電力システム工学

堀田栄喜 (ehotta@es.titech.ac.jp)
東京工業大学

April 2011
Version 5.00

目 次

第 1 章　交流理論の基礎 **1**
1.1 正弦波交流と回路素子 1
1.1.1 正弦波交流 1
1.1.2 正弦波交流の複素表示 2
1.1.3 回路素子の性質 3
1.1.4 受動素子の交流特性 5
1.1.5 インピーダンスとアドミタンス 7
1.1.6 リアクタンスとサセプタンス 8
1.2 交流回路の複素数による計算 9
1.2.1 実数関数を用いた回路方程式の導出 10
1.2.2 実数係数線形微分方程式の解 11
1.2.3 簡単な回路の計算例 13

第 2 章　電力と調相 **19**
2.1 交流電力 19
2.2 単純系統における電力伝送特性 24
2.2.1 インピーダンス回路の特性 24
2.2.2 電圧降下率および伝送損失 25
2.2.3 電圧降下と電力との関係 25
2.3 調相設備による電圧の調整 26
2.4 負荷力率の改善 27

第 3 章　変成器と最大電力伝送定理 **29**
3.1 変成器 29
3.2 理想変成器 32
3.3 理想変成器のインピーダンス変換作用 33
3.4 一般の変成器の理想変成器による表現 34
3.5 最大電力伝送定理 34
3.5.1 R_L と X_L を独立に変化させる場合 35
3.5.2 $X_L/R_L =$ 一定で変化させる場合 35

第 4 章　分布定数回路 **37**
4.1 分布定数回路とは 37
4.2 無損失 2 導体系の過渡現象 38

4.2.1 波動方程式 38
4.2.2 波動方程式の一般解 39
4.2.3 進行波の伝播速度と特性インピーダンス 40
4.2.4 進行波のエネルギー 44
4.2.5 線路の送端における進行波 45
4.2.6 線路の終端における進行波 45
4.2.7 線路の接続点における進行波 51
4.2.8 格子図 54

第 5 章 三相交流 59

5.1 三相回転磁界 59
5.2 三相電源 60
5.3 対称三相回路 61
5.4 非対称三相交流の対称座標分解 62
5.5 三相交流発電機の基本式 63
5.6 三相交流発電機の故障計算 64
5.6.1 1 線地絡 64
5.6.2 2 線地絡 66

第1章　交流理論の基礎

1.1　正弦波交流と回路素子

1.1.1　正弦波交流

正弦波交流とは

$$g(t) = A\sin(\omega t + \varphi) \tag{1.1}$$

あるいは

$$g(t) = A\cos(\omega t + \varphi) \tag{1.2}$$

で表される波形をいう。

式 (1.1) と式 (1.2) は，時刻 t の原点を変えることで，波形を一致させることができるので，どちらを用いても良いが，ここでは式 (1.2) を用いることにする。

A，ω，φ をそれぞれ，**振幅**，**角周波数**，**初位相**，$\omega t + \varphi$ を**位相**とよぶ。

また，**周波数** f と角周波数 ω，および**周期** T の間には次の関係がある。

$$f = \frac{\omega}{2\pi}, \qquad T = \frac{1}{f} \tag{1.3}$$

通常，A，ω，f，T は正とする。

図 1.1 に初位相を $\varphi = -\pi/4$ としたときの正弦波交流電圧波形を示す。図で V_m が振幅，V_e は後述する実効値である。

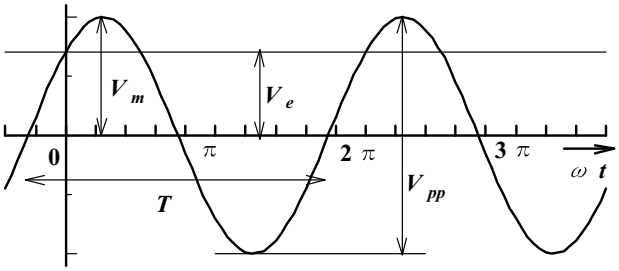

図 1.1: 正弦波交流電圧波形

例えば，一般家庭に配電されている周波数 $f = 50$ Hz，電圧 100 V の交流電圧波形 $v(t)$ は

$$v(t) = 100\sqrt{2}\cos(100\pi t + \varphi) \tag{1.4}$$

と表すことができ，電圧の振幅 A(最大値 V_m) は $A = V_m = 100\sqrt{2} \simeq 141$ V である。電圧値として使われている 100 V というのは，実は，次式で表される**実効値** V_e を示している。

$$V_e = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T v^2(t)dt} \tag{1.5}$$

正弦波交流では

$$V_e = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \tag{1.6}$$

の関係があり，特にことわらない限り，電圧，電流を実効値で表すので，100 V の交流の最大値は 141 V となっているわけである。

ここで正弦波交流波形の位相の進みと遅れについて触れておく。図 1.2 の実線の波形は $\sin\omega t$ を表している。これに対し，$\sin\omega t$ の波形を左に平行移動したように見える点線の波形は $cos\omega t = \sin(\omega t + \pi/2)$ を表しており，$\sin\omega t$ に対して位相が $\pi/2$ だけ進んでいる。位相の進みと遅れは相対的なものであるから，$\sin\omega t = \cos(\omega t - \pi/2)$ は $\cos\omega t$ に対して，位相が $\pi/2$ だけ遅れている。

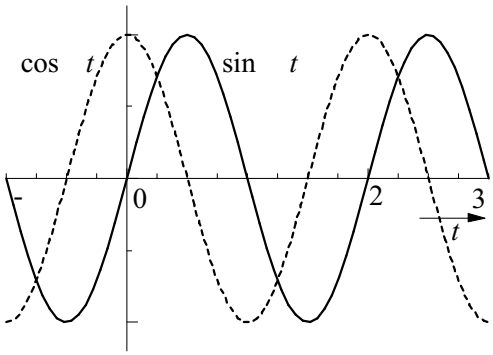

図 1.2: 正弦波交流波形の位相の進みと遅れ

1.1.2　正弦波交流の複素表示

交流回路の特性を理論的に論ずるとき，式 (1.2) をそのまま用いるのではなく，もっと理論的計算が容易に行える複素表現がよく用いられる。これについて，以下で述べる。

三角関数と指数関数との間には，次式で表される**オイラーの公式**が成り立つ。

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta \tag{1.7}$$

上式で θ の代わりに $-\theta$ とおくと

$$e^{-j\theta} = \cos(-\theta) + j\sin(-\theta) = \cos\theta - j\sin\theta \tag{1.8}$$

となるので

$$\cos\theta = \Re(e^{j\theta}) = \frac{1}{2}(e^{j\theta} + e^{-j\theta}) \tag{1.9}$$

と表されることがわかる。

式 (1.9) を用いると，式 (1.2) の $g(t)$ は

$$g(t) = A\cos(\omega t + \varphi) = \Re\{Ae^{(j\omega t + \varphi)}\} \tag{1.10}$$

と表すことができる。また，初位相を含めた**複素振幅**を

$$\dot{A} = Ae^{j\varphi} \tag{1.11}$$

とすると

$$g(t) = \Re(Ae^{j\varphi}e^{j\omega t}) = \Re(\dot{A}e^{j\omega t}) \tag{1.12}$$

と表される。

したがって，複素数 $Ae^{(j\omega t+\varphi)}$ や $\dot{A}e^{j\omega t}$ の実部をとれば，$g(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ となるので，$\dot{A}e^{j\omega t}$ がわかれば $g(t)$ もわかることになる。

$Ae^{(j\omega t+\varphi)}$ や $\dot{A}e^{j\omega t}$ を $g(t)$ の**複素表現**という。複素表現の実部をとれば，実時間の，すなわち現実の波形が得られる。逆に，現実の波形から，その複素表現も直ちに決定できる。

以上より，$g(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ と $\dot{A}e^{j\omega t}$ は**一対一対応**があることがわかった。したがって，理論的には，両者のうち，扱いに便利な方を用いればよい。$\dot{A}e^{j\omega t}$ を**複素正弦波交流**という。

1.1.3　回路素子の性質

電気回路の基本素子は，**抵抗**，**コンデンサー**，**インダクター**，**変成器**である。これらの素子は，電気エネルギーを消費したり，蓄えたりするが，発生することはないので**受動素子**と呼ばれる。

抵抗

実際の抵抗器は炭素被膜や金属被膜あるいは巻き線などで作られている。一般に，これらの材料の抵抗は温度に依存するので，抵抗で消費されるエネルギーや周囲の状況によって，抵抗値も変化するが，これを理想化して線形性を満たすものと考えたものを抵抗 R と呼ぶ。

図 1.3 の向きに電流 $i(t)$ と電圧 $v(t)$ をとって，抵抗は次式のオームの法則を満足する。

$$\left.\begin{aligned} v(t) &= Ri(t) \\ i(t) &= Gv(t) \end{aligned}\right\} \tag{1.13}$$

ここで，$G = 1/R$ はコンダクタンスである。

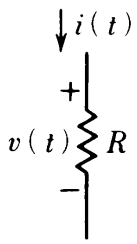

図 1.3: 抵抗

コンデンサー

絶縁物を挟んで，2 枚の導体板を向き合わせたものを**コンデンサー**という。現実のコンデンサーは，絶縁物が漏れコンダクタンスや非線形性を持っているが，これを理想化したものをコンデンサーとしている。

図 1.4 の向きに電流 $i(t)$，電圧 $v(t)$ をとると，次の関係式を満足する。

$$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt} \tag{1.14}$$

ここで，C は**静電容量**または単に**容量**，あるいは**キャパシタンス**と呼ばれる。

逆に，$v(t)$ は積分形で

$$v(t) = \frac{1}{C}\int i(t)dt \tag{1.15}$$

と表される。

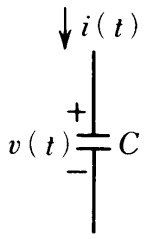

図 1.4: コンデンサー

インダクター

図 1.5 に示すように，導線を巻いたものを**コイル**という。コイルには空芯の場合もあれば，鉄心を使う場合もある。このコイルを理想化したものが，**インダクター**である。

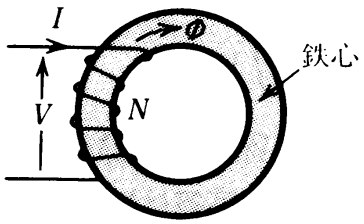

図 1.5: コイル

巻数 N のインダクターに電流 I を流すと，**磁束** ϕ が生じるが，I と ϕ には次の関係がある。

$$N\phi = LI \tag{1.16}$$

この L を**インダクタンス**とよぶ。

1 回巻きのコイルのインダクタンスを L_0，これに電流 I を流したときの磁束を ϕ_0 とすると，次式が成り立つ。

$$\phi_0 = L_0 I \tag{1.17}$$

巻数が N になると，磁束は N 倍になる。したがって

$$\phi = N\phi_0 = NL_0 I \tag{1.18}$$

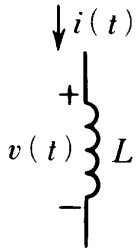

図 1.6: インダクター

$$\therefore \quad LI = N\phi = N^2\phi_0 = N^2 L_0 I \tag{1.19}$$

すなわち，インダクタンスは巻数の二乗に比例する。

磁束を変化させると，巻数に比例して，次式で表される電圧が発生し，その方向は**レンツの法則**によって，磁束の変化を妨げる方向である。

$$v(t) = N\frac{d\phi(t)}{dt} \tag{1.20}$$

式 (1.16) を用いると，式 (1.20) は

$$v(t) = L\frac{di(t)}{dt} \tag{1.21}$$

となることがわかる。これがインダクタンスの基本式で，電流 $i(t)$，電圧 $v(t)$ の方向は図 1.6 のようになる。

逆に $i(t)$ は

$$i(t) = \frac{1}{L}\int v(t)dt \tag{1.22}$$

と表される。

1.1.4　受動素子の交流特性

抵抗，コンデンサー，インダクターの電流，電圧の関係は前節で述べた。この節では，正弦波交流に対する，電流，電圧の関係について述べる。

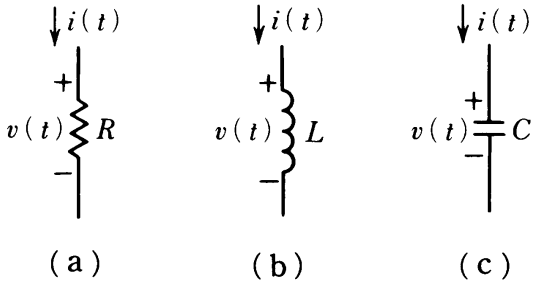

図 1.7: 抵抗，インダクター，コンデンサーの交流特性

抵抗の交流特性

図 1.7(a) のように，正弦波電流

$$i(t) = I_m \cos \omega t \tag{1.23}$$

を抵抗 R に流すと

$$v(t) = Ri(t) = RI_m \cos \omega t = V_m \cos \omega t \tag{1.24}$$

となる。したがって，電圧と電流は同位相で，振幅は

$$V_m = RI_m \tag{1.25}$$

となり，直流の場合と同じ関係が成り立つ。

コンデンサーの交流特性

図 1.7(c) のように，正弦波電圧

$$v(t) = V_m \cos \omega t \tag{1.26}$$

をコンデンサー C に印加すると，次式の電流が流れる。

$$\begin{aligned} i(t) &= C\frac{dv(t)}{dt} = -CV_m\omega \sin \omega t \\ &= \omega CV_m \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned} \tag{1.27}$$

したがって

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi) \tag{1.28}$$

とおくと，$\varphi = \pi/2$ であるから，電流は電圧より位相が $\pi/2$ 進んでおり，また電圧と電流の振幅の間には

$$I_m = \omega CV_m \tag{1.29}$$

の関係があることがわかる。

インダクターの交流特性

図 1.7(b) のように，正弦波電流

$$i(t) = I_m \cos \omega t \tag{1.30}$$

をインダクター L に流すと，次式の電圧が生じる。

$$\begin{aligned} v(t) &= L\frac{di(t)}{dt} = -LI_m\omega \sin \omega t \\ &= \omega LI_m \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned} \tag{1.31}$$

したがって

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \varphi) \tag{1.32}$$

とおくと，$\varphi = \pi/2$ であるから，電圧は電流より位相が $\pi/2$ 進んでおり，また電流と電圧の振幅の間には

$$V_m = \omega L I_m \tag{1.33}$$

の関係があることがわかる。

1.1.5　インピーダンスとアドミタンス

前節では，実数の電圧，電流を扱ったが，本節では複素表示の電圧，電流を使って，これらの間の関係を求めることにする。

コンデンサーの交流特性

式 (1.26) の複素表示は

$$V(t) = V_m e^{j\omega t} \tag{1.34}$$

と表すことができる。またこれに対する電流の複素表示は，式 (1.27) から

$$I(t) = \dot{I}_m e^{j\omega t} = j\omega C V_m e^{j\omega t} = j\omega C V(t) \tag{1.35}$$

となる。

コンデンサーの場合，実数の電圧 $v(t)$ と電流 $i(t)$ の間には比例関係がないにもかかわらず，式 (1.35) より，$V(t)$ と $I(t)$ が比例していることがわかる。これは，複素表示の場合，$V(t)$ と $I(t)$ には同じ時間依存の項 $e^{j\omega t}$ がかかっているからである。

式 (1.35) より

$$\frac{V(t)}{I(t)} = \frac{V_m}{\dot{I}_m} = \frac{1}{j\omega C} \tag{1.36}$$

が得られるが，上式は電圧と電流の比であるから，直流の場合の抵抗と同じ次元を持っている。これを**インピーダンス** (impedance) といい $\dot{Z}$ で表す。すなわち，角周波数 ω の交流に対する，容量 C のコンデンサーのインピーダンスは

$$\dot{Z}_C = \frac{1}{j\omega C} \tag{1.37}$$

と表される。

インピーダンスの逆数を**アドミタンス** (admittance) といい，通常 $\dot{Y}$ と表す。したがって，コンデンサのアドミタンスは

$$\dot{Y}_C = \frac{1}{\dot{Z}_C} = j\omega C \tag{1.38}$$

である。

電気回路を扱う場合，一般にインピーダンス，アドミタンスは複素数であるが，ドットを省略し，Z，Y で表すことが多い。本テキストでも簡単のため，インピーダンスやアドミタンスに対しては，複素数を表すドットを省くことにする。

インダクターの交流特性

インダクターの場合，式 (1.30)，式 (1.31) より

$$I(t) = I_m e^{j\omega t} \tag{1.39}$$

$$V(t) = \dot{V}_m e^{j\omega t} = j\omega L I_m e^{j\omega t} = j\omega L I(t) \tag{1.40}$$

が得られる。

したがって，インダクターのインピーダンスおよびアドミタンスは

$$Z_L = \frac{V(t)}{I(t)} = \frac{\dot{V}_m}{I_m} = j\omega L \tag{1.41}$$

$$Y_L = \frac{1}{Z_L} = \frac{1}{j\omega L} \tag{1.42}$$

と表される。

抵抗の交流特性

抵抗の場合，式 (1.24) より

$$i(t) = \frac{1}{R} v(t) \tag{1.43}$$

で，実数の電圧 $v(t)$ と電流 $i(t)$ が比例している。複素電流

$$I(t) = I_m e^{j\omega t} \tag{1.44}$$

に対する複素電圧として

$$V(t) = V_m e^{j\omega t} = R I_m e^{j\omega t} \tag{1.45}$$

が得られる。

したがって，抵抗のインピーダンスおよびアドミタンスは

$$Z_R = \frac{V(t)}{I(t)} = \frac{V_m}{I_m} = R \tag{1.46}$$

$$Y_R = \frac{1}{Z} = \frac{1}{R} \tag{1.47}$$

と表される。

1.1.6　リアクタンスとサセプタンス

インピーダンス Z は複素数であるから，これを実部と虚部に分けて

$$Z = R + jX \tag{1.48}$$

とおき，実部 R を Z の抵抗成分，X を**リアクタンス** (reactance) 成分とよぶ。R，X の単位はオーム (Ω) である。

式 (1.41)，式 (1.37) より，Z_L，Z_C のリアクタンス X_L，X_C はそれぞれ次のようになる。

$$X_L = \omega L \tag{1.49}$$

$$X_C = -\frac{1}{\omega C} \tag{1.50}$$

受動回路の場合，R，L，C は正の値をとるので，実部 R は常に正，リアクタンスは正負の値をとる。正のリアクタンスを**誘導性リアクタンス**，負のリアクタンスを**容量性リアクタンス**という。

インピーダンスの場合と同様に，アドミタンスを実部と虚部に分けて

$$Y = G + jB \tag{1.51}$$

と表し，G を**コンダクタンス**分，B を**サセプタンス** (susceptance) 分と呼び，単位はジーメンス (S) である。

式 (1.38)，式 (1.42) より，Y_C，Y_L のサセプタンス B_C，B_L はそれぞれ次のようになる。

$$B_C = \omega C \tag{1.52}$$

$$B_L = -\frac{1}{\omega L} \tag{1.53}$$

正のサセプタンスを**容量性サセプタンス**，負のサセプタンスを**誘導性サセプタンス**と呼ぶ。

表 1.1 に交流回路における素子の属性をまとめて示す。

表 1.1: 抵抗，インダクター，コンデンサーの属性

	抵抗	インダクター	コンデンサー
インピーダンス	R	$j\omega L$	$\frac{1}{j\omega C}$
アドミタンス	$\frac{1}{R}$	$\frac{1}{j\omega L}$	$j\omega C$
抵抗	R , $\frac{1}{G}$		
コンダクタンス	$\frac{1}{R}$, G		
リアクタンス		ωL	$-\frac{1}{\omega C}$
サセプタンス		$-\frac{1}{\omega L}$	ωC

1.2　交流回路の複素数による計算

前章では，交流回路を構成する基本素子について，複素数を用いた計算法を述べた。ここでは，基本素子を組み合わせた簡単な回路について，複素表現の電圧，電流を用いて計算し，実数関数による計算に比べて，はるかに簡単に計算できることを示す。

1.2.1　実数関数を用いた回路方程式の導出

最初に，図 1.8 に示す回路の，実数電圧 $e(t)$ と電流 $i(t)$ の関係を求める。

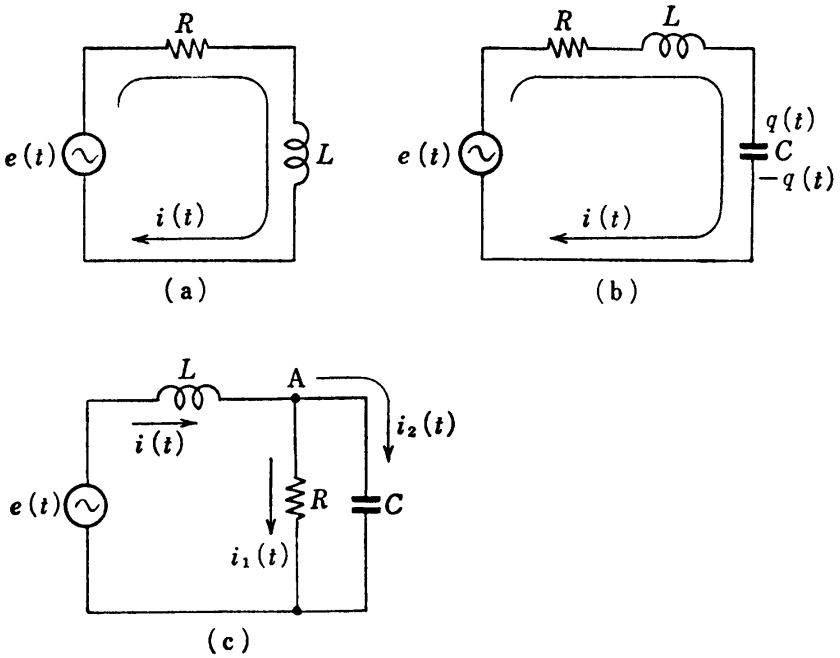

図 1.8:

図 1.8(a) の回路における，R と L による電圧降下 v_R，v_L はそれぞれ $v_R = Ri(t)$，$v_L = L\dfrac{di(t)}{dt}$ で，これらの和が電源電圧 $e(t)$ と平衡することから，回路方程式として

$$Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} = e(t) \tag{1.54}$$

が得られる。

図 1.8(b) の回路においては，コンデンサー C の電圧 v_c は，コンデンサーに蓄えられる電荷を $q(t)$ とすると $v_C = \dfrac{q(t)}{C}$，また電流は $i(t) = \dfrac{dq(t)}{dt}$ と表されることから，回路方程式として

$$\frac{1}{C}q(t) + R\frac{dq(t)}{dt} + L\frac{d^2q(t)}{dt^2} = e(t) \tag{1.55}$$

が得られる。

図 1.8(c) では，R と C の電圧降下 v_R，v_C は等しく

$$v_R = Ri_1(t),\ \ v_C = \frac{1}{C}\int i_2(t)dt,\ \ v_R = v_C \tag{1.56}$$

すなわち

$$Ri_1(t) = \frac{1}{C}\int i_2(t)dt \tag{1.57}$$

である。また，節点 A にキルヒホッフの法則を適用すると

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) \tag{1.58}$$

が成り立つ。さらに，閉回路について

$$L\frac{di(t)}{dt} + Ri_1(t) = e(t) \tag{1.59}$$

が成り立つ。

ここで，式 (1.57) を時間 t で微分すると

$$R\frac{di_1(t)}{dt} = \frac{1}{C}i_2(t) \tag{1.60}$$

が得られるので，式 (1.58) に上式の $i_2(t)$ を代入して

$$i(t) = i_1(t) + CR\frac{di_1(t)}{dt} \tag{1.61}$$

式 (1.59) の $i_1(t)$ を式 (1.61) に代入して整理すると

$$LCR\frac{d^2i(t)}{dt^2} + L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = CR\frac{de(t)}{dt} + e(t) \tag{1.62}$$

が得られる。

以上の式 (1.54)，式 (1.55)，式 (1.62) において，$e(t)$ は与えられた電源電圧であるから，右辺は既知関数である。したがって，いずれの回路に対しても，未知関数 $i(t)$ あるいは $q(t)$ について，**実数係数線形微分方程式**が得られたことになる。

1.2.2　実数係数線形微分方程式の解

一般に，電圧，電流に関する回路方程式は，次式の実数係数線形微分方程式になることが知られている。

$$\frac{d^ny}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_2\frac{d^2y}{dt^2} + a_1\frac{dy}{dt} + a_0y = f(t) \tag{1.63}$$

ここで $f(t)$ は既知関数である。

例えば，$e(t) = E_m\cos\omega t$ とすれば，式 (1.54)，式 (1.55) は，一般式 (1.63) で $f(t) = E_m\cos\omega t$ とおいたものと同じにできる。また，式 (1.62) では右辺が

$$RC\frac{de(t)}{dt} + e(t) = -RCE_m\omega\sin\omega t + E_m\cos\omega t \tag{1.64}$$

となるが，三角関数の公式

$$a\sin\omega t + b\cos\omega t = \sqrt{a^2+b^2}\cos(\omega t - \theta) \tag{1.65}$$

$$\text{ただし}\quad \tan\theta = \frac{a}{b} \tag{1.66}$$

を用い，t の代わりに $t + \dfrac{\theta}{\omega}$ とおくと，式 (1.62) の右辺は，$f(t) = A\cos\omega t$ の関数形にすることができる。

これらの例から分かるように，一般に，交流回路では $f(t)$ が $A\cos\omega t$ (A は実数) のように与えられているとして良い。

次に，式 (1.63) において $f(t) = A\cos\omega t$ とした次式の解 $y(t)$ を，複素表示を用いて解く。ただし，$\dfrac{d^n y}{dt^n}$ を $y^{(n)}$ と略記する。

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_2 y^{(2)} + a_1 y^{(1)} + a_0 y = A\cos\omega t \tag{1.67}$$

オイラーの公式

$$\cos\omega t = \Re(e^{j\omega t}) = \frac{1}{2}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}) \tag{1.68}$$

を用いて，式 (1.67) の右辺を変形すると

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_2 y^{(2)} + a_1 y^{(1)} + a_0 y = \frac{A}{2}e^{j\omega t} + \frac{A}{2}e^{-j\omega t} \tag{1.69}$$

が得られる。線形方程式であるから，右辺を $\dfrac{A}{2}e^{j\omega t}$ と $\dfrac{A}{2}e^{-j\omega t}$ とに分けて考え，それぞれの解を重ね合わせることにする。そこで

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_2 y^{(2)} + a_1 y^{(1)} + a_0 y = Ae^{j\omega t} \tag{1.70}$$

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_2 y^{(2)} + a_1 y^{(1)} + a_0 y = Ae^{-j\omega t} \tag{1.71}$$

をそれぞれ満足する解 Y_1 と Y_2 を求め

$$y = \frac{1}{2}(Y_1 + Y_2) \tag{1.72}$$

とすれば，式 (1.67) の解となる。

式 (1.70) の解 Y_1 が得られているとする。このとき，式 (1.70) の複素共役をとると

$$\overline{Y_1^{(n)} + a_{n-1}Y_1^{(n-1)} + \cdots + a_2 Y_1^{(2)} + a_1 Y_1^{(1)} + a_0 Y_1} = \overline{Ae^{j\omega t}} \tag{1.73}$$

が得られるが，係数 $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_2, a_1, a_0$ および A が実数であることから，上式は

$$\overline{Y_1}^{(n)} + a_{n-1}\overline{Y_1}^{(n-1)} + \cdots + a_2\overline{Y_1}^{(2)} + a_1\overline{Y_1}^{(1)} + a_0\overline{Y_1} = Ae^{-j\omega t} \tag{1.74}$$

となる。

式 (1.74) を式 (1.71) と比較すると，式 (1.71) の解 Y_2 は

$$Y_2 = \overline{Y_1} \tag{1.75}$$

であることがわかる。したがって，式 (1.67) の解は

$$y = \frac{1}{2}(Y_1 + Y_2) = \frac{1}{2}(Y_1 + \overline{Y_1}) \tag{1.76}$$

となるが，複素数の性質から

$$y(t) = \Re\{Y_1(t)\} \tag{1.77}$$

となる。

以上をまとめると，$f(t) = A\cos\omega t$ に対する式 (1.67) の解 $y(t)$ は，複素関数 $Ae^{j\omega t}$ に対する式 (1.70) の解 $Y_1(t)$ の実部によって与えられる。

次に，式 (1.70) の定常解 $Y_1(t)$ を求める。定常解を求めるため，解を $Ae^{j\omega t}$ と同形式の複素関数を用いて

$$Y_1(t) = Be^{j\omega t} \tag{1.78}$$

とおいてみよう。このとき

$$\frac{dY_1}{dt} = j\omega Be^{j\omega t} = j\omega Y_1(t)$$

$$\frac{d^2Y_1}{dt^2} = (j\omega)^2 Be^{j\omega t} = (j\omega)^2 Y_1(t)$$

同様に

$$\frac{d^nY_1}{dt^n} = (j\omega)^n Be^{j\omega t} = (j\omega)^n Y_1(t) \tag{1.79}$$

すなわち，n 階 t で微分することは $(j\omega)^n$ をかけることと同じである。したがって，式 (1.70) は

$$\{(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \cdots + a_1(j\omega) + a_0\}Y_1(t) = Ae^{j\omega t} \tag{1.80}$$

となり，解 $Y_1(t)$ は

$$Y_1(t) = \frac{A}{(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \cdots + a_1(j\omega) + a_0}e^{j\omega t} \tag{1.81}$$

と求められる。すなわち，解 $Y_1(t) = Be^{j\omega t}$ の係数 B として

$$B = \frac{A}{(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \cdots + a_1(j\omega) + a_0} \tag{1.82}$$

が得られる。

このように，複素交流表現を用いると，微分方程式 (1.70) は**代数方程式** (1.80) に置き換えることができ，解を容易に得ることができる。

1.2.3　簡単な回路の計算例

その 1

図 1.9 の回路に流れる電流を求める。

回路の微分方程式は

$$L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = e(t) = E_m\cos\omega t \tag{1.83}$$

ここで E_m は実数である。

$e(t)$ の複素表現 $E(t) = E_m e^{j\omega t}$ に対して，電流 $i(t)$ の複素表現 $I(t) = \dot{I}_m e^{j\omega t}$ を用いると，微分 d/dt は $j\omega$ に置き換えることができるので，式 (1.83) は

$$j\omega LI(t) + RI(t) = E(t)$$

$$\therefore \quad I(t) = \frac{E(t)}{j\omega L + R} \tag{1.84}$$

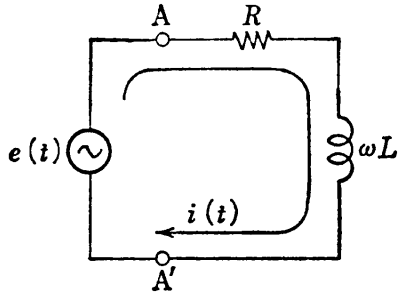

図 1.9:

これより

$$
\begin{aligned}
I(t) &= \dot{I}_m e^{j\omega t} \\
&= \frac{E(t)}{j\omega L + R} = \frac{E_m}{j\omega L + R}\, e^{j\omega t} \\
&= \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}\, e^{j\theta}}\, e^{j\omega t} = \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}\, e^{j(\omega t - \theta)} \qquad (1.85) \\
&\quad \text{ただし} \quad \tan\theta = \frac{\omega L}{R} \qquad (1.86)
\end{aligned}
$$

したがって

$$
i(t) = \Re(I(t)) = \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \cos(\omega t - \theta) \qquad (1.87)
$$

ここで $E(t)/I(t)$ を図 1.9 で AA′ から右側を見込むインピーダンス Z とすると，式 (1.84) より

$$
Z = \frac{E(t)}{I(t)} = \frac{E_m}{\dot{I}_m} = R + j\omega L = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}\, e^{j\theta} \qquad (1.88)
$$

したがって

$$
\dot{I}_m = \frac{E_m}{Z} = \frac{E_m}{R + j\omega L} \qquad (1.89)
$$

その 2

図 1.10 の回路に流れる電流を求める。

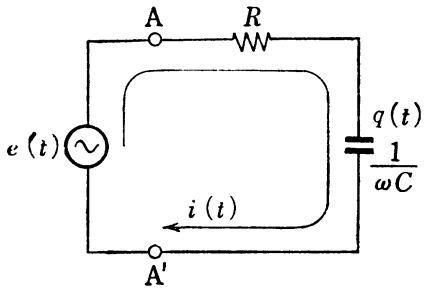

図 1.10:

コンデンサ C に蓄えられる電荷を $q(t)$ とすると，回路電流は $i(t) = dq(t)/dt$ で与えられるので，回路方程式は

$$\frac{1}{C}q(t) + R\frac{dq(t)}{dt} = e(t) \tag{1.90}$$

となる。

したがって，$E(t) = E_m e^{j\omega t}$ とすると，$q(t)$ の複素表現 $Q(t) = \dot{Q}_m e^{j\omega t}$ は，式 (1.90) より

$$\frac{Q(t)}{C} + R\frac{dQ(t)}{dt} = E(t) \tag{1.91}$$

となることから

$$Q(t) = \frac{E(t)}{j\omega R + \frac{1}{C}} = \frac{CE(t)}{1 + j\omega CR} \tag{1.92}$$

これより

$$I(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = j\omega Q(t) = \frac{j\omega CE(t)}{1 + j\omega CR} \tag{1.93}$$

上式より，AA′ より右側を見込んだインピーダンス Z は

$$\begin{aligned} Z = \frac{E(t)}{I(t)} = \frac{1 + j\omega CR}{j\omega C} &= R + \frac{1}{j\omega C} = R - j\frac{1}{\omega C} \\ &= |Z|e^{j\theta} \end{aligned} \tag{1.94}$$

$$|Z| = \sqrt{R^2 + \left(-\frac{1}{\omega C}\right)^2}, \qquad \tan\theta = -\frac{1}{\omega CR} \tag{1.95}$$

と表すことができる。

したがって，回路電流 $i(t)$ は

$$\begin{aligned} i(t) = \Re\{I(t)\} &= \Re\left\{\frac{E(t)}{Z}\right\} \\ &= \Re\left\{\frac{E_m e^{j\omega t}}{|Z|e^{j\theta}}\right\} \qquad (1.96) \\ &= \left\{\frac{E_m}{|Z|}e^{j\omega t - \theta}\right\} \\ &= \frac{E_m}{|Z|}\cos(\omega t - \theta) \qquad (1.97) \end{aligned}$$

となる。

ところで

$$I(t) = \dot{I}_m e^{j\omega t} = \frac{E(t)}{Z} = \frac{E_m e^{j\omega t}}{Z} \tag{1.98}$$

であるから

$$\dot{I}_m = \frac{E_m}{Z} = \frac{E_m}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{E_m}{|Z|e^{j\theta}} = \frac{E_m}{|Z|}e^{-j\theta} \tag{1.99}$$

複素表現による回路計算のまとめ

以上より，回路計算を行う際，微分方程式を導出して議論しなくても，$e^{j\omega t}$ で変化する複素交流電源に対しては

回路素子		インピーダンス Z
R	$\longrightarrow$	R
L	$\longrightarrow$	$j\omega L$
C	$\longrightarrow$	$\dfrac{1}{j\omega C}$

と置き換え，$E(t)$，$I(t)$，Z を用いて直流回路と同じように計算すれば，交流回路の問題を解くことができる。

任意の回路において，そのインピーダンス Z を上記の方法で計算できて

$$Z = |Z|e^{j\theta} \tag{1.100}$$

$$\text{ただし}\quad \theta = Arg(Z) \tag{1.101}$$

が得られれば，電流は

$$I(t) = \frac{E(t)}{Z} \tag{1.102}$$

$$i(t) = \Re\{I(t)\} \tag{1.103}$$

より求められる。

これまでは $e(t) = E_m \cos\omega t$ とし，初位相を $\varphi = 0$ としてきたが，必ずしも $\varphi = 0$ とは限らないので

$$e(t) = E_m \cos(\omega t + \varphi) \tag{1.104}$$

とすると

$$\begin{aligned} E(t) &= E_m e^{j\omega t + \varphi} \\ &= E_m e^{j\varphi} e^{j\omega t} \\ &= \dot{E}_m e^{j\omega t} \\ &\quad \text{ただし}\quad \dot{E}_m = E_m e^{j\varphi} \end{aligned} \tag{1.105}$$

と表現される。

このとき，例えば実数電流は

$$\begin{aligned} i(t) &= \Re\left\{\frac{\dot{E}_m e^{j\omega t}}{|Z|e^{j\theta}}\right\} = \Re\left\{\frac{E_m e^{j\varphi} e^{j\omega t}}{|Z|e^{j\theta}}\right\} = \Re\left\{\frac{E_m}{|Z|} e^{j(\omega t + \varphi - \theta)}\right\} \\ &= \frac{E_m}{|Z|}\cos(\omega t + \varphi - \theta) \end{aligned} \tag{1.106}$$

となり，$i(t)$ の方が $e(t)$ より $\theta = Arg(Z)$ だけ位相が遅れていることがわかる。この $\theta = Arg(Z)$ は φ とは関係がなく，回路構造だけから決まるものである。

このように，$Z = |Z|e^{j\theta}$ がわかると，電流の振幅は $E_m/|Z|$，位相は電圧より θ だけ遅れることが直ちにわかるので，複素表現に慣れてくると，実数表現 $i(t)$ まで計算しなくとも，インピーダンス Z だけから回路の性質を理解できる。

$i(t)$ や $e(t)$ は現実に存在する量であるが，$I(t)$ や $E(t)$ は複素量であるから，物理的実在量ではない。しかし，これを用いることにより，現実の回路計算を非常に楽にすることができる。