第2章　電力と調相

2.1　交流電力

電力は電圧と電流の積で表されるが，交流の場合には電圧も電流も時間と共に変化している。この様な場合の交流電力について議論する。

実数表現による交流電力の計算

＜抵抗の場合＞　図 2.1 のように抵抗 R が電源 $e(t) = E_m \cos \omega t$ に接続されている場合には，電流 $i(t)$ は

$$i(t) = \frac{e(t)}{R} = \frac{E_m}{R} \cos \omega t = I_m \cos \omega t \tag{2.1}$$

である。

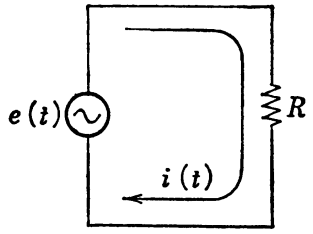


図 2.1:

電力 $p(t)$ は電圧と電流の積で表され

$$\begin{aligned} p(t) &= e(t) \cdot i(t) \\ &= E_m I_m \cos^2 \omega t = \frac{1}{2} E_m I_m (1 + \cos 2\omega t) && (2.2) \\ &= \frac{E_m^2}{2R} (1 + \cos 2\omega t) && (2.3) \end{aligned}$$

交流の場合には，電力 $p(t)$ も図 2.2 に示すように時間の周期関数となる。この $p(t)$ を**瞬時電力**という。

また，$e(t)$ (または $i(t)$) の周期 $T(= 1/f)$ について $p(t)$ を積分し，それを周期 T で割った

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt \tag{2.4}$$

を**平均電力**と定義している。

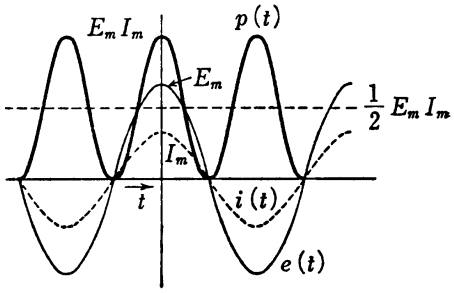


図 2.2:

この定義にしたがって，抵抗 R に供給される平均電力 P を計算すると，式 (2.3) を用いて

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T}\int_0^T p(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{E_m^2}{2R}(1+\cos 2\omega t)dt \\ &= \frac{E_m^2}{2R} = \frac{1}{2}E_m I_m \end{aligned} \tag{2.5}$$

したがって，電圧 $e(t)$ および電流 $i(t)$ の振幅である E_m と I_m の積の 1/2 が，抵抗で消費されている (電源から供給されている) 電力であることがわかる。

ここで

$$E_e = \frac{E_m}{\sqrt{2}} \qquad \text{すなわち} \quad E_m = \sqrt{2}E_e \tag{2.6}$$

$$I_e = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \qquad \text{すなわち} \quad I_m = \sqrt{2}I_e \tag{2.7}$$

とおくと

$$P = \frac{1}{2}E_m I_m = E_e I_e \tag{2.8}$$

となり，直流のときと同じ表現になることがわかる。この E_e，I_e を電圧，電流の**実効値**とよんでいる。

<インダクター L およびコンデンサー C の場合>　図 2.3(a) のように，インダクタンス L が電源 $e(t) = E_m \cos\omega t$ に接続されている場合には，電流 $i(t)$，瞬時電力 $p(t)$，平均電力 P はそれぞれ

$$i(t) = \frac{E_m}{\omega L}\sin\omega t \tag{2.9}$$

$$p(t) = e(t)\cdot i(t) = \frac{E_m^2}{\omega L}\cos\omega t \sin\omega t = \frac{E_m^2}{\omega L}\frac{1}{2}\sin 2\omega t \tag{2.10}$$

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)dt = 0 \tag{2.11}$$

また，図 2.3(b) のように，コンデンサー C が電源 $e(t) = E_m \cos\omega t$ に接続されている場合には，電流 $i(t)$，瞬時電力 $p(t)$，平均電力 P はそれぞれ

$$i(t) = -\omega C E_m \sin\omega t \tag{2.12}$$

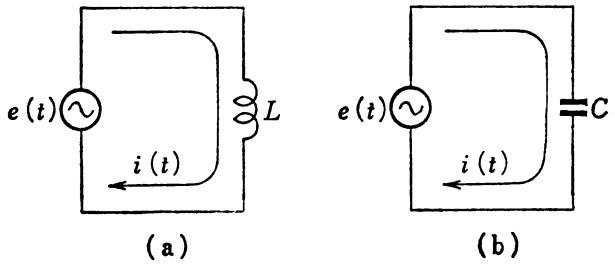


図 2.3:

$$p(t) = e(t) \cdot i(t) = -\omega C E_m^2 \cos\omega t \sin\omega t = -\omega C E_m^2 \frac{1}{2} \sin 2\omega t \tag{2.13}$$

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)dt = 0 \tag{2.14}$$

と表される。

以上より，インダクター L やコンデンサー C の場合には，平均電力 P が 0 である。すなわち，L や C は電力を消費しない。$p(t)$ を図示すると図 2.4 のようになり，正になったり，負になったりしていて，平均電力 P は 0 である。$p(t) > 0$ のときエネルギーを蓄え，$p(t) < 0$ のとき蓄えたエネルギーを電源に戻しているのである。

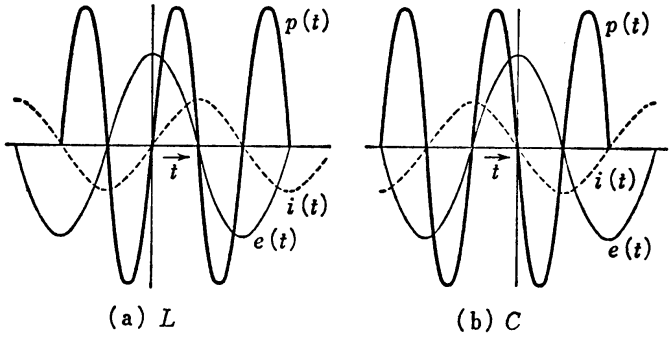


図 2.4:

<一般回路の場合> 図 2.5 に示すような一般の回路網で，その入力インピーダンスを Z とする。

$$Z = |Z|e^{j\theta}$$

電源電圧を

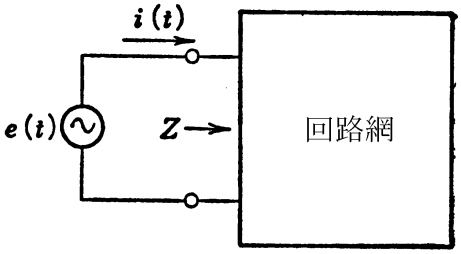
$$e(t) = E_m \cos(\omega t + \varphi)$$

とすると

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi - \theta) = \frac{E_m}{|Z|}\cos(\omega t + \varphi - \theta)$$

したがって

$$p(t) = E_m I_m \cos(\omega t + \varphi)\cos(\omega t + \varphi - \theta)$$



$Z = R_{in} + jX_{in}$

図 2.5:

$$
\begin{aligned}
P &= \frac{1}{T}\int_0^T p(t)dt = \frac{1}{T}E_m I_m \int_0^T \frac{1}{2}\{\cos\theta + \cos(2\omega t + 2\varphi - \theta)\}dt \\
&= \frac{E_m I_m}{2}\cos\theta = E_e I_e \cos\theta \qquad (2.15) \\
&= \frac{E_m^2}{2|Z|}\cos\theta = \frac{I_m^2}{2}|Z|\cos\theta \qquad (2.16)
\end{aligned}
$$

となる。

$\theta = ArgZ$ であるが，$\cos\theta$ のことを**力率**とよんでいる。抵抗 R，インダクター L，コンデンサー C の場合には，インピーダンスはそれぞれ $Z_R = R$，$Z_L = j\omega L$，$Z_C = 1/(j\omega C)$ である。したがって，それぞれの力率 $(\cos\theta = \cos ArgZ)$ は $\cos\theta_R = 1$，$\cos\theta_L = 0$，$\cos\theta_C = 0$ となる。

図 2.5 の回路の入力インピーダンス Z_{in} を実部 R_{in} と虚部 X_{in} に分けると

$$Z_{in} = R_{in} + jX_{in} \qquad (2.17)$$

一方

$$|Z| = \sqrt{R_{in}^2 + X_{in}^2},\ \tan\theta = \frac{X_{in}}{R_{in}}$$

であるから

$$|Z|\cos\theta = R_{in}$$

したがって，式 (2.16) は

$$P = \frac{I_m^2}{2}R_{in} = I_e^2 R_{in} \qquad (2.18)$$

とも書くことができる。これは，P は入力インピーダンスの実部 R_{in} と電流振幅 I_m または実効値 I_e がわかれば求められることを示している。

複素電力

ここまでは，$e(t)$，$i(t)$ から $p(t)$ を求め，それの一周期 T の平均として，平均電力 P を導出した。しかし，電圧，電流の複素表現を知っているのであるから，これを使って電力を求めることを考えよう。

一般的な回路の場合は

$$E(t) = E_m e^{j(\omega t + \varphi)}$$

$$\dot{E}_m = E_m e^{j\varphi} \tag{2.19}$$

$$I(t) = I_m e^{j(\omega t+\varphi-\theta)} = \dot{I}_m e^{j\omega t}$$

$$\dot{I}_m = I_m e^{j(\varphi-\theta)} = \frac{E_m}{|Z|} e^{j(\varphi-\theta)} \tag{2.20}$$

である。

この $E(t)$，$I(t)$ を用いて，式 (2.15) あるいは式 (2.16) の平均電力を得ることを考え，次の計算を行ってみることにする。

$$E(t)I(t) = \dot{E}_m \dot{I}_m e^{j2\omega t} \tag{2.21}$$

$$\begin{aligned} \overline{E(t)}I(t) &= E_m e^{-j\varphi} e^{-j\omega t} I_m e^{j(\varphi-\theta)} e^{j\omega t} \\ &= E_m I_m e^{-j\theta} \end{aligned} \tag{2.22}$$

$$\begin{aligned} E(t)\overline{I(t)} &= E_m e^{j\varphi} e^{j\omega t} I_m e^{-j(\varphi-\theta)} e^{-j\omega t} \\ &= E_m I_m e^{j\theta} \end{aligned} \tag{2.23}$$

式 (2.21) は t の関数となっているので不適当である。式 (2.22)，(2.23) の実部をとると，それぞれ

$$\Re\{\overline{E(t)}I(t)\} = E_m I_m \cos(-\theta) = E_m I_m \cos\theta$$

$$\Re\{E(t)\overline{I(t)}\} = E_m I_m \cos\theta$$

となり，両者とも $2P$ に一致する。したがって

$$P = \frac{1}{2}\Re\{\overline{E(t)}I(t)\} = \frac{1}{2}\Re\{E(t)\overline{I(t)}\} \tag{2.24}$$

$$= \frac{1}{2}\Re(\overline{\dot{E}_m}\dot{I}_m) = \frac{1}{2}\Re(\dot{E}_m\overline{\dot{I}_m}) \tag{2.25}$$

すなわち，平均電力 P は，$E(t)$ あるいは $I(t)$ のどちらかの共役と他方との積の 1/2(後に $\dot{S}$ と置く) の実部から求められる。

電圧，電流の実効値 E_e および I_e を用いると式 (2.25) は

$$P = \Re(\overline{\dot{E}_e}\dot{I}_e) = \Re(\dot{E}_e\overline{\dot{I}_e})) \tag{2.26}$$

と表すことができる。

ここで $\overline{\dot{E}_e}\dot{I}_e$ あるいは $\dot{E}_e\overline{\dot{I}_e}$ を

$$\dot{S} = P + jQ \tag{2.27}$$

とおくとき，P は平均電力と一致し，**有効電力**とよばれ，Q は**無効電力**とよばれている。また，$\dot{S}$ は**複素電力**とよばれ，その大きさ $|\dot{S}|$ は**皮相電力**とよばれている。

$\dot{S}$ として，$\overline{\dot{E}_e}\dot{I}_e$ をとるか $\dot{E}_e\overline{\dot{I}_e}$ をとるかによって，Q の符号がかわってくる。例えば，後者をとって

$$\dot{S} = \frac{1}{2}E(t)\overline{I(t)} = \dot{E}_e\overline{\dot{I}_e}$$

に $E(t) = ZI(t) = (R_{in} + jX_{in})I(t)$ （または $\dot{E}_e = Z\dot{I}_e$）を代入すると

$$\dot{S} = P + jQ = Z\dot{I}_e\overline{\dot{I}_e} = (R_{in} + jX_{in})|\dot{I}_e|^2$$

が得られるので，これより

$$P = R_{in}|\dot{I}_e|^2 \tag{2.28}$$

$$Q = X_{in}|\dot{I}_e|^2 \tag{2.29}$$

となる。式 (2.29) では，正のリアクタンス (インダクタンスが支配的) に対して無効電力 Q も正になる。電力回路では，インダクタンスが支配的な回路が多いため，正のリアクタンスに対して正の無効電力を与える $\dot{E}_e\overline{\dot{I}_e}$ が良く用いられる。

2.2　単純系統における電力伝送特性

単純系統における電力伝送特性について考える。

2.2.1　インピーダンス回路の特性

図 2.6 に示すインピーダンス回路において，受電端 1 相分の皮相電力は $E_rI = \sqrt{P_r^2 + Q_r^2}$ であるから，$I^2 = (P_r^2 + Q_r^2)/E_r^2$ が得られる。

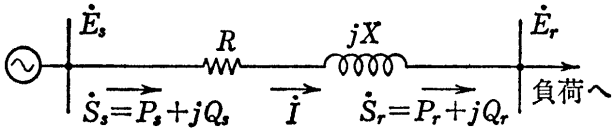


図 2.6: インピーダンス回路

また，送受電端の相電圧をそれぞれ $\dot{E}_s$，$\dot{E}_r$ とし，線路電流を $\dot{I}$ とすれば

$$\dot{E}_s = \dot{E}_r + (R + jX)\dot{I} \tag{2.30}$$

が成立し，この関係を図示すると図 2.7 のようになる。ただし，φ は受電端の力率角，θ は $\dot{E}_s$ と $\dot{E}_r$ との相差角である。この図から

$$e_{\parallel} = E_s\cos\theta - E_r = \overline{1\cdot 3} + \overline{2\cdot 4} = RI\cos\varphi + XI\sin\varphi \tag{2.31}$$

$$e_{\perp} = E_s\sin\theta = \overline{4\cdot 5} - \overline{2\cdot 3} = XI\cos\varphi - RI\sin\varphi \tag{2.32}$$

が得られる。式 (2.31) は

$$E_s\cos\theta = E_r + e_{\parallel} = E_r + (R\cos\varphi + X\sin\varphi)I \tag{2.33}$$

と書けるが，θ が小さい場合には

$$E_s \simeq E_r + (R\cos\varphi + X\sin\varphi)I \tag{2.34}$$

となる。右辺第 2 項は**電圧降下**を表し，括弧内は**等価抵抗**とよばれる。

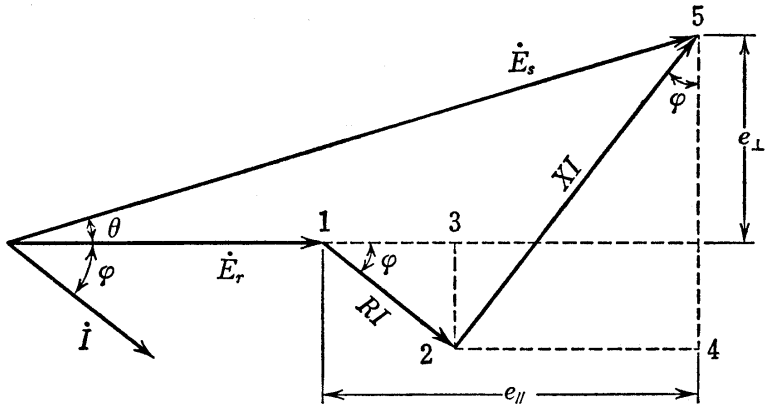


図 2.7:

2.2.2 電圧降下率および伝送損失

電圧降下率 ε および線路の**伝送損失** P_L は，それぞれ次にように定義される。

$$\varepsilon\,[\%] = \frac{E_s - E_r}{E_r} \times 100 = \frac{(R\cos\varphi + X\sin\varphi)I}{E_r} \times 100 \tag{2.35}$$

$$P_L = RI^2 \tag{2.36}$$

伝送電力が同じとき，伝送電圧を n 倍に昇圧すると，線路電流は $1/n$ 培に減少する。したがって，伝送損失は $1/n^2$ 倍となり，電圧降下は $1/n$ 培となる。また，電圧降下率 =(電圧降下)/(電圧)$\simeq (1/n)/n = 1/n^2$ 倍となり，昇圧により送電線路の電気的特性は向上する。

2.2.3 電圧降下と電力との関係

送電系統では発電所や変電所は互いに遠く離れて存在しており，これらの所内の母線において与えられているのは，ベクトル量 $\dot{E}$，$\dot{I}$ ではなく，その測定点 (母線) だけにおいて定まる電圧の大きさおよび電力 (有効および無効電力) である。したがって，送電線路の特性も電力と関連して把握しておくと便利である。

有効電力 $P_r = E_r I\cos\varphi$，無効電力 $Q_r = E_r I\sin\varphi$ を用いて，式 (2.32)，(2.33) を書き改めると

$$E_r\sin\theta = (XP_r - RQ_r)/E_r \tag{2.37}$$

$$E_s\cos\theta = E_r + (RP_r + XQ_r)/E_r \tag{2.38}$$

となり，θ が小さい場合にはそれぞれ

$$E_s\theta \simeq (XP_r - RQ_r)/E_r \tag{2.39}$$

$$E_s \simeq E_r + (RP_r + XQ_r)/E_r \tag{2.40}$$

となる。

式 (2.37)，(2.38) は次のようにしても求められる。すなわち，$\dot{E}_r$ を基準ベクトルにとり $\dot{E}_r = E_r$，$\dot{E}_s = E_s\varepsilon^{j\theta}$ とし，かつ受電端のベクトル電力を $\dot{S}_r$，その共役値を $\overline{S}_r$ とすると

$$\overline{S}_r = P_r - jQ_r = \overline{E}_r\dot{I} = E_r\frac{E_s\varepsilon^{j\theta} - E_r}{R + jX} \tag{2.41}$$

$$\therefore\ E_sE_r\varepsilon^{j\theta} - E_r^2 = (R + jX)(P_r - jQ_r) \tag{2.42}$$

式 (2.42) の実数部から式 (2.38) が，また虚数部から式 (2.37) が導かれる。

式 (2.39) および (2.40) において R を無視すれば

$$E_sE_r\theta \simeq XP_r \tag{2.43}$$

$$E_s - E_r \simeq XQ_r/E_r \tag{2.44}$$

となる。すなわち，高電圧送電系統の相差角 θ は主として XP_r により，また電圧降下は主として XQ_r により変化する。

誘導性負荷に吸収される無効電力を正としたので，容量性負荷の場合には Q_r は負になる。Q_r が負になると式 (2.44) から明らかなように受電端電圧は上昇する。図 2.8 のように $-|Q|$ なる負の無効電力を吸収する容量性負荷は，同図 (b) のように $+j|Q|$ なる正の無効電力を発生する電力源と考えられる。

したがって，次のように考えることができる。送電系統内のある地点で (正の) 無効電力の吸収 (不足) があれば，送電線路を通して無効電力が流入し，その地点の電圧は降下する。逆に (正の) 無効電力の発生 (過剰) があれば，その地点の電圧は上昇する。都市部においては地中ケーブルによる送電が行われれているが，ケーブルが容量性負荷としてはたらくため，夜間の軽負荷時には受電端電圧が上昇することがある。

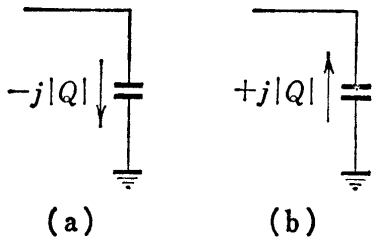


図 2.8:

2.3　調相設備による電圧の調整

前節で，送電線路に流れる無効電力 Q_r によって受電端の電圧 E_r が変化することを知った。したがって，逆にこの特性を利用すれば受電端電圧 E_r の調整ができる。電圧維持のために無効電力の調整を行うことを**調相** (phase modification) という。

すなわち，図 2.9 のように調相設備を設置し，需要家から要求 (demand) される無効電力 Q_d の変化に応じて Q_p を調整すれば，E_r の一定維持が可能となる。例えば，Q_d が大 (重負荷時) で E_r が低下し過ぎたときには調相設備としてコンデンサを使用して正の無効電力を供給し，また Q_d が小 (軽負荷時) で E_r が上昇し過ぎたときにはリアクトルを使用して負の無効電力を供給 (正の無効電力を吸収) すればよい。

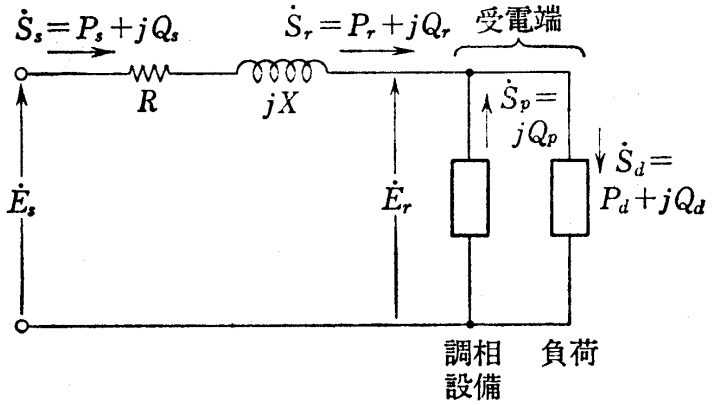


図 2.9: 調相設備の設置

2.4 負荷力率の改善

図 2.6 の回路における伝送損失 P_L は

$$P_L = RI^2 = R(P_r^2 + Q_r^2)/E_r^2 \tag{2.45}$$

で与えられる。この式から明らかなように，E_r が一定の場合には $Q_r = 0$ のとき P_L は最少になる。すなわち，負荷の近くに設置した無効電力調整設備により，負荷が消費する無効電力を局地的に補償し，送電線路の無効電力潮流を減少させると高効率電力伝送が可能となる。

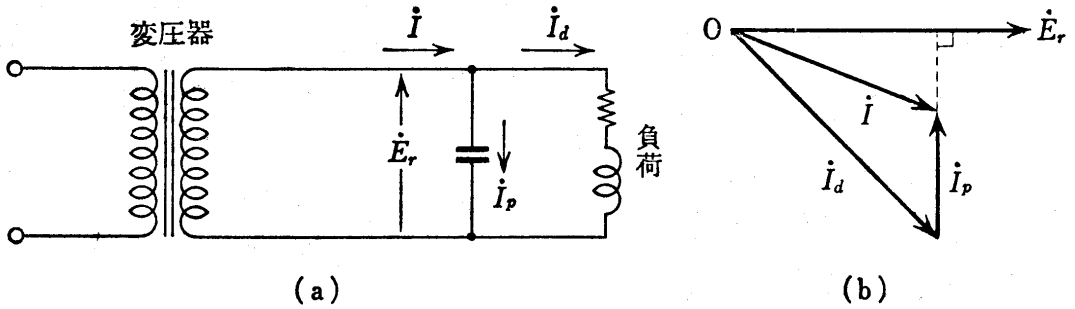


図 2.10: 負荷力率の改善

また，同一の P_L を許すならば，無効電力調整設備により Q_r を減少させた分だけ余計に P_r を伝送できる。図 2.10(a) のように遅れ力率の負荷と並列にコンデンサを設備すれば同図 (b) のように I が減少し，変圧器，電線などの容量に余裕が生じる。

なお，$Q_r = 0$ の場合には，式 (2.44) からわかるように $E_s \simeq E_r$ となる。すなわち，高効率送電時には，送電線路の電圧分布はほぼ平坦になる。