39
インピーダンス 7, 9, 16, 22

右進波 39

オイラーの公式 2
オームの法則 3

回転磁界 60
角周波数 1
過渡現象 38
完全反射 46

逆相分 62
キャパシタンス 4
境界条件 40, 45
共役整合 35
キルヒホッフの法則 11

結合係数 30

格子図 54
交流電力 19
交流特性 5
コンダクタンス 3, 9
コンデンサー 3, 7

左進波 39
サセプタンス 9
三相交流 59
三相交流発電機 63
三相電圧 60

磁気エネルギー 44
磁束 4, 5
実効値 1, 23
実数係数線形微分方程式 12
周期 1, 19, 38
終端 45
集中定数回路 38, 48
周波数 1, 38
受動素子 3
瞬時電力 19
初位相 1, 16
初期条件 40
進行波 40, 44
振幅 1

正弦波交流 1
整合 46
正相分 62
静電エネルギー 44
静電容量 4, 37, 39
接続点 51, 54
零相分 62
線間電圧 60
線路 45

相互インダクタンス 29
相電圧 60

対称座標法 62
対称三相電圧 60
ダランベールの解 39
端子条件 65, 66

中性線電流 61

調相 26

抵抗 3, 8, 19
定常解 13
電圧降下 9, 24, 64
電圧降下率 25
電圧波 37, 39
伝送損失 25
伝播速度 37

透過係数 54
等価抵抗 24
透過波 51
同軸線 42
特性インピーダンス 40, 51

2 導体系の基本式 40
入射波 45

発電機の基本式 64
波動方程式 39
反射係数 54
反射波 45, 51

皮相電力 23
比透磁率 41
微分 14
微分方程式 14
比誘電率 41, 44

複素共役 13
複素振幅 3
複素正弦波交流 3
複素電力 22, 23
複素表現 3, 9, 14
複素表示 7, 12
分布定数回路 37

閉回路 11
平均電力 19, 21
平行導線 41
平面導体 37, 42
変成器 3, 29

偏微分 39
偏微分方程式 39

鳳-テブナンの定理 48

マクロストリップライン 43

無効電力 23

漏れインダクタンス 31

有効電力 23

リアクタンス 9
理想変成器 33

励磁インダクタンス 31
レンツの法則 5