東京工業大学大学院　経営工学専攻

2011/5/11

年金数理第5回

年金数理の基礎

講師　：　渡部善平 ((株)IICパートナーズ)

第5回の目的

- 具体的な年金制度の例を知る
- 年金数理の目的と基本原理
- 年金数理の道具立て:計算基礎率を知る
- 定常人口について理解する
- モデル企業・年金制度について理解する
- 等価の原理について理解する
- 現価・終価について理解する

年金制度と年金数理

具体的な年金制度(1)

- 企業独自の年金制度　・・・企業年金
  - わが国年金制度の中の「3階」部分
  - 企業の報酬制度の重要な構成要素
  - 従業員の退職（自己都合会社都合・死亡・定年）を要件として支払う
  - 給付算定式は各企業で決定
  - 年金財政は各企業内で完結
  - 通常、積立のための掛金（年金保険料）は通常企業負担で損金算入
  - 掛金は外部積立され、資本市場で運用される
  - 確定給付制度と確定拠出制度がある

  （年金数理で扱うのは確定給付制度）

具体的な年金制度(2)

- 企業年金制度の典型例
  - 最終給与比例型
    - 退職時給与×勤続年数別支給率
  - 平均給与比例型
    - 全期間平均給与×勤続年数別支給率
  - ポイント制
    - 退職時累計ポイント×単価
  - キャッシュバランスプラン
    - 給与の一定割合を規約で定めた利率（変動）で付利

具体的な年金制度(3)

- 最終給与比例型
  - 年金
    - 受給資格　：　勤続20年以上での退職
    - 年金月額　：最終給与月額×別表2の給付率
    - 年金開始時　：　60歳、終身支給
  - 一時金受給資格
    - 受給資格　：　勤続3年以上20年未満の退職
    - 一時金額　：　最終給与月額×別表1の給付率

具体的な年金制度(4)

別表1

勤続年数	給付率
1	0.5
2	1.0
3	1.5
4	2.4
5	3.0
6	3.6
7	4.2
8	5.6
9	6.3
10	7.0
11	7.7
12	9.6
13	10.4
14	11.2
15	12.0
16	12.8
17	15.3
18	16.2
19	17.1
20	20.0

別表2

勤続年数	給付率
20	0.215
21	0.226
22	0.237
23	0.247
24	0.258
25	0.269
26	0.280
27	0.290
28	0.301
29	0.312
30	0.323
31	0.333
32	0.344
33	0.355
34	0.366
35	0.376
36	0.387
37	0.398
38	0.409
39	0.419
40	0.430
41	0.441
42	0.452

従業員構成

年齢	勤続	人数	平均給与	年齢	勤続	人数	平均給与
20	0	50	200,000	40	20	41	297,300
21	1	49	204,000	41	21	91	303,200
22	2	30	208,100	42	22	67	309,300
23	3	67	212,300	43	23	45	315,500
24	4	78	216,500	44	24	47	321,800
25	5	56	220,800	45	25	62	328,200
26	6	70	225,200	46	26	83	334,800
27	7	61	229,700	47	27	79	341,500
28	8	54	234,300	48	28	50	348,300
29	9	45	239,000	49	29	18	355,300
30	10	86	243,800	50	30	8	362,400
31	11	80	248,700	51	31	36	369,600
32	12	51	253,700	52	32	25	377,000
33	13	61	258,800	53	33	15	384,500
34	14	57	264,000	54	34	18	392,200
35	15	82	269,300	55	35	19	400,000
36	16	82	274,700	56	36	26	408,000
37	17	76	280,200	57	37	30	416,200
38	18	91	285,800	58	38	19	424,500
39	19	41	291,500	59	39	16	433,000

年金数理の目的

- 掛金の決定

長期的に

掛金＋運用収益＝給付

を実現するように掛金を決定する

- （なぜ運用収益か？）

積立てた掛金を、給付発生まで、年金資産としてプールし

資本市場（株・債券・預貯金等）で運用する

掛金：会社が、将来の年金の給付のために、あらかじめ積み立てる必要な経済的な備え

掛金を決定する際に必要な事項は？

これだけで掛金は
決めなさいといわれたらどうしますか？

考えて見ましょう

掛金を決定する際に必要な事項は？

もちろん可能です
しかし答えは「無数」にあります
極端に言えば
好き勝手に決めても
制度はなんとかなります

年金数理の基本原理
・計算基礎率

掛金を決定する際に必要な事項は？

- 大原則
  - 収支相等の原理（これはどんな場合でも必要）
    長期的に　<u>掛金＋運用収益＝給付</u>　を実現
  - 加入者（従業員)毎でなく集団（企業）毎の収支相等
    各人で見た場合の偏りは許容
  - 非負の原理
    積立金をマイナスにしない
  - 大数の法則　：　一定以上の集団の規模
    集団が大きくなるほど計算前提（基礎率）の有効が高まる
    <u>掛金が安定するための要件</u>

掛金を決定する際に必要な事項は？

- 積立の方針　：　財政方式
  - Ex 人数比例または給与比例で積み立てる
  - Ex　多くは平準的な積立(掛金額/掛金率は一定)
  - 積立の速度（掛金でまかなう部分と運用収益でまかなう部分の割合）

⇒　たとえば、各従業員の給与×一定率で積み立てたい

⇒　何が必要か？

収支相等の原則

長期的に
掛金＋運用収益＝給付
を実現するように<u>掛金</u>を決定する

- 給付支払いの発生時期の予想
- 給付額の予想
- 積み立ての基礎となる従業員数/給与額の予想
- 運用収益の予想

⇒　各種「計算基礎率」が必要になる

非常に単純な例

- 現在　２５歳　勤続５年
- 給与　３００，０００円
  - いつ退職するか
    ⇒　退職時の勤続年数が決まる
    ⇒　退職時点までの積立期間が決まる
  - その際の給与はいくらか
    ⇒年金（一時金額）に影響

あらかじめ前提をおかないと、
給付や積立の予想ができないことがわかる

計算基礎率

- 給付支払いの発生時期の予想
  ⇒　予定脱退率
- 給付額の予想
  ⇒　予定脱退率・予定昇給率
- 積み立ての基礎となる従業員数/給与額の予想
  ⇒　予定脱退率・予定昇給率・予定新規加入員
- 運用収益の予想
  ⇒　予定利率

予定脱退率

- 制度の加入者が、向こう1年間に退職する確率
- 通常、直近の実績に基づいて決定する
  - 年齢毎に決定する場合
  - 一律に決定する場合

予定昇給率

- 制度の加入者の給与の向こう1年間の予想昇給率
- 通常、直近の実績に基づいて決定する
  - 年齢毎に決定する場合
  - 一律に決定する場合

予定新規加入員に関する前提

- 制度に新規に加入（通常、企業に入社）する年齢・人数に関する仮定

（例）

年齢22歳で、毎年総人数の8％が加入する

予定利率

- 掛金の払い込みによって積み立てられた年金資産が資本市場で運用される場合に長期的に生み出す期待運用収益に関する仮定
- 通常は制度全体でひとつ

年金数理の目的(再び)

- 掛金の決定

  長期的に

  掛金＋<u>運用収益</u>＝給付

  を実現するように<u>掛金</u>を決定する

- <u>財政の検証を行う</u>

  決定した掛金の妥当性の検証＝計算基礎率の妥当性を見る

- <u>財政計画を定期的に見直す</u>

  必要に応じて掛金を変更する

  　＝計算基礎率を必要に応じて変更する

  ⇒　年金受給者の受給権を保護する

定常人口・モデル的な制度

定常人口・モデル制度について

- これらを想定する意義
  - 年金数理の基礎理論＝財政方式の基礎理論を単純明快に導入し、理解しやすくするため
- 定常人口とは
  - その集団が予定計算基礎率どおりに推移した場合の究極的な人口構成
- この講義で中心的に考えるモデル制度とは
  - 定常人口を保った企業を想定
  - 給付内容　：　退職時の勤続年数に比例した年金額を定年年齢時より生存する限り支給する

定常人口

- 毎年一定の年齢で一定の人数が入社する
- 各年齢の従業員の集団では毎年一定の退職者が発生する
- 一定の定年年齢で全員退職する
- 定年年齢以降は、各年齢で毎年一定の死亡が発生する

定常人口

従業員

X	lx	qx
30	10,000	0.05
31	9,500	0.05
32	9,025	0.05
33	8,574	0.05
34	8,145	0.05
35	7,738	0.05
36	7,351	0.05
37	6,983	0.05
38	6,634	0.05
39	6,302	0.05
40	5,987	0.05
41	5,688	0.05
42	5,404	0.05
43	5,133	0.05
44	4,877	0.05
45	4,633	0.05
46	4,401	0.05
47	4,181	0.05
48	3,972	0.05
49	3,774	0.05
50	3,585	0.05
51	3,406	0.05
52	3,235	0.05
53	3,074	0.05
54	2,920	0.05
55	2,774	0.05
56	2,635	0.05
57	2,503	0.05
58	2,378	0.05
59	2,259	0.05

引退後

X	lx	qx
60	2,146	0.01
61	2,125	0.02
62	2,082	0.03
63	2,020	0.04
64	1,939	0.05
65	1,842	0.06
66	1,732	0.07
67	1,610	0.08
68	1,482	0.09
69	1,348	0.10
70	1,213	0.11
71	1,080	0.12
72	950	0.13
73	827	0.14
74	711	0.15
75	604	0.16
76	508	0.17
77	421	0.18
78	346	0.19
79	280	0.20
80	224	0.00

定常人口

t年度

X	lx
30	10,000
31	9,500
32	9,025
33	8,574
34	8,145
35	7,738
36	7,351
37	6,983

t＋1年度

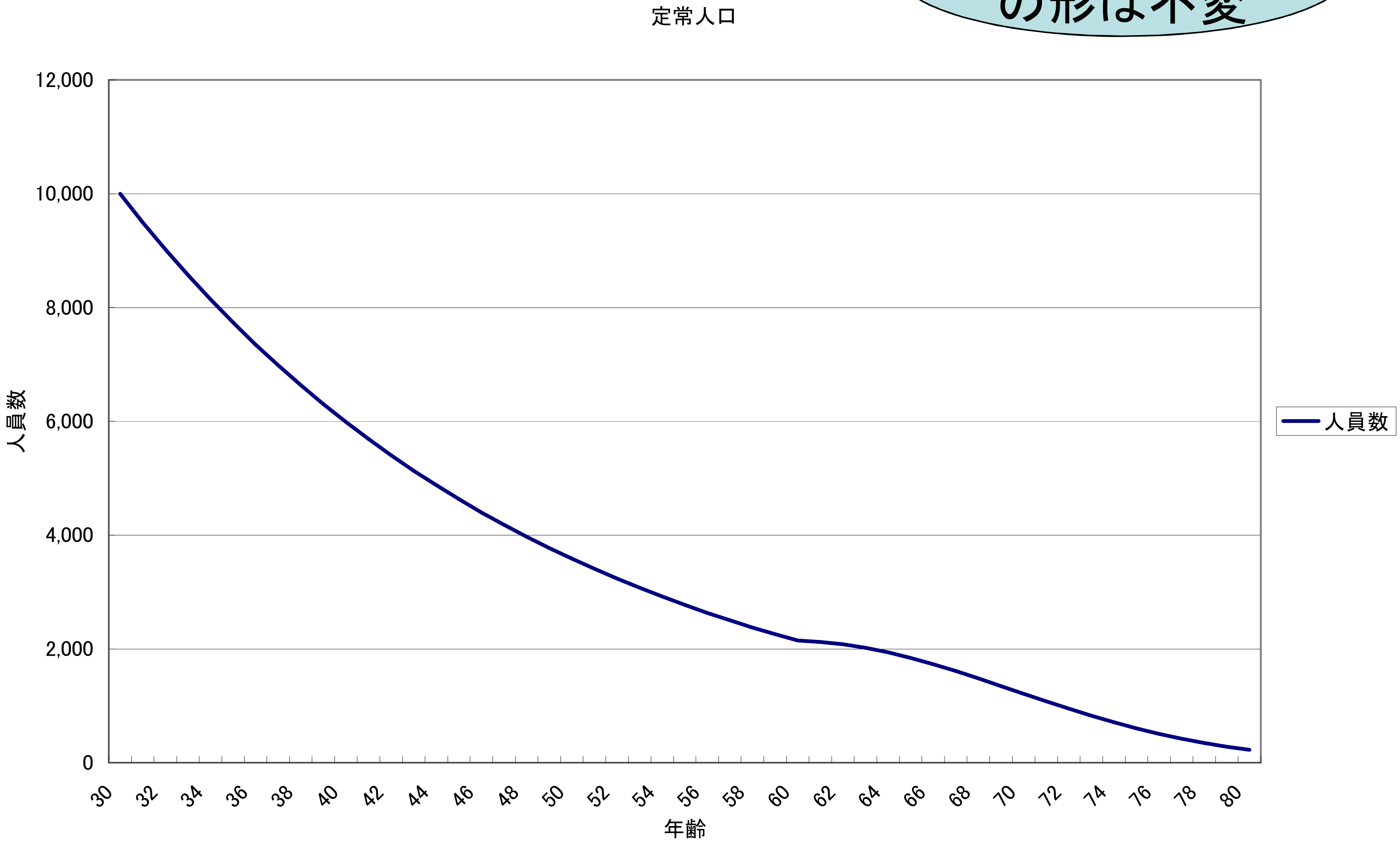
X	lx
30	10,000
31	9,500
32	9,025
33	8,574
34	8,145
35	7,738
36	7,351
37	6,983

t＋2年度

X	lx
30	10,000
31	9,500
32	9,025
33	8,574
34	8,145
35	7,738
36	7,351
37	6,983

定常人口

このグラフの形は不変



定常人口における諸記号

l_x 年齢x歳の人数

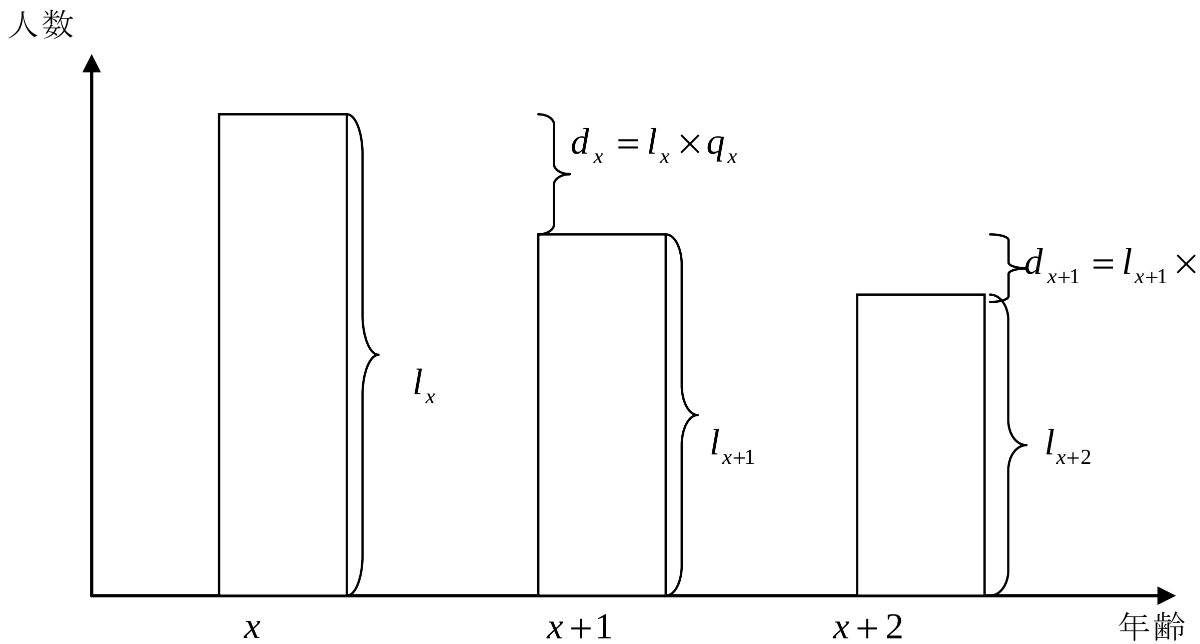
$d_x = l_x - l_{x+1}$ 年齢x歳の1年間の退職(死亡)数

$p_x = l_{x+1} / l_x$ 年齢x歳の残存率

$q_x = d_x / l_x$ 年齢x歳の退職(死亡)率

$$p_x + q_x = l_{x+1} / l_x + d_x / l_x = (l_{x+1} + d_x) / l_x$$
$$= (l_{x+1} + l_x - l_{x+1}) / l_x = 1$$

記号の図による説明



定常人口における諸記号

$$
{}_n p_x = (1-q_x)(1-q_{x+1})\cdots\cdot(1-q_{x+n-1}) = \prod_{k=1}^{n}(1-q_{x+k-1})
$$

$$
= \prod_{k=1}^{n}(1-q_{x+k-1}) = \prod_{k=1}^{n} p_{x+k-1} = \frac{l_{x+1}}{l_x}\cdot\frac{l_{x+2}}{l_{x+1}}\cdots\frac{l_{x+n}}{l_{x+n-1}} = \frac{l_{x+n}}{l_x}
$$

現在x歳の者がn年間残存する確率

$$
{}_n q_x = 1 - {}_n p_x
$$

現在x歳の者がn年間に退職（死亡）する確率

$$
{}_{n|} q_x = {}_n p_x \cdot q_{x+n}
$$

現在x歳の者が$n+1$年目に退職（死亡）する確率

演習

現在*x*歳の者が*n+1*年目に死亡する確率 ${}_{n|}q_x$

は、$\dfrac{d_{x+n}}{l_x}$ になることを示せ。またつぎの生命表で

${}_{20|}q_{30}$ を求めよ。

平均余命(平均残存年数)

平均余命(平均残存年数)　$\overset{\circ}{e}_x$

Revised 5/22

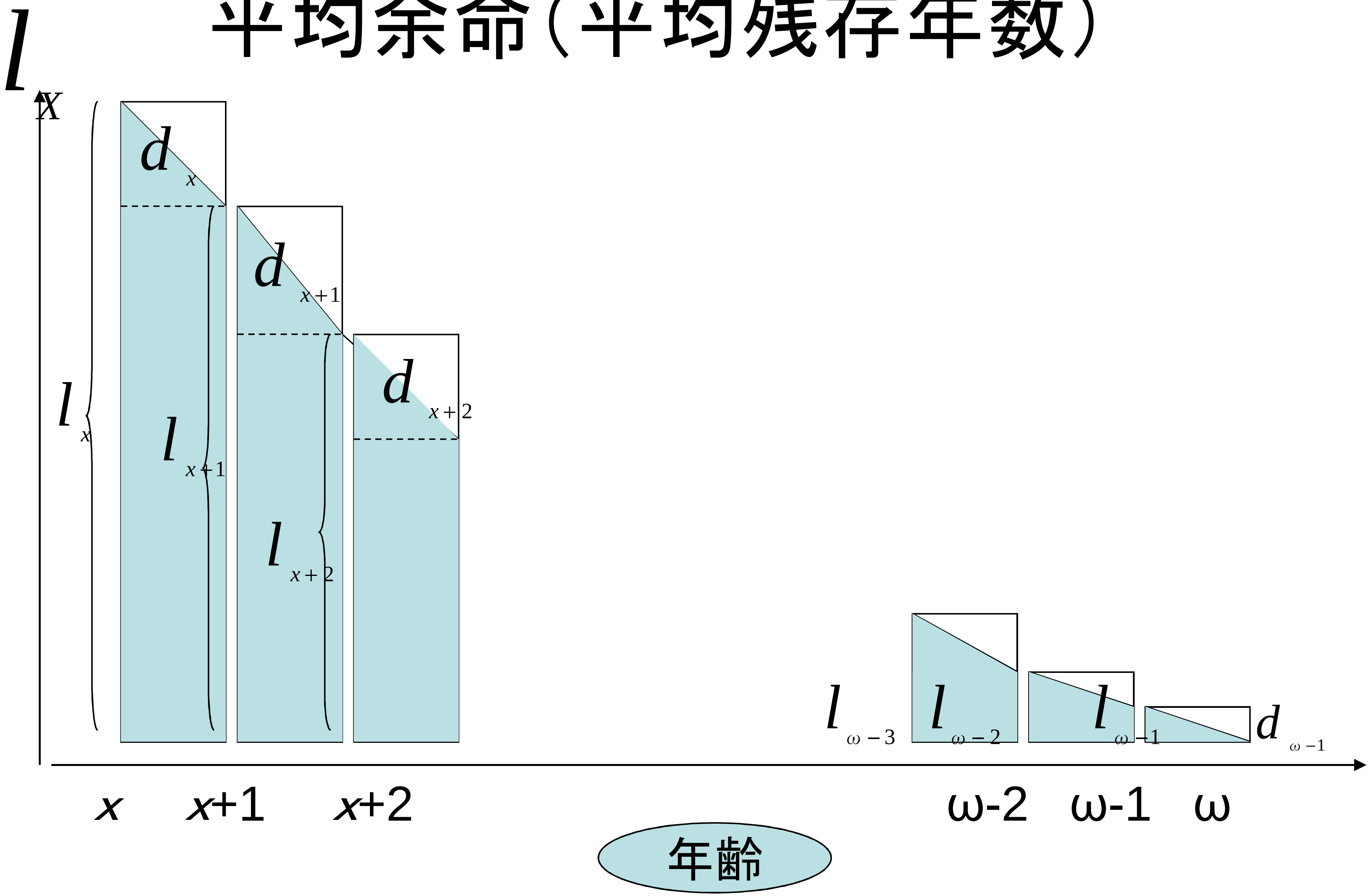
x歳の者l_x人の延べ生存期間

$$\frac{1}{2}d_x+(1+\frac{1}{2})d_{x+1}+(2+\frac{1}{2})d_{x+2}+\cdots\cdot+((\omega-x-1)+\frac{1}{2})d_{\omega-1}$$

$$=\frac{1}{2}(l_x-l_{x+1})+(1+\frac{1}{2})(l_{x+1}-l_{x+2})+\cdots\cdot+((\omega-x-1)+\frac{1}{2})(l_{\omega-1}-l_{\omega})$$

$$=\frac{1}{2}(l_x+l_{x+1})+\frac{1}{2}(l_{x+1}+l_{x+2})+\cdots+\frac{1}{2}l_{\omega-1}=\frac{1}{2}l_x+\sum_{t=1}^{\omega-x-1}l_{x+t}$$

平均余命(平均残存年数)



l_x
d_x
d_{x+1}
d_{x+2}
l_x
l_{x+1}
l_{x+2}
$l_{\omega-3}$
$l_{\omega-2}$
$l_{\omega-1}$
$d_{\omega-1}$
x x+1 x+2
ω-2 ω-1 ω
年齢

平均余命（平均残存年数）

平均余命　$\mathring{e}_x$

$\frac{1}{2}l_x + \sum_{t=1}^{\omega-x-1} l_{x+t}$　を　l_x　で除して

$$\mathring{e}_x = \left(\frac{1}{2}l_x + \sum_{t=1}^{\omega-x-1} l_{x+t} \right) \Big/ l_x = \frac{1}{2} + \frac{1}{l_x} \sum_{t=1}^{\omega-x-1} l_{x+1}$$

定常人口とは

生命表の棒グラフが、経過年数によらず一定になる状態

一定の形/面積を保った、人口ピラミッドが実現していれば、l_x の1年後の姿は l_{x+1}

$$\frac{1}{2} l_x + \sum_{t=1}^{\omega - x - 1} l_{x+t}$$

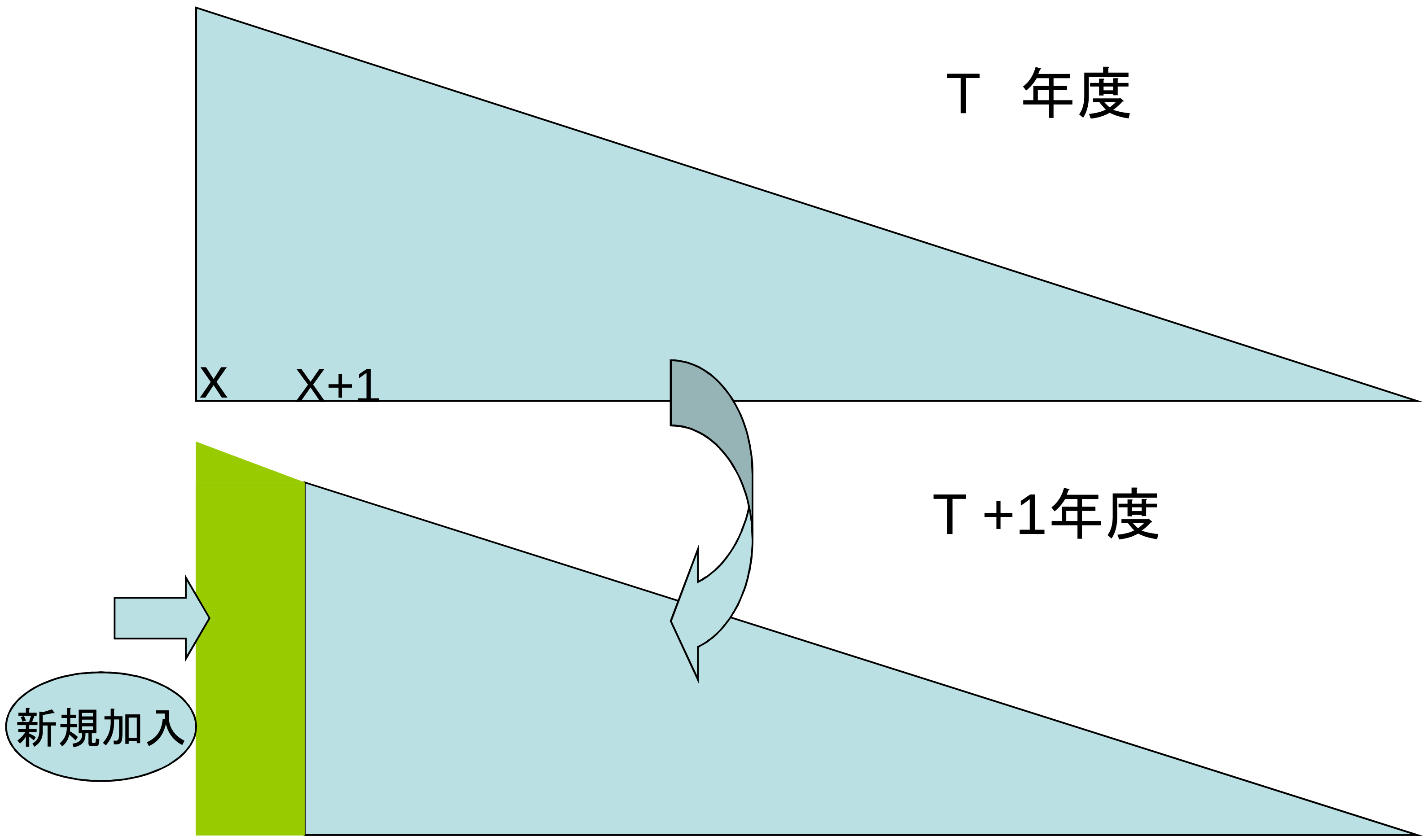
は、延べ生存年数であると同時にx歳以降の総人数を表す.

Xをゼロとすれば、この全体数を一定に保つために、毎年.

l_0 人ずつ出生する必要がある..

すなわち全体の人数に対して $\overset{\circ}{e}_0$ の逆数倍出生することが必要

定常人口とは



金利計算・単利・複利

年金数理の大前提と金利計算

- 企業年金制度では（賦課方式の場合を除き）積立金が形成され、そこから得られる運用収益を見込んで財政計画が立てられる
- したがって、年金数理の計算では時間の経過に対応して利息が付利されることが前提となる
- 単位元本に対して1年間に生ずる利息を「年利率」（記号：i ）という

単利と複利

【単利計算】利息を元本に繰り入れない（再投資を行わない）場合

$$P_n = P_0\left(1 + ni\right)$$

【複利計算】毎年期初に利息を元本に繰り入れる場合

$$P_n = P_0\left(1 + i\right)^n$$

等価の原理・現価・終価

等価の原理とは

- たとえば、今10万円手にするのと、5年後に10万円手にするのと、どちらがうれしいか。なぜ？
- それでは、今10万円手にするのと、５年後に１２万円手にするのと、どちらがうれしいか。なぜ？
- 今の10万円と、5年後のいくらが、同じ価値なのか？それを決定する要素は？

→ 「終価」と「現価」の概念の導入が必要

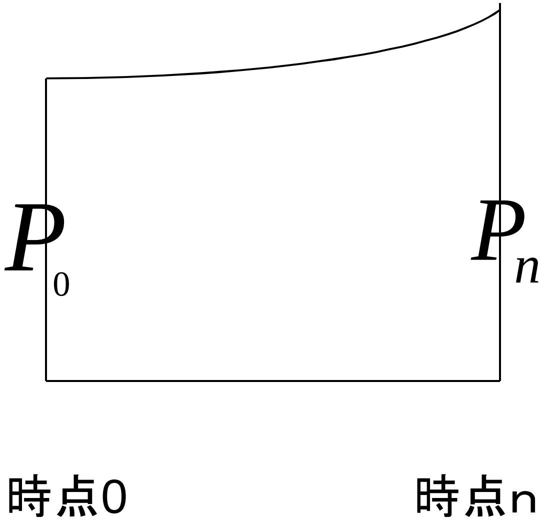
等価の原理とは

資産は（一定の年利率で複利で資産運用されていることを前提）

終価　：　ある基準時点(n)より前の時点(0)の金額と等価な基準時点(n)の金額

現価　：　ある基準時点(0)より後の時点(n)の金額と等価な基準時点(0)の金額

等価の原理　：　時点0のP_0と時点nのP_0は等価



P_nはP_0の終価、P_0はP_nの現価

終価率・現価率　：　利息と期間で決定

$$P_n = P_0 (1+i)^n$$

$$P_0 = P_n \left(\frac{1}{1+i} \right)^n = P_n v^n$$

ここに　$v = \dfrac{1}{1+i}$　を割引率もしくは（複利）現価率という

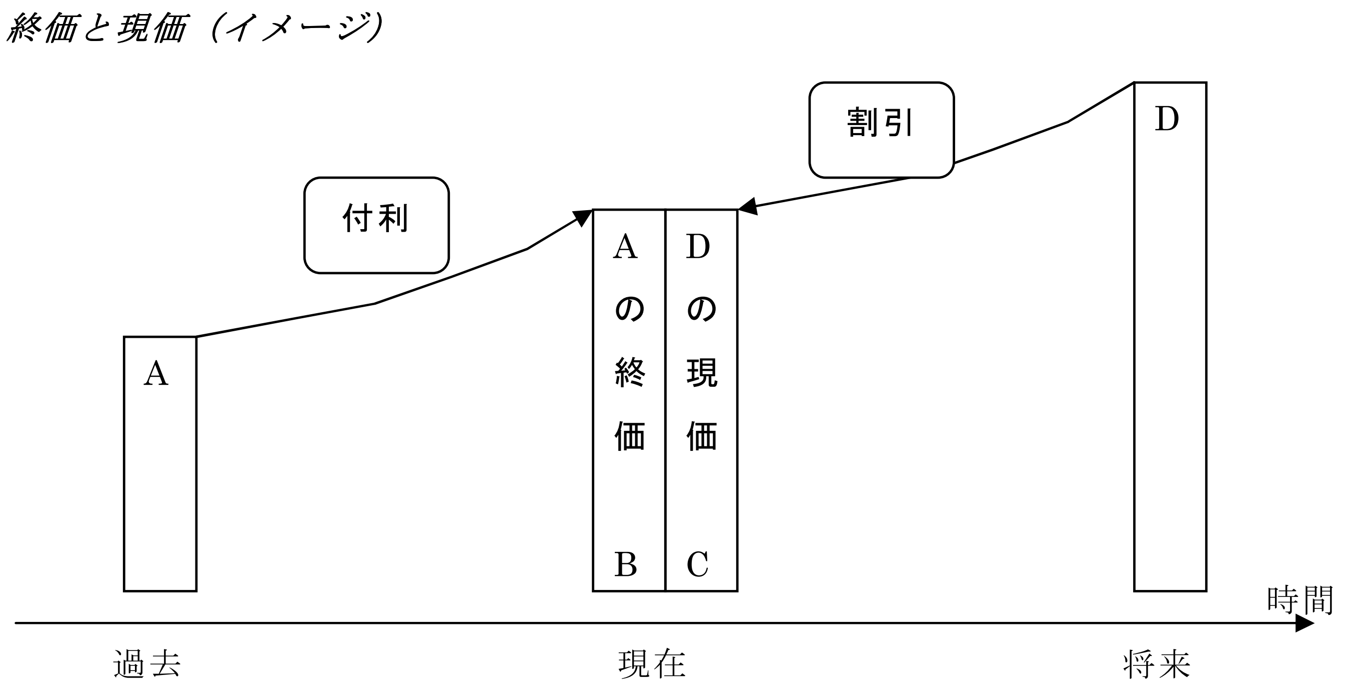
等価の原理・終価・現価の実例

- 終価
  - 2010年4月1日の金額：100,000円
  - 利率2%で運用
  - 2015年4月1日における「 2010年4月1日の100,000円」に対する終価は？（演習）<u>以後、特段の断りない限り、複利で考える</u>。

- 現価
  - 2015年4月1日の金額：110,408円
  - 利率2%で運用
  - 2010年4月1日における「 2015年4月1日の110,408円」に対する現価は？（演習）

- 2010年4月1日の　　　　　　円と、2015年4月1日の　　　　　　円は等価

等価の原理は「相対的」「組み合わせ可能」



B と A は等価、C と D も等価、従って B=C なら A と D も等価

質問（講義の内容およびアクチュアリーの件でもOK) は

つぎのメールアドレスおよび電話へ

株式会社IICパートナーズ

渡部　善平

z.watanabe@iicp.co.jp

電話　：　03-5501-3795（直通）