連続時間系フィルタの構成

- ◆フィルタの概要
- ◆状態変数型構成法
- ◆縦続接続型構成法
- ◆LCシミュレーション
- ◆周波数特性の自動調整

フィルタの概要

$\boxed{\text{入力電圧：} v_{in}(t) \rightarrow V_{in}(s)}$ $\boxed{\text{出力電圧：} v_{out}(t) \rightarrow V_{out}(s)}$

$$\boxed{\text{伝達関数：} T(s) = \frac{V_{out}(s)}{V_{in}(s)}}$$

複素正弦波$V_{in}(s)\big|_{s=j\omega} = Ke^{j(\omega t+\phi)}$とすると，$V_{out}(s)\big|_{s=j\omega}$は

$$\boxed{V_{out}(s)\big|_{s=j\omega} = T(j\omega)Ke^{j(\omega t+\phi)}}$$

$$V_{out}(s)\big|_{s=j\omega} = T(j\omega) K e^{j(\omega t + \phi)}$$

$$\left| V_{out}(s)\big|_{s=j\omega} \right| = |T(j\omega)| K$$

$$\arg V_{out}(s)\big|_{s=j\omega} = \arg T(j\omega) + \phi$$

$$\boxed{A(\omega) = |T(j\omega)|\text{: 振幅特性}}$$

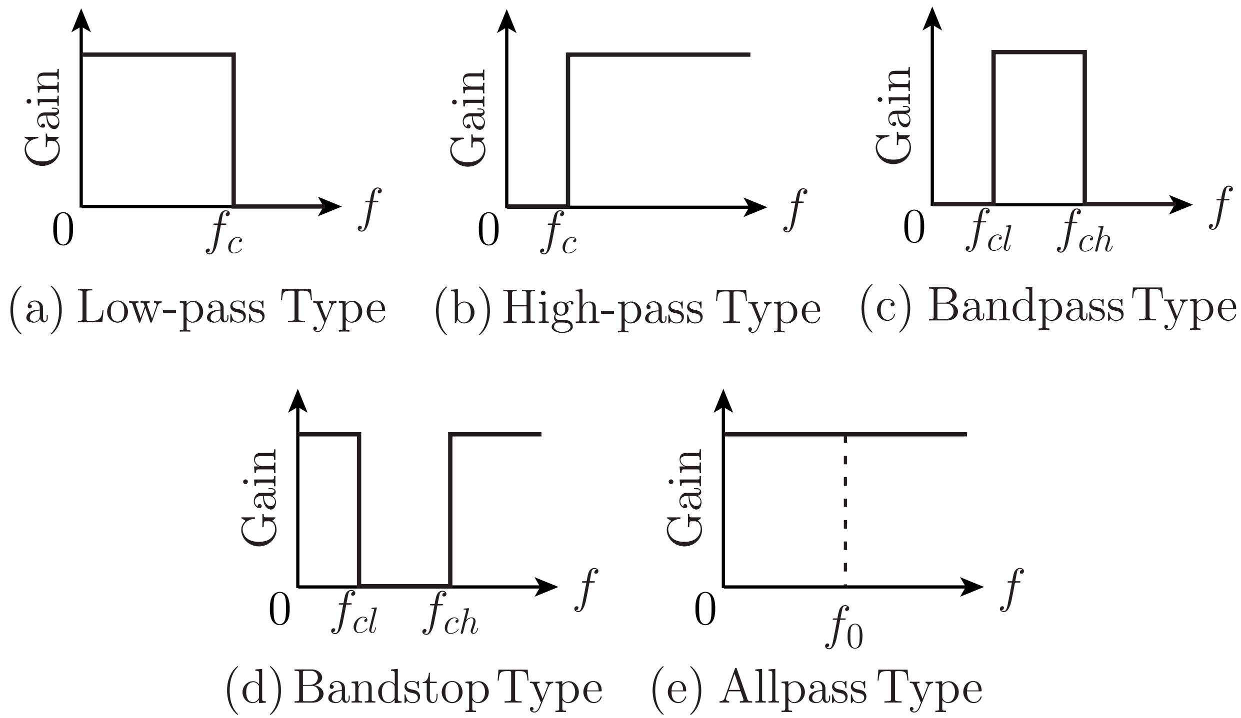
$$\boxed{\theta(\omega) = \arg T(j\omega)\text{: 位相特性}}$$

フィルタとは

入力信号の周波数に応じて出力信号の振幅や位相を変える回路

代表的なフィルタ

- 低域通過フィルタ
- 帯域通過フィルタ
- 高域通過フィルタ
- 帯域除去フィルタ
- 全域通過フィルタ



f_c: 遮断周波数

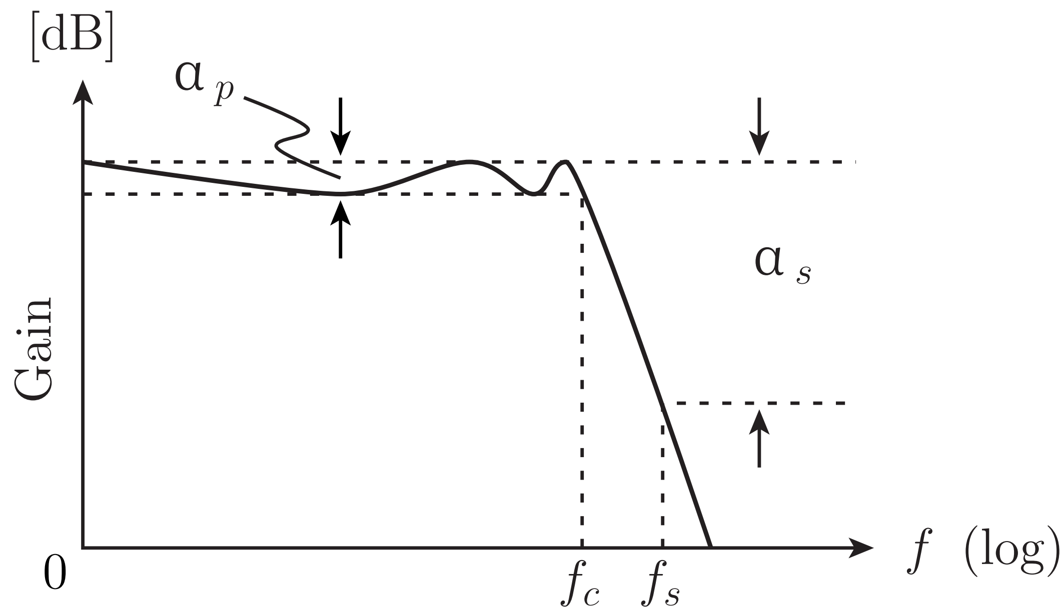
f_{cl}: 低域遮断周波数

f_{ch}: 高域遮断周波数

通過域または通過帯域

遮断域

実際のフィルタ特性



α_p ：通過域内許容偏差

α_s ：最小減衰量

f_s ：遮断域端周波数

f_c〜f_s:過渡域

フィルタの評価尺度

1. 歩留まり
2. 占有チップ面積
3. 消費電力
4. 電源電圧
5. ダイナミックレンジ (最大信号振幅, 雑音, 歪み)
6. 最大信号処理周波数 (応答速度)
7. 電源電圧変動の除去率
8. その他

素子感度

F　目的関数（伝達関数）

x　素子値

$$\frac{\Delta F}{F} = S\frac{\Delta x}{x}$$

$$S = \frac{\Delta F}{F}\cdot\frac{x}{\Delta x} = \frac{x}{F}\cdot\frac{\Delta F}{\Delta x}$$

$$S_x^F = \lim_{\Delta x \to 0} S = \frac{x}{F}\cdot\frac{\partial F}{\partial x}$$

相対素子感度

$\left|S_x^F\right|$ ：小 → 高い歩留まり

状態変数型構成法

$$T_L(s) = \frac{Ka_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n} = \frac{V_{out}}{V_{in}}$$

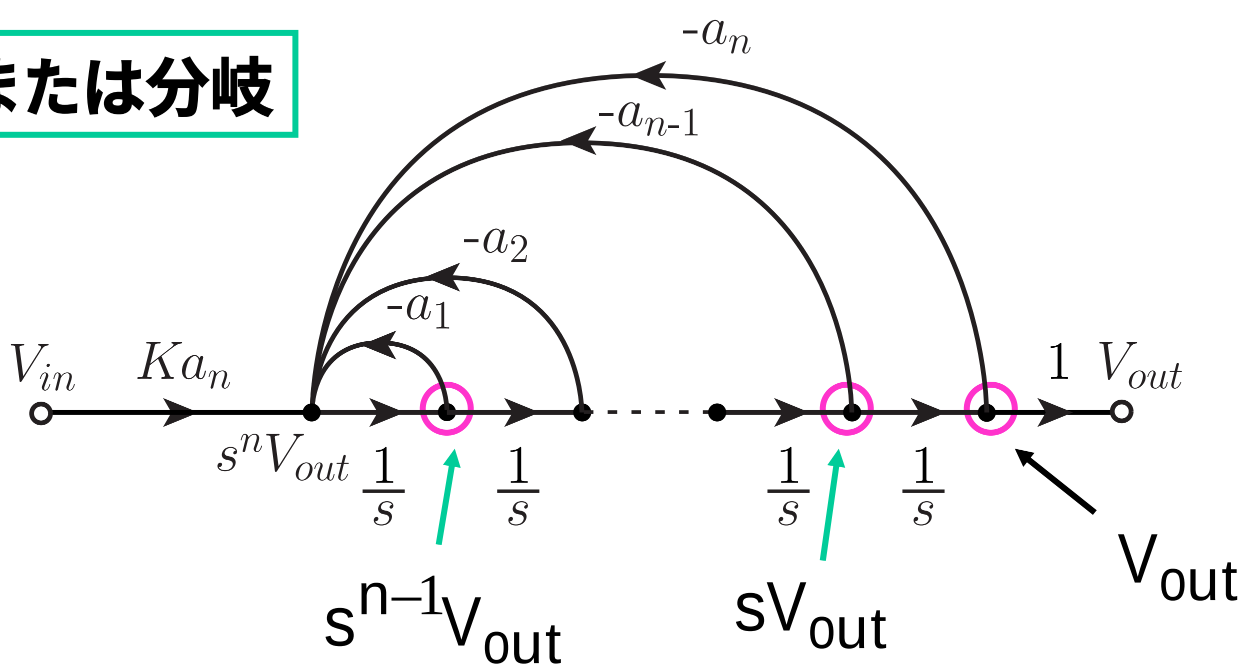
$$Ka_n V_{in} = (s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n)V_{out}$$

$$s^n V_{out} = Ka_n V_{in} - (a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n)V_{out}$$

$$s^n V_{out} = K a_n V_{in} - (a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n) V_{out}$$

黒丸：加算または分岐

矢印：乗算

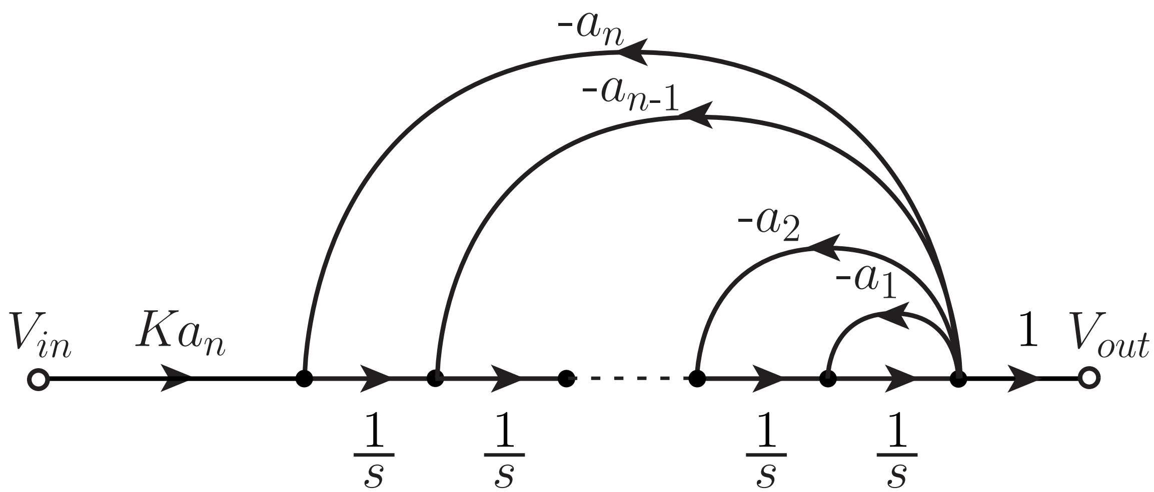


シグナルフローグラフ

別解

$$s^n V_{out} = K a_n V_{in} - (a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n) V_{out}$$

$$V_{out} = K a_n s^{-n} V_{in} - (a_1 s^{-1} + a_2 s^{-2} \cdots + a_{n-1} s^{-n+1} + a_n s^{-n}) V_{out}$$

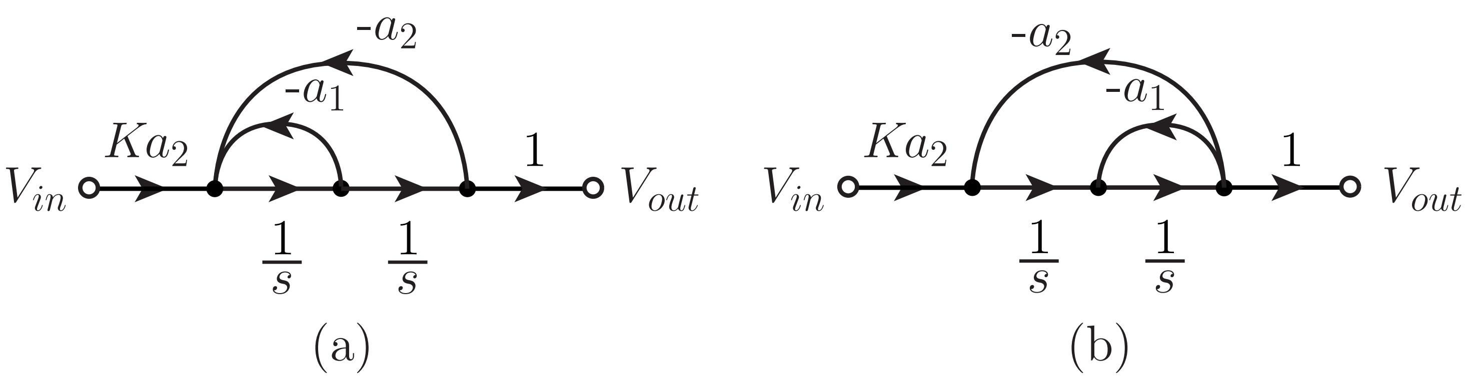


例題

$$\boxed{T_L(s) = \frac{K a_2}{s^2 + a_1 s + a_2} = \frac{V_{out}}{V_{in}}}$$

$$s^2 V_{out} = K a_2 V_{in} - (a_1 s + a_2) V_{out}$$

$$V_{out} = K a_2 s^{-2} V_{in} - (a_1 s^{-1} + a_2 s^{-2}) V_{out}$$



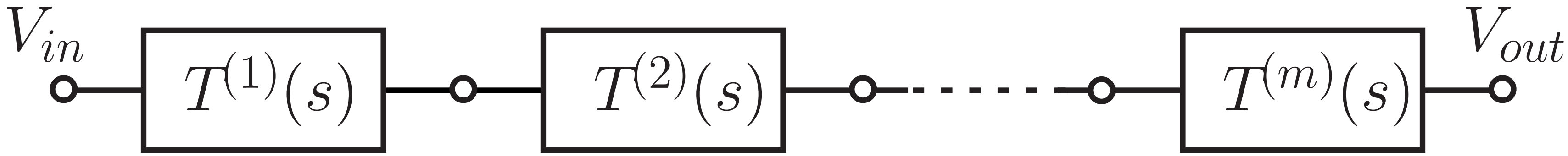
状態変数型構成法の問題点

伝達関数の係数の変化→特性の大幅な偏差

素子値の変化が伝達関数の係数の変化に対応

素子感度の高い構成

縦続接続型構成法



$$T(s) = T^{(1)}(s)\,T^{(2)}(s)\cdots T^{(m)}(s)$$

$T^{(i)}(s)$ ：1次または2次の伝達関数

1次の伝達関数 → 受動RC回路

2次の伝達関数 → 2次区間回路

2次区間回路の伝達関数の表し方

$$T_{second}(s)=\frac{N(s)}{s^2+\frac{\omega_0}{Q}s+\omega_0^2}$$

ω_0: 遮断角周波数(中心角周波数)

Q：クォリティファクタ(単にQ)

(Q≥0.5である特性は受動RC回路では実現できない)

$N(s)=K\omega_0^2$ ：低域通過フィルタ

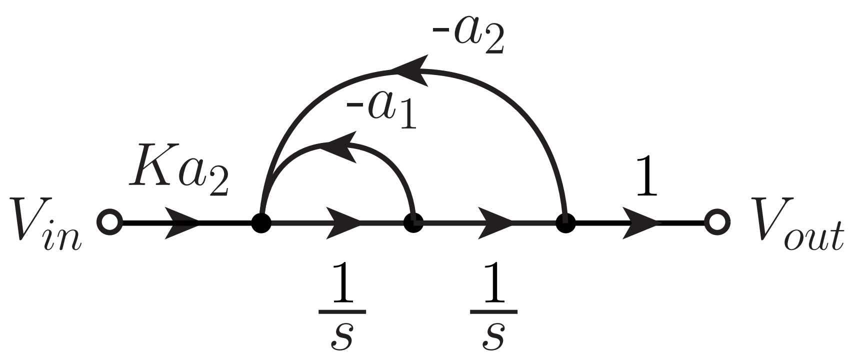
$N(s)=K\frac{\omega_0}{Q}s$ ：帯域通過フィルタ

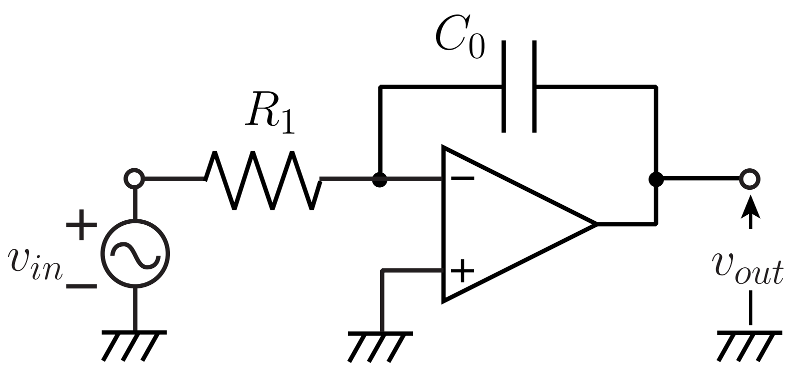
$N(s)=Ks^2$ ：高域通過フィルタ

$N(s)=K(s^2+\omega_0^2)$ ：帯域除去フィルタ

$N(s)=K(s^2-\frac{\omega_0}{Q}s+\omega_0^2)$ ：全域通過フィルタ

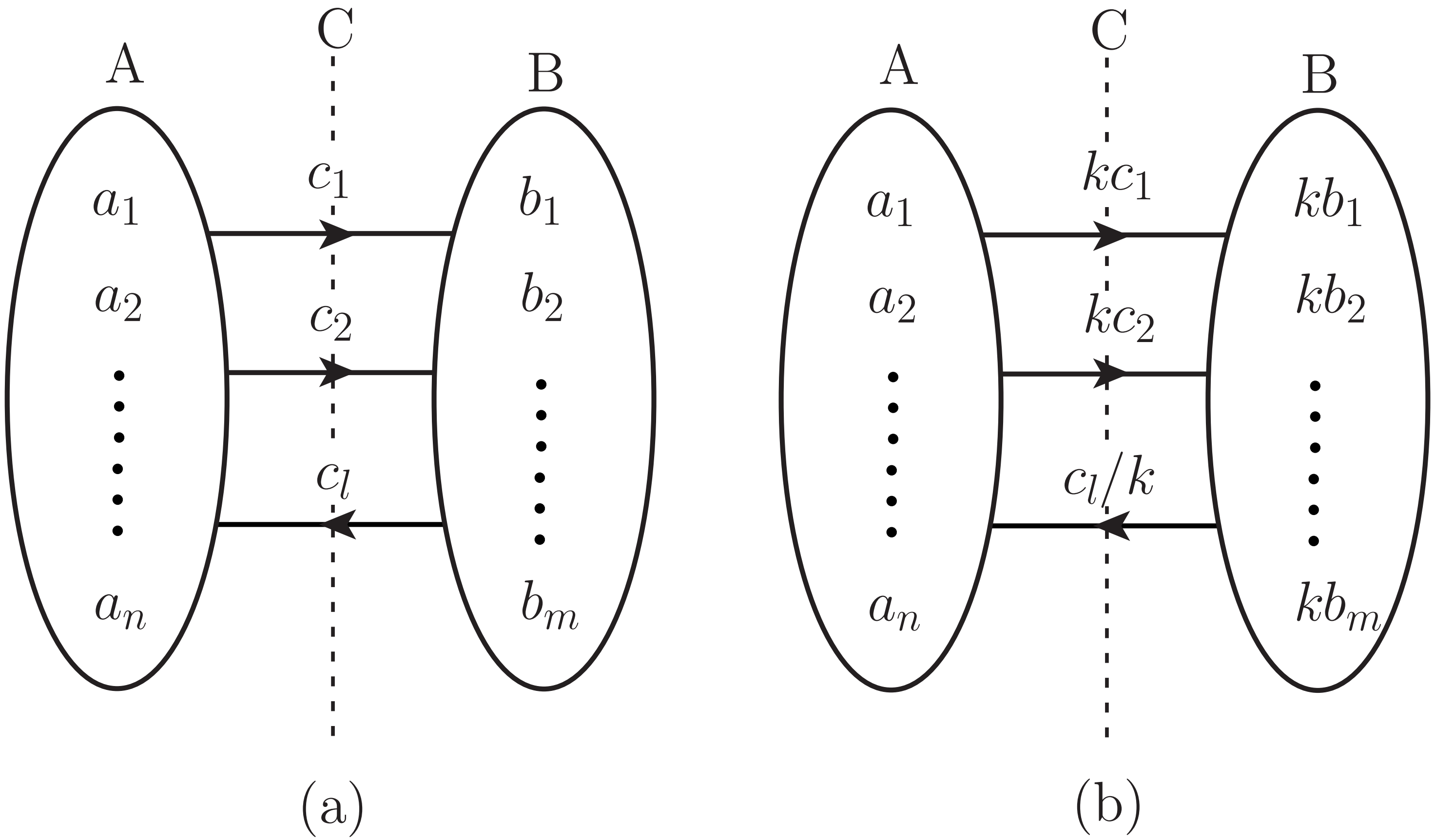
Tow-Thomasバイカッドフィルタ

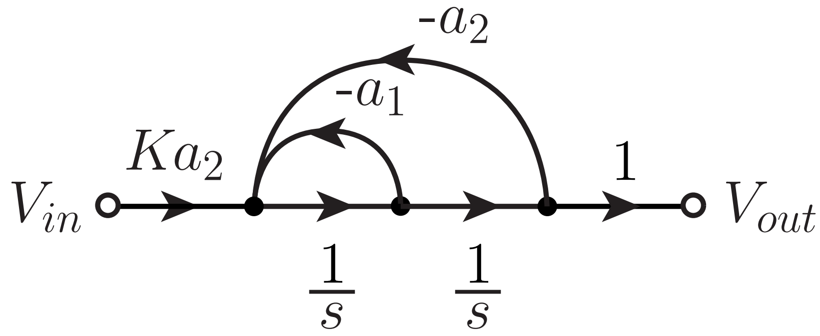




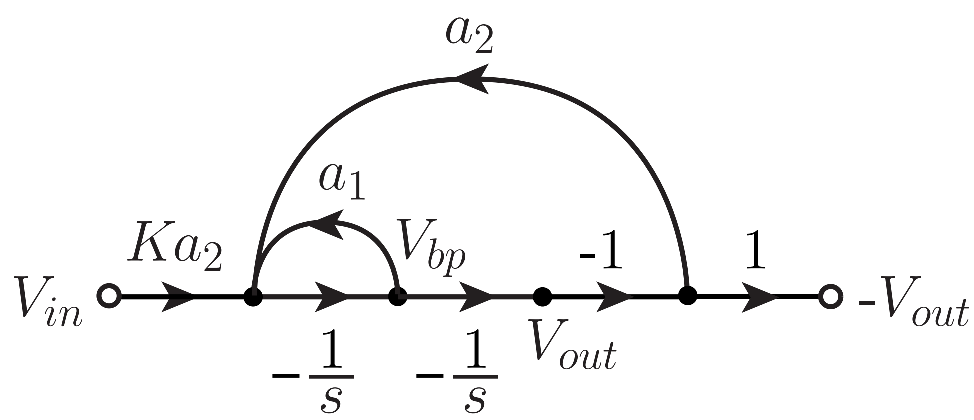
$$\boxed{\frac{v_{out}}{v_{in}} = \frac{-1}{sC_0R_1}}$$

カットセット・スケーリング

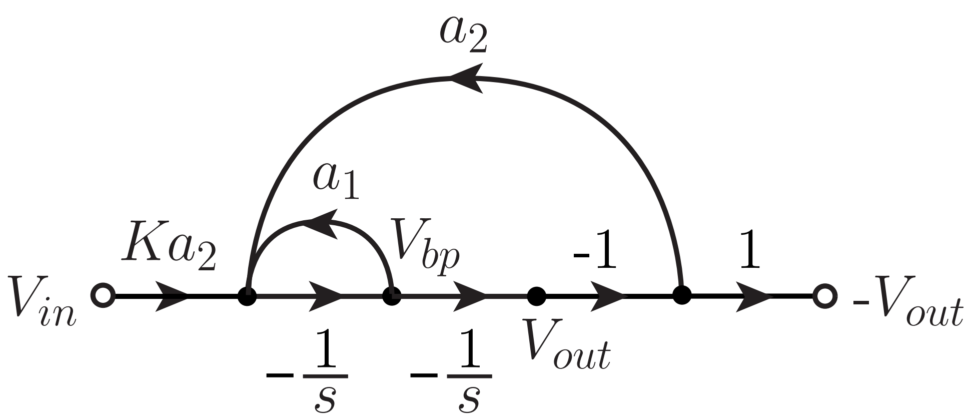


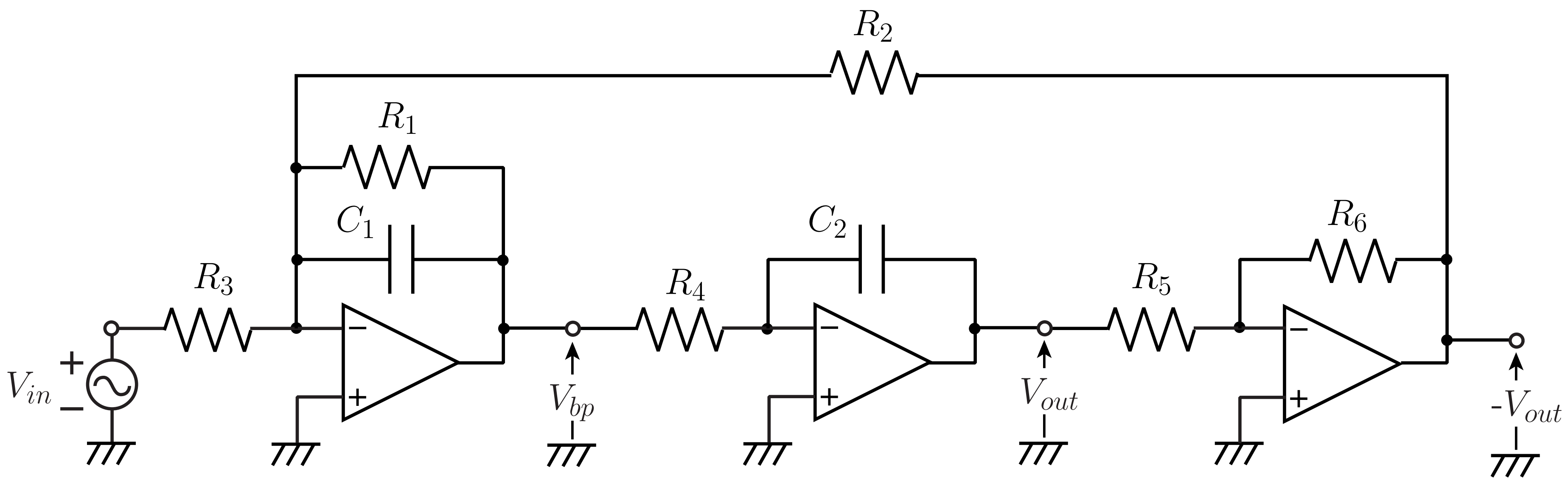


-a_2
-a_1
Ka_2
1
V_{in}
V_{out}
$\frac{1}{s}$
$\frac{1}{s}$

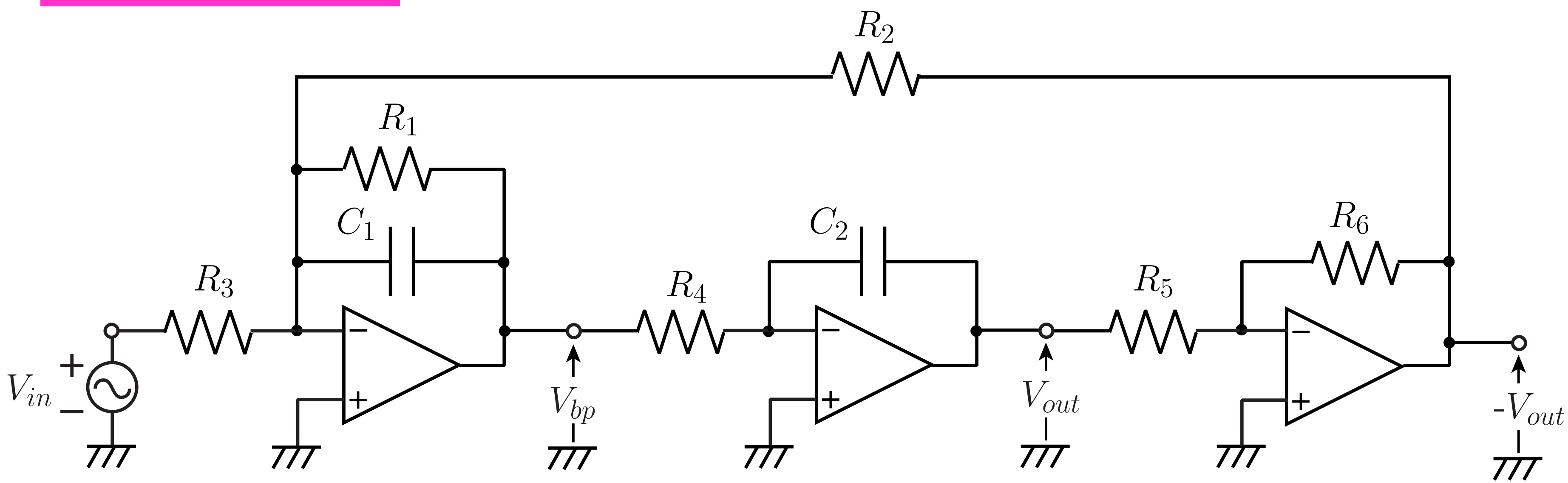


a_2
a_1
Ka_2
V_{bp}
-1
1
V_{in}
-V_{out}
$-\frac{1}{s}$
$-\frac{1}{s}$
V_{out}


a_2
a_1
Ka_2
V_{bp}
-1
1
V_{in}
-V_{out}
$-\frac{1}{s}$
$-\frac{1}{s}$
V_{out}


R_2
R_1
C_1
C_2
R_6
R_3
R_4
R_5
V_{in}
V_{bp}
V_{out}
-V_{out}

素子値の決定



$$T_{biquad}(s)=\frac{\frac{1}{C_1C_2R_3R_4}}{s^2+\frac{1}{C_1R_1}s+\frac{R_6}{C_1C_2R_2R_4R_5}}$$

$$\boxed{\omega_0=\sqrt{\frac{R_6}{C_1C_2R_2R_4R_5}}}$$

$$\boxed{Q=R_1\sqrt{\frac{C_1R_6}{C_2R_2R_4R_5}}}$$

$$\boxed{K=\frac{R_2R_5}{R_3R_6}}$$

例題

遮断周波数1kHzの2次振幅最大平坦特性

$$T(s)=\frac{K(2\pi\times1000)^2}{s^2+2\sqrt{2}\pi\times1000s+(2\pi\times1000)^2}$$

$$\omega_0=\sqrt{\frac{R_6}{C_1C_2R_2R_4R_5}} \qquad Q=R_1\sqrt{\frac{C_1R_6}{C_2R_2R_4R_5}} \qquad K=\frac{R_2R_5}{R_3R_6}$$

$$\boxed{R_2=R_3=R_4=R_5=R_6} \qquad \boxed{C_1=C_2}$$

$$\omega_0=\frac{1}{C_1R_2}$$

$$Q=\frac{R_1}{R_2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

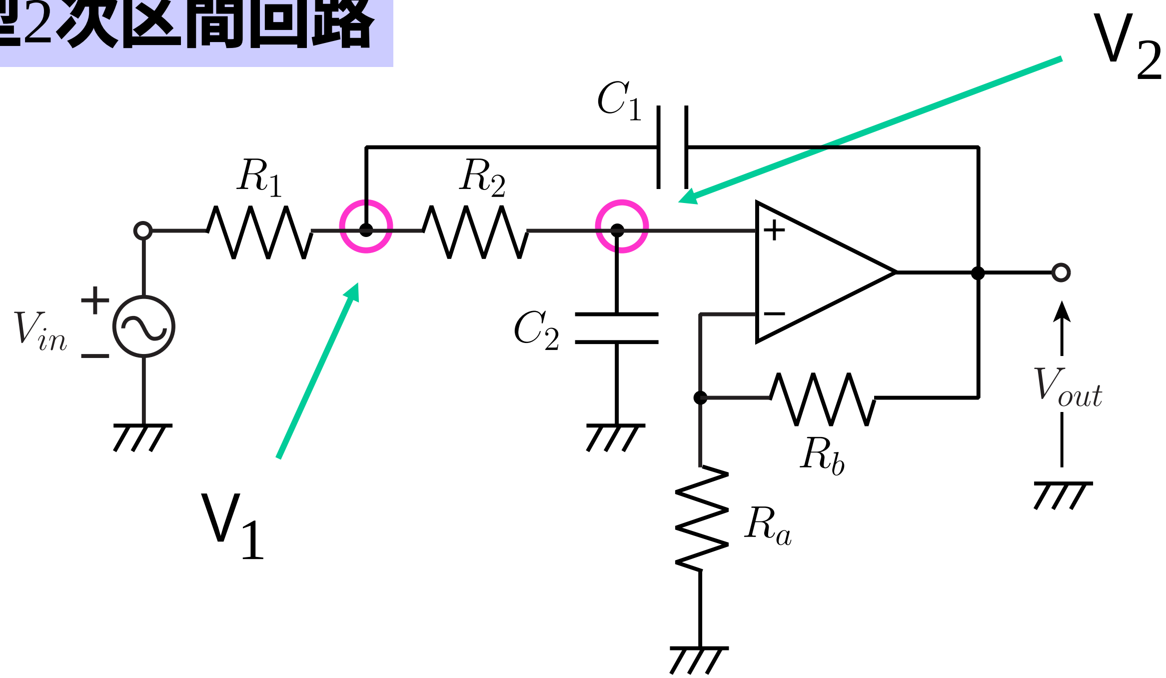
$$R_2=R_3=R_4=R_5=R_6=10.0\text{k}\Omega$$

$$C_1=C_2=15.9\text{nF}$$

$$R_1=\frac{R_2}{\sqrt{2}}=7.07\text{k}\Omega$$

$$K=1.00$$

正帰還型2次区間回路



$$G_1(V_1-V_{in})+sC_1(V_1-AV_2)+G_2(V_1-V_2)=0$$

$$G_2(V_2-V_1)+sC_2V_2=0 \qquad A=1+\frac{R_b}{R_a}$$

$$\boxed{\begin{bmatrix} G_1+sC_1+G_2 & -sC_1A-G_2 \\ -G_2 & G_2+sC_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} G_1V_{in} \\ 0 \end{bmatrix}}$$

Cramerの公式

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

$$x_i = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,i-1} & y_1 & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,i-1} & y_2 & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,i-1} & y_n & a_{n,i+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}$$

$$\boxed{\begin{bmatrix} G_1+sC_1+G_2 & -sC_1A-G_2 \\ -G_2 & G_2+sC_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} G_1V_{in} \\ 0 \end{bmatrix}}$$

$$V_2=\frac{\begin{vmatrix} G_1+sC_1+G_2 & G_1V_{in} \\ -G_2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} G_1+sC_1+G_2 & -sC_1A-G_2 \\ -G_2 & G_2+sC_2 \end{vmatrix}}$$

$$=\frac{-(-G_2)(G_1V_{in})}{(G_1+sC_1+G_2)(G_2+sC_2)-(sC_1A+G_2)G_2}$$

$$\boxed{V_{out}=AV_2=\frac{AG_1G_2V_{in}}{s^2C_1C_2+sC_1G_2+sC_2(G_1+G_2)-sC_1G_2A+G_1G_2}}$$

$$T_{sk}(s)=\frac{V_{out}}{V_{in}}=\frac{AG_1G_2}{s^2C_1C_2+sC_1G_2+sC_2(G_1+G_2)-sC_1G_2A+G_1G_2}$$

$$=\frac{\frac{A}{R_1R_2}}{s^2C_1C_2+s\frac{C_1(1-A)}{R_2}+sC_2\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)+\frac{1}{R_1R_2}}$$

$$\boxed{T_{sk}(s)=\frac{\frac{A}{C_1C_2R_1R_2}}{s^2+\frac{C_1R_1(1-A)+C_2R_1+C_2R_2}{C_1C_2R_1R_2}s+\frac{1}{C_1C_2R_1R_2}}}$$

例題　遮断周波数1kHzの2次振幅最大平坦特性

$$T(s)=\frac{K(2\pi\times1000)^2}{s^2+2\sqrt{2}\pi\times1000s+(2\pi\times1000)^2}$$

$$\omega_0=\sqrt{\frac{1}{C_1C_2R_1R_2}} \qquad Q=\frac{\sqrt{C_1C_2R_1R_2}}{C_1R_1(1-A)+C_2R_1+C_2R_2} \qquad K=A$$

(1)　$R_1=R_2=R$　　$C_1=C_2=C$

$$\omega_0=\frac{1}{CR} \qquad Q=\frac{1}{3-A}$$

(2)　$R_1=R_2=R$　　$A=1$

$$\omega_0=\frac{1}{\sqrt{C_1C_2}R} \qquad Q=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{C_1}{C_2}}$$

(1) $C_1 = C_2 = 15.9\text{nF}$

$$R_1 = R_2 = \frac{1}{\omega_0 C} = 10.0\text{k}\Omega$$

$$A = 3 - \frac{1}{Q} = 3 - \sqrt{2} \qquad R_a = 10.0\text{k}\Omega \qquad R_b = 5.86\text{k}\Omega$$

(2) $R_1 = R_2 = 10.0\text{k}\Omega$ $\quad A = 1$ $\quad R_a = \infty$ $\quad R_b = 0\text{k}\Omega$

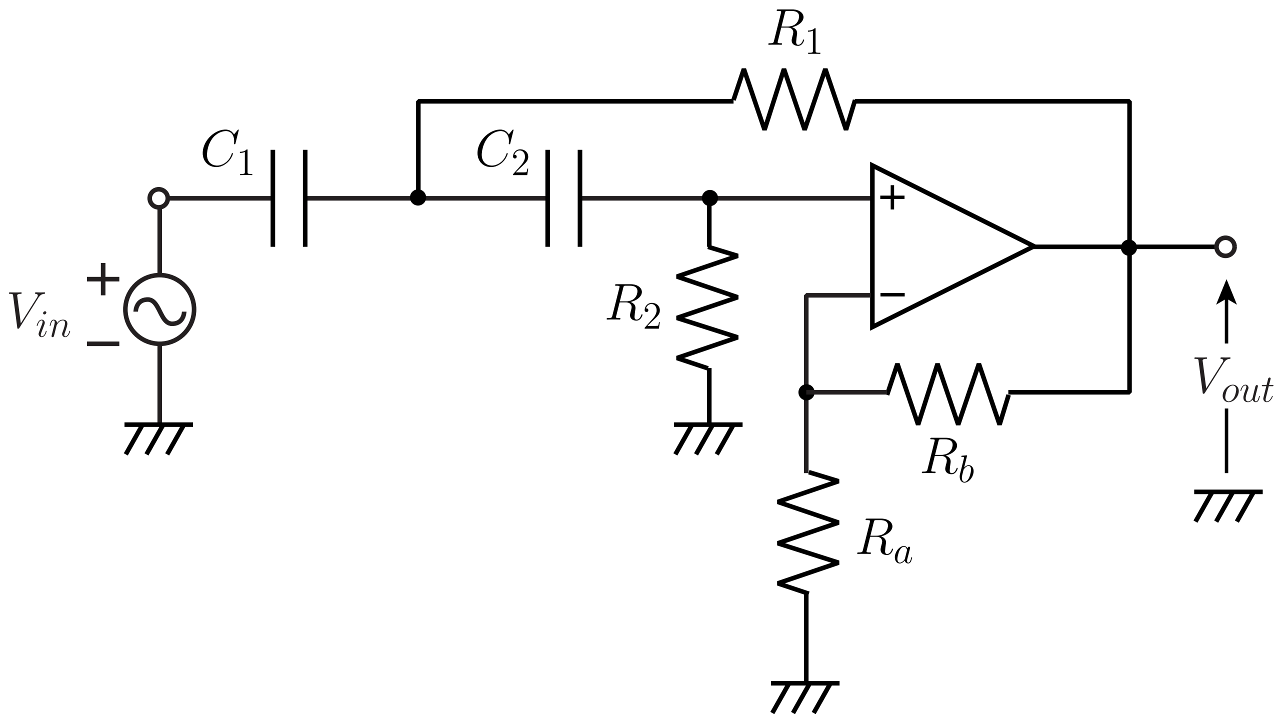
$$C_1 = \frac{2Q}{\omega_0 R} = \sqrt{2} \times 15.9\text{nF} = 22.5\text{nF}$$

$$C_2 = \frac{1}{2Q\omega_0 R} = \frac{15.9\text{nF}}{\sqrt{2}} = 11.2\text{nF}$$

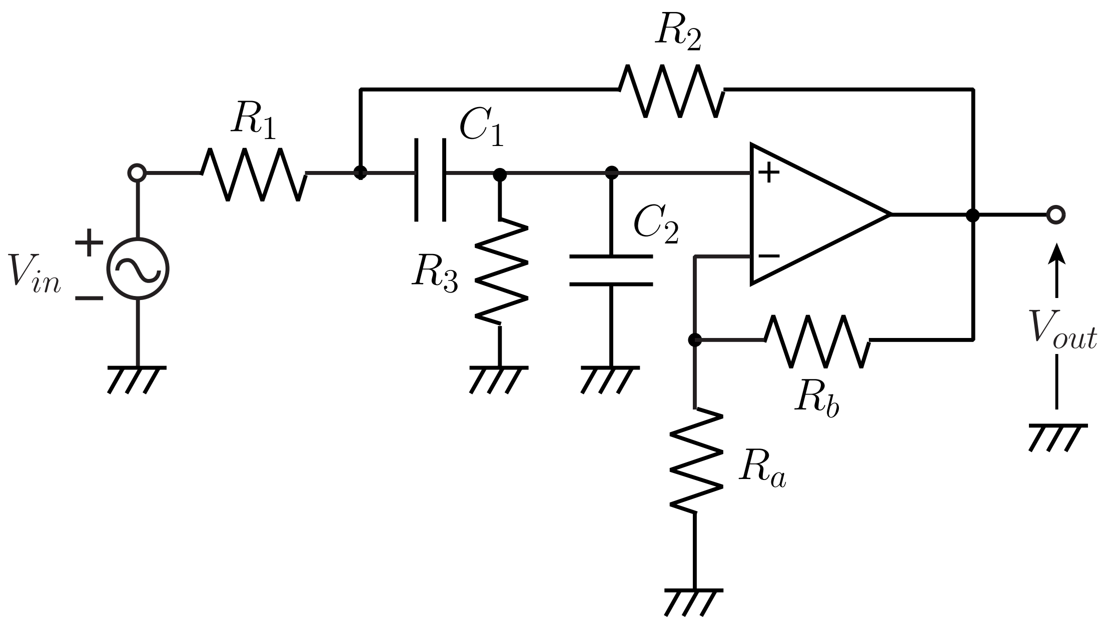
高域通過フィルタの構成

R_1，R_2を容量に

C_1，C_2を抵抗に



帯域通過フィルタの構成



$$\begin{bmatrix} G_1+sC_1+G_2 & -sC_1-G_2A \\ -sC_1 & sC_1+G_3+sC_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1V_{in} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} G_1+sC_1+G_2 & -sC_1-G_2A \\ -sC_1 & sC_1+G_3+sC_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} G_1V_{in} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$V_2=\frac{\begin{vmatrix} G_1+sC_1+G_2 & G_1V_{in} \\ -sC_1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} G_1+sC_1+G_2 & -sC_1-G_2A \\ -sC_1 & sC_1+G_3+sC_2 \end{vmatrix}}$$

$$=\frac{-(-sC_1)(G_1V_{in})}{(G_1+sC_1+G_2)(sC_1+G_3+sC_2)-(sC_1+G_2A)sC_1}$$

$$=\frac{sC_1G_1V_{in}}{s^2C_1C_2+sC_1(G_1+G_2+G_3-G_2A)+sC_2(G_1+G_2)+(G_1+G_2)G_3}$$

$$V_2 = \frac{sC_1G_1V_{in}}{s^2C_1C_2 + sC_1(G_1+G_2+G_3-G_2A) + sC_2(G_1+G_2) + (G_1+G_2)G_3}$$

$$\boxed{T_{sk}(s) = \frac{\dfrac{A}{C_2R_1}s}{s^2 + s\left\{\dfrac{1}{C_1}\left(\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}\right) + \dfrac{1}{C_2}\left(\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_3}\right) + \dfrac{1-A}{C_2R_2}\right\} + \dfrac{1}{C_1C_2R_3}\left(\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}\right)}}$$

例題

$$R_1=R_2=R_3=R \qquad C_1=C_2=C$$

$$R=\frac{\sqrt{2}}{\omega_0 C} \qquad A=5-\frac{\sqrt{2}}{Q} \qquad K=\frac{5}{\sqrt{2}}Q-1$$

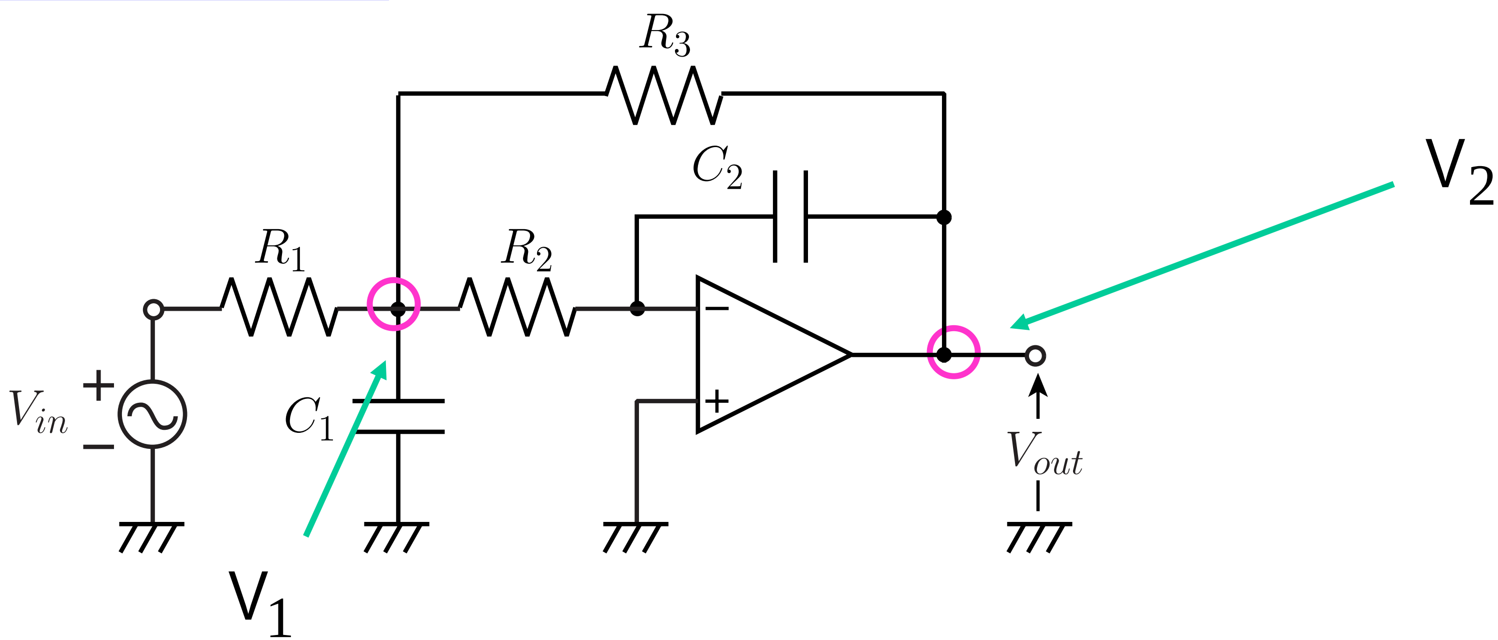
$$\boxed{T(s)=\frac{K(2\sqrt{2}\pi\times1000s)}{s^2+2\sqrt{2}\pi\times1000s+(2\pi\times1000)^2}}$$

$C=15.9nF$とすると

$R=14.1k\Omega$

$A=3 \qquad R_a=14.1k\Omega \qquad R_b=28.2k\Omega$

負帰還型2次区間回路



$$G_1(V_1-V_{in})+sC_1V_1+G_2V_1+G_3(V_1-V_2)=0$$

$$G_2(0-V_1)+sC_2(0-V_2)=0$$

$$\boxed{\begin{bmatrix} G_1+sC_1+G_2+G_3 & -G_3 \\ -G_2 & -sC_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} G_1V_{in} \\ 0 \end{bmatrix}}$$

$$\boxed{\begin{bmatrix} G_1+sC_1+G_2+G_3 & -G_3 \\ -G_2 & -sC_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} G_1V_{in} \\ 0 \end{bmatrix}}$$

$$V_2=\frac{\begin{vmatrix} G_1+sC_1+G_2+G_3 & G_1V_{in} \\ -G_2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} G_1+sC_1+G_2+G_3 & -G_3 \\ -G_2 & -sC_2 \end{vmatrix}}$$

$$=\frac{-(-G_2)(G_1V_{in})}{(G_1+sC_1+G_2+G_3)(-sC_2)-(-G_2)(-G_3)}$$

$$\boxed{V_{out}=V_2=\frac{-G_1G_2V_{in}}{s^2C_1C_2+sC_2(G_1+G_2+G_3)+G_2G_3}}$$

$$\boxed{T_{delIy}(s) = \frac{-G_1 G_2 V_{in}}{s^2 C_1 C_2 + s C_2 (G_1 + G_2 + G_3) + G_2 G_3}}$$

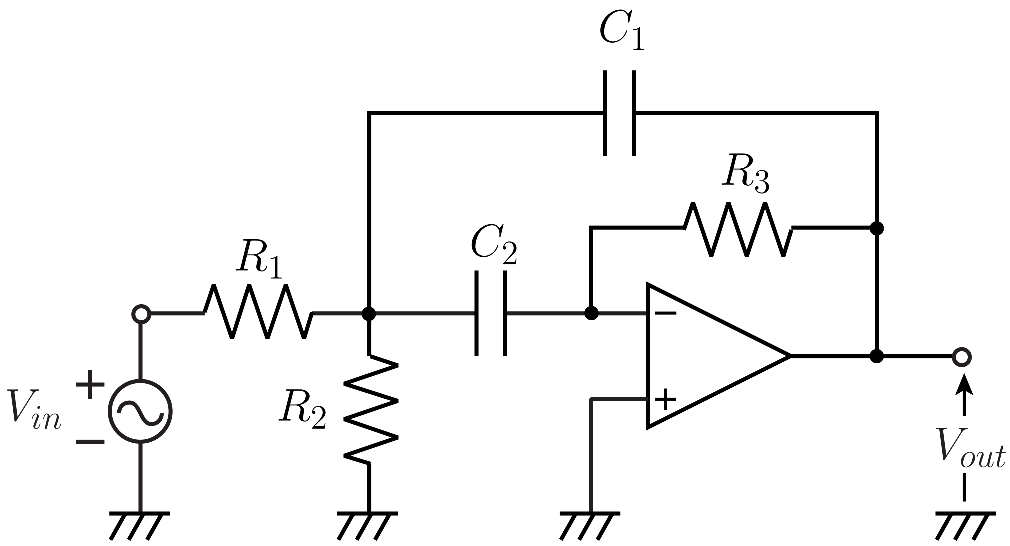
$$= \frac{\dfrac{-1}{C_1 C_2 R_2 R_3}}{s^2 + s\dfrac{1}{C_1}\left(\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3}\right) + \dfrac{1}{C_1 C_2 R_2 R_3}}$$

$$R_1 = R_2 = R_3 = R$$

$$C_1 = \frac{3Q}{\omega_0 R}$$

$$C_2 = \frac{1}{3Q\omega_0 R}$$

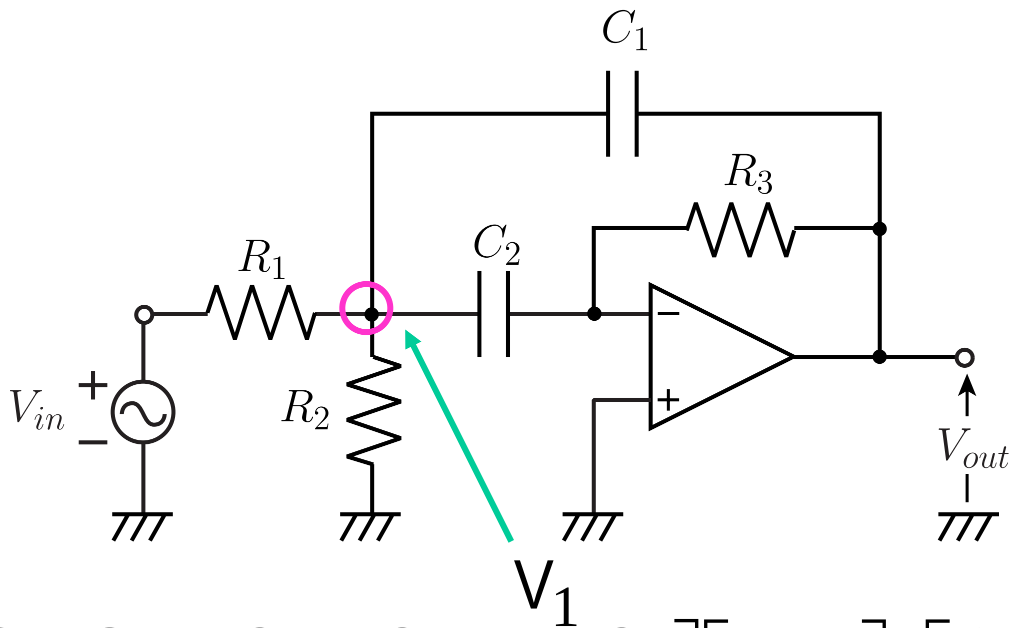
負帰還型2次帯域通過フィルタ



$$T_{delly-bp}(s)=\frac{-s\frac{1}{C_1R_1}}{s^2+s(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2})\frac{1}{R_3}+\frac{1}{C_1C_2R_3}(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2})}$$

$$C_1=C_2=C$$

$$R_1=R_2=\frac{1}{Q\omega_0 C} \qquad R_3=\frac{2Q}{\omega_0 C}$$



$$\begin{bmatrix} G_1+G_2+sC_1+sC_2 & -sC_1 \\ -sC_2 & -G_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_{out} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} G_1V_{in} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$V_{out}=\frac{\begin{vmatrix} G_1+G_2+sC_1+sC_2 & G_1V_{in} \\ -sC_2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} G_1+G_2+sC_1+sC_2 & -sC_1 \\ -sC_2 & -G_3 \end{vmatrix}}$$

$$=\frac{-(-sC_2)(G_1V_{in})}{(G_1+G_2+sC_1+sC_2)(-G_3)-(-sC_1)(-sC_2)}$$

$$V_{out}=\frac{\begin{vmatrix} G_1+G_2+sC_1+sC_2 & G_1V_{in} \\ -sC_2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} G_1+G_2+sC_1+sC_2 & -sC_1 \\ -sC_2 & -G_3 \end{vmatrix}}$$

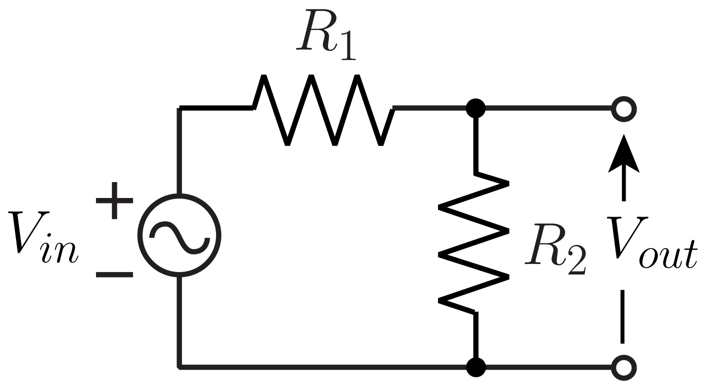
$$=\frac{-(-sC_2)(G_1V_{in})}{(G_1+G_2+sC_1+sC_2)(-G_3)-(-sC_1)(-sC_2)}$$

$$\boxed{\begin{aligned} T_{delIy-bp}(s)&=\frac{V_{out}}{V_{in}}=\frac{-sC_2G_1}{s^2C_1C_2+s(C_1+C_2)G_3+G_3(G_1+G_2)} \\ &=\frac{-s\frac{1}{C_1R_1}}{s^2+s(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2})\frac{1}{R_3}+\frac{1}{C_1C_2R_3}(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2})} \end{aligned}}$$

LCシミュレーション

低素子感度フィルタの構成を
目指して

電力伝送



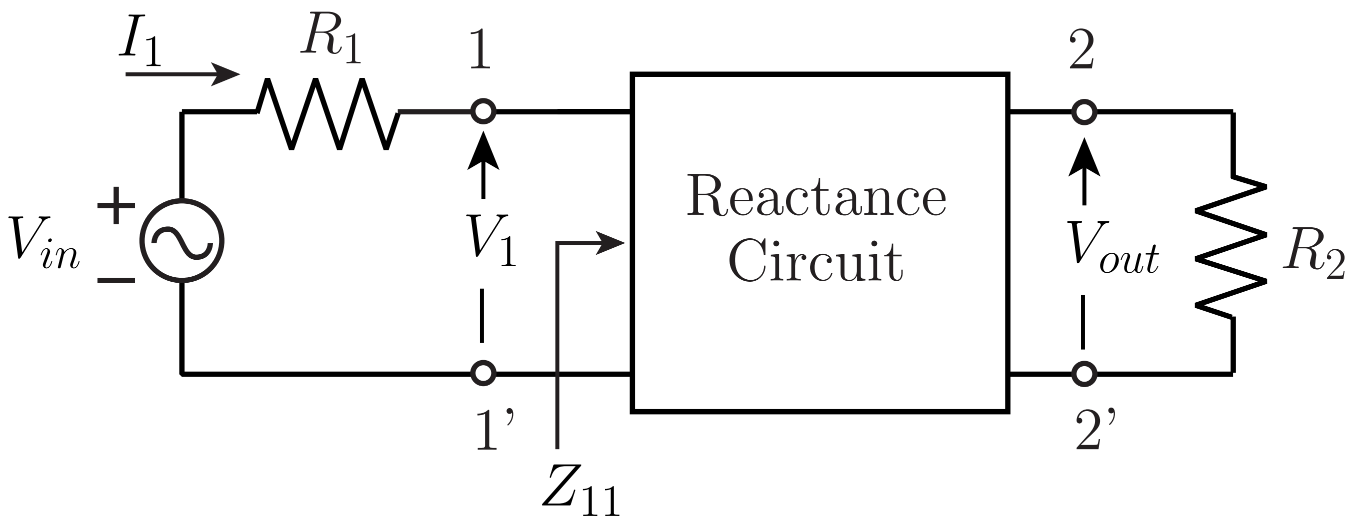
$$P_2=\frac{|V_{out}|^2}{R_2}=\frac{1}{R_2}\left|\frac{R_2}{R_1+R_2}V_{in}\right|^2=\frac{R_2}{(R_1+R_2)^2}|V_{in}|^2$$

$$=\frac{1}{\frac{R_1^{\ 2}}{R_2}+2R_1+R_2}|V_{in}|^2\leq\frac{1}{4R_1}|V_{in}|^2$$

相加相乗平均の定理: $a+b\geq 2\sqrt{ab}$

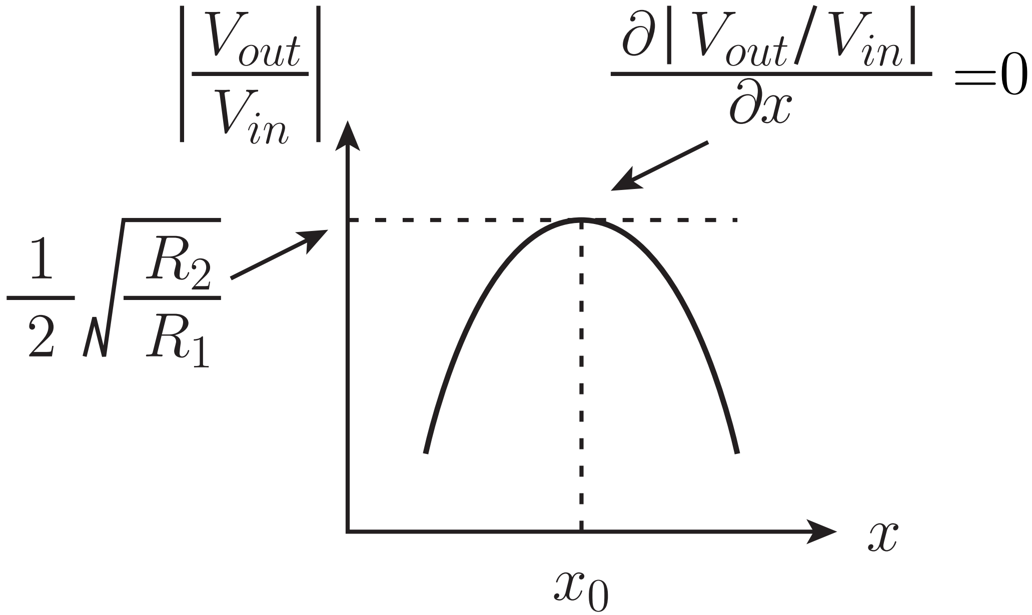
(等号はa=bのとき成立)

抵抗両終端型LCフィルタの性質



$$P_{max} = \frac{|V_{in}|^2}{4R_1} \geq P_2 = \frac{|V_{out}|^2}{R_2}$$

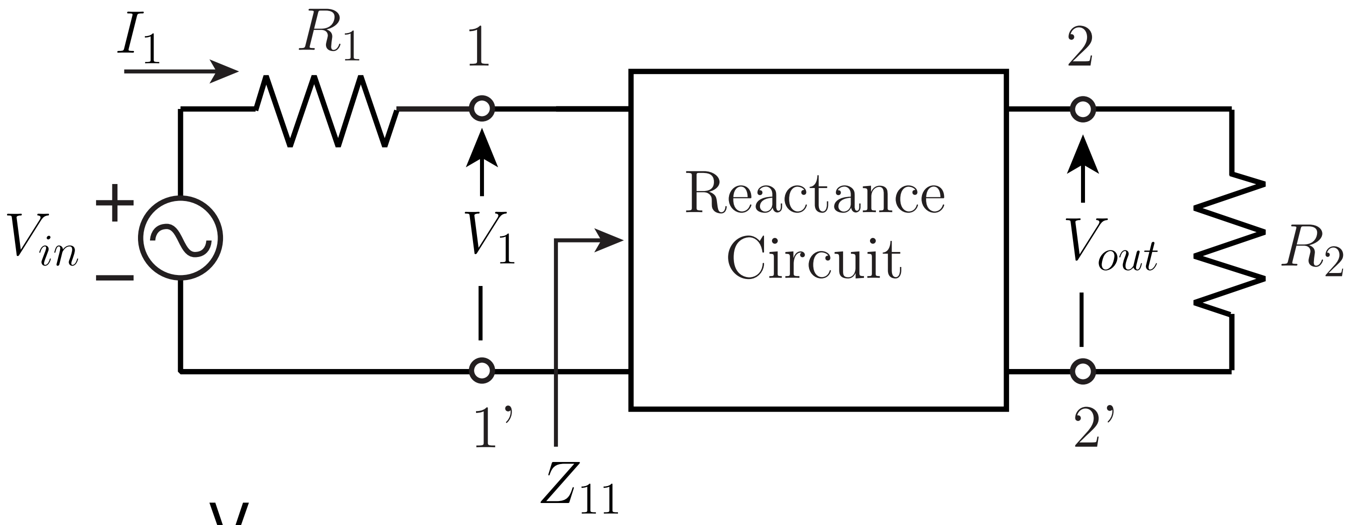
$$\left|\frac{V_{out}}{V_{in}}\right| \leq \frac{1}{2}\sqrt{\frac{R_2}{R_1}}$$



$$\frac{\partial |T(s)|}{\partial x} = \frac{\partial |V_{out}/V_{in}|}{\partial x} = 0 \quad x = x_0, \quad \omega = \omega_0$$

$$\boxed{\Delta |T(s)| \approx \frac{\partial |T(s)|}{\partial x} \Delta x}$$

抵抗両終端型フィルタの構成(ダーリントンの方法)



$$I_1 = \frac{V_{in}}{R_1 + Z_{11}}$$

$$P_1 = R_{11}|I_1|^2 = \frac{R_{11}|V_{in}|^2}{|R_1 + Z_{11}|^2} \quad = \quad P_2 = \frac{|V_{out}|^2}{R_2}$$

$$\boxed{|T(s)|^2 = \left|\frac{V_{out}}{V_{in}}\right|^2 = \frac{R_2 R_{11}}{|R_1 + Z_{11}|^2}}$$

補助関数の導入

$$\boxed{\left|A(s)\right|^2 = 1 - 4\frac{R_1}{R_2}\left|T(s)\right|^2}$$

$$\left|T(s)\right|^2 = \left|\frac{V_{out}}{V_{in}}\right|^2 = \frac{R_2 R_{11}}{\left|R_1 + Z_{11}\right|^2}$$

$$Z_{11} = R_{11} + jX_{11}$$

$$\left|A(s)\right|^2 = 1 - 4\frac{R_1 R_{11}}{\left|R_1 + R_{11} + jX_{11}\right|^2}$$

$$= \frac{\left|R_1 + R_{11} + jX_{11}\right|^2 - 4R_1 R_{11}}{\left|R_1 + R_{11} + jX_{11}\right|^2}$$

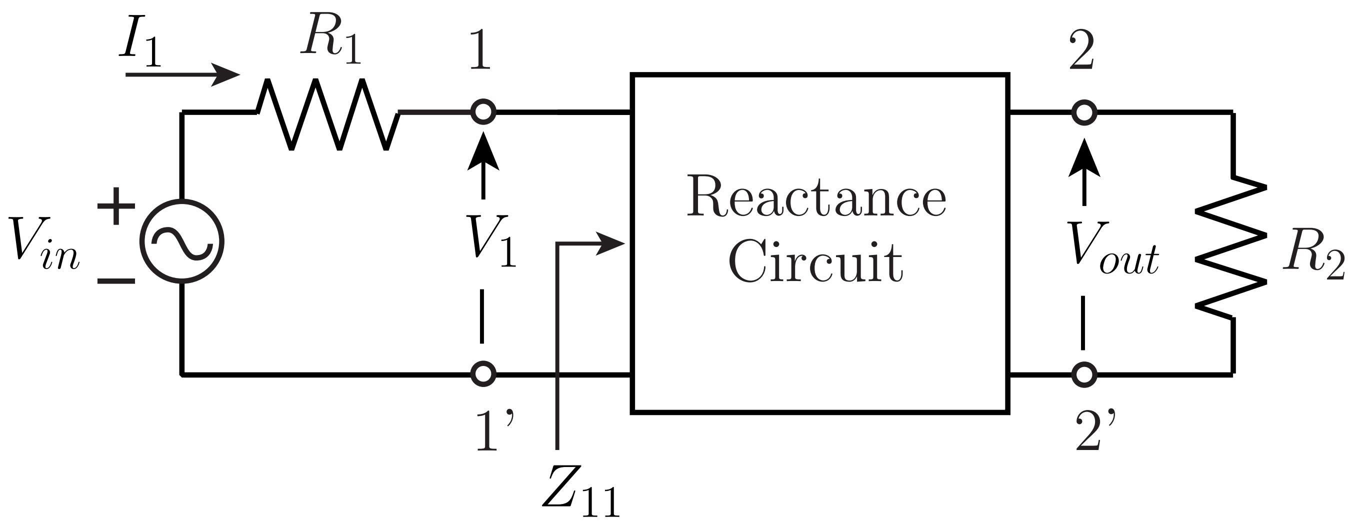
$$= \frac{\left|R_1 - R_{11} - jX_{11}\right|^2}{\left|R_1 + R_{11} + jX_{11}\right|^2}$$

$$= \frac{\left|R_1 - Z_{11}\right|^2}{\left|R_1 + Z_{11}\right|^2}$$

抵抗両終端型LCフィルタの合成方法

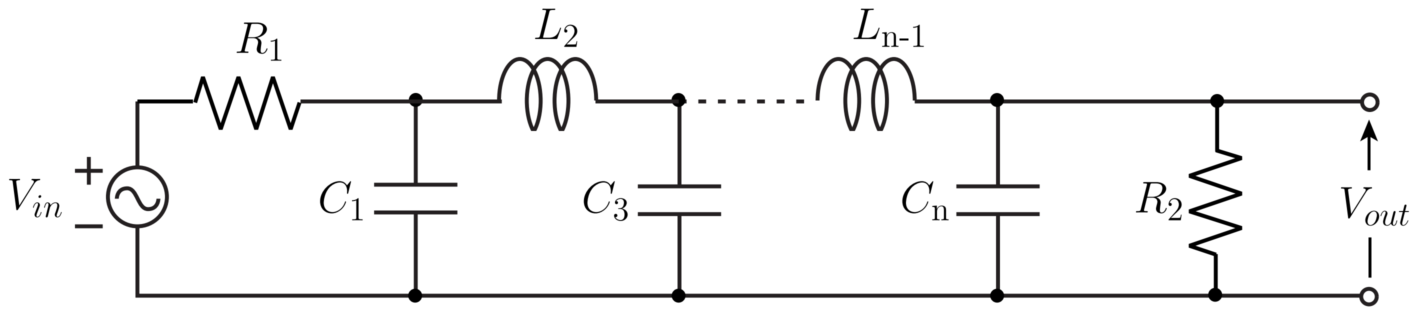
$$A(s) = \pm \frac{R_1 - Z_{11}}{R_1 + Z_{11}} \longrightarrow Z_{11} = R_1 \frac{1 \pm A(s)}{1 \mp A(s)}$$

連分数展開

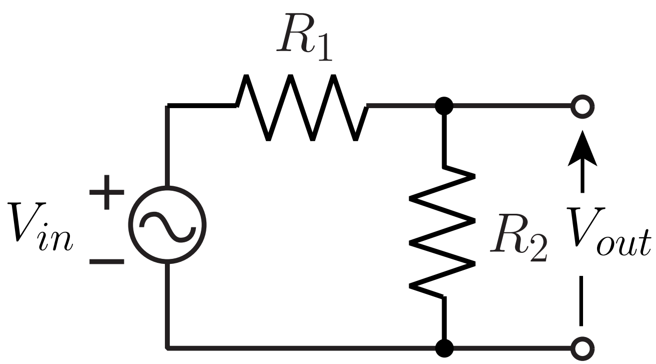


終端抵抗の決定方法

低素子感度性＝電力最大伝送

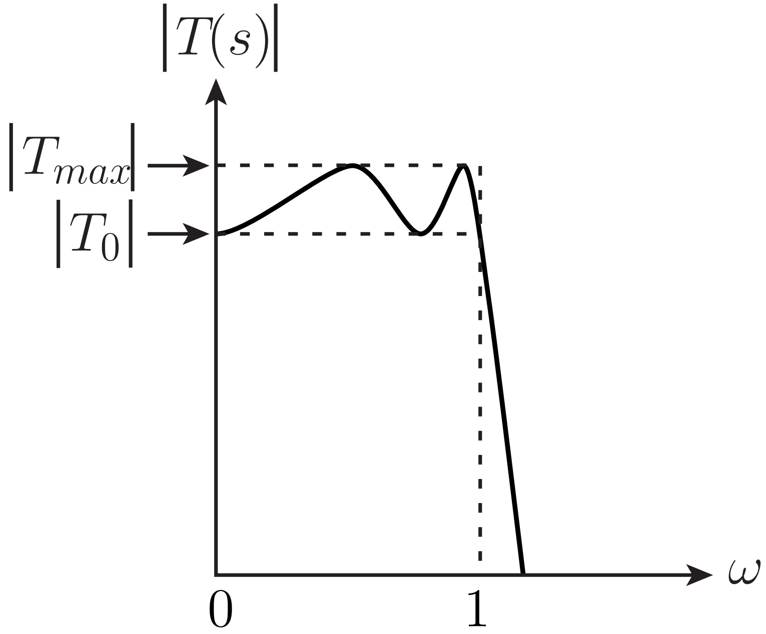


直流での低域通過型フィルタの等価回路



直流で電力最大伝送 → $R_1=R_2$

直流以外で電力最大伝送



$$|y| = \frac{1}{|T(s)|}$$

$$\left|\frac{V_{out}}{V_{in}}\right| \leq \sqrt{\frac{R_2}{4R_1}}$$

$$|T_{max}|^2 = \frac{R_2}{4R_1} = \frac{1}{4\phi}$$

$$|T_0| = \frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{1}{1+\phi}$$

$$|T_{max}| = \alpha_p |T_0|$$

$$|T_{max}|^2 = \frac{1}{4\phi}$$

$$|T_0| = \frac{1}{1+\phi}$$

$$\longrightarrow \quad |T_{max}|^2 = \alpha_p{}^2 |T_0|^2 \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{4\phi} = \frac{\alpha_p{}^2}{(1+\phi)^2}$$

$$\boxed{\phi = (\alpha_p \pm \sqrt{\alpha_p{}^2 - 1})^2}$$

$$\boxed{|T_{max}| = \frac{1}{2(\alpha_p \pm \sqrt{\alpha_p{}^2 - 1})}}$$

例題 3次振幅最大平坦特性

$$T(s)=\frac{1}{y_{min}(s^3+2s^2+2s+1)}$$

直流で電力最大伝送 → $R_1=R_2$ → $y_{min}=2$

$$|A(s)|^2=1-4\frac{R_1}{R_2}|T(s)|^2=1-\frac{1}{|s^3+2s^2+2s+1|^2}$$

$$|A(j\omega)|^2=1-\frac{1}{|-j\omega^3-2\omega^2+j2\omega+1|^2}=1-\frac{1}{|(1-2\omega^2)^2+(2\omega-\omega^3)|^2}$$

$$=1-\frac{1}{1+\omega^6}=\frac{\omega^6}{1+\omega^6}$$

$-s^2=\omega^2$なので $$\frac{\omega^6}{1+\omega^6}=\frac{(-s^2)^3}{|s^3+2s^2+2s+1|^2}$$

$$|A(s)|^2=\frac{(-s^2)^3}{|s^3+2s^2+2s+1|^2}=\frac{sss(-s)(-s)(-s)}{|s^3+2s^2+2s+1|^2}$$

$$\boxed{|A(s)|^2=A(s)A(-s)\text{であるので}}$$

$$A(s)=\frac{s^3}{s^3+2s^2+2s+1}\text{または}\frac{-s^3}{s^3+2s^2+2s+1}$$

$$A(s)=\pm\frac{R_1-Z_{11}}{R_1+Z_{11}} \longrightarrow Z_{11}=R_1\frac{1\pm A(s)}{1\mp A(s)}$$

$$\boxed{Z_{11}=R_1\frac{2s^3+2s^2+2s+1}{2s^2+2s+1}\text{または}R_1\frac{2s^2+2s+1}{2s^3+2s^2+2s+1}}$$

$R_1=1\Omega$とする

$$Z_{11}=\frac{2s^3+2s^2+2s+1}{2s^2+2s+1}$$

$$=s+\frac{s+1}{2s^2+2s+1}$$

$$=s+\frac{1}{2s+\frac{1}{s+1}}$$

インダクタンス (1H)

容量 (2F)

抵抗 (1Ω)

インダクタンス (1H)

$R_1=1\Omega$とする

$$Y_{11}=\frac{2s^3+2s^2+2s+1}{2s^2+2s+1}$$

$$=s+\frac{s+1}{2s^2+2s+1}$$

$$=s+\cfrac{1}{2s+\cfrac{1}{s+1}}$$

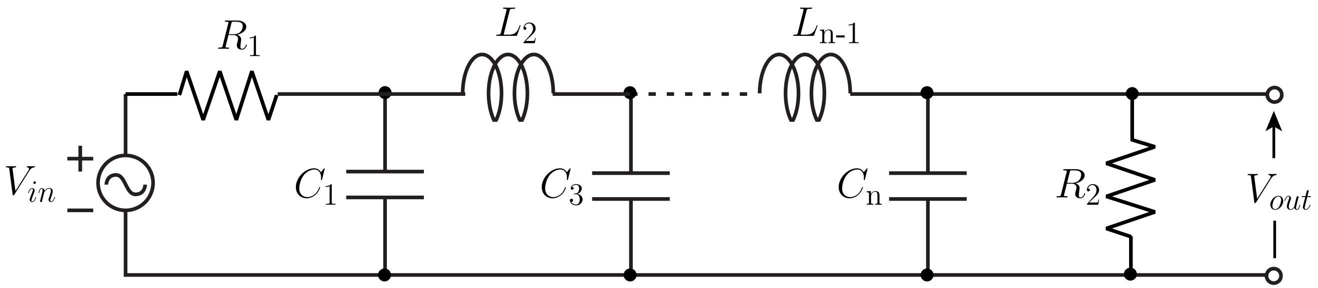
容量 (1F)

インダクタンス(2H)

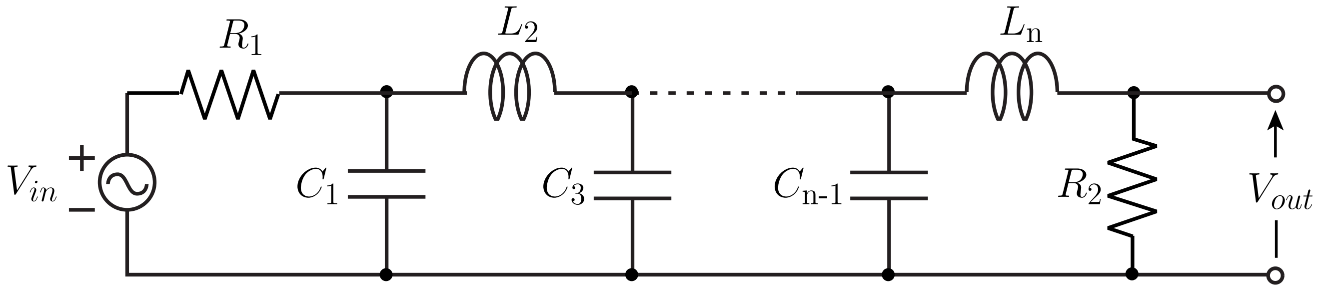
コンダクタンス (1S)

容量 (1F)

振幅平坦特性の設計公式



奇数次



偶数次

$R_1=R_2$　n：フィルタの次数　$\beta_p=\sqrt{\alpha_p^2-1}$

遮断角周波数:1rad/s

$$C_1=\frac{2\beta_p^{1/n}\sin\frac{\pi}{2n}}{R_1}$$

$$L_iC_{i+1}\text{または}C_iL_{i+1}=4\beta_p^{2/n}\sin\frac{(2i-1)\pi}{2n}\sin\frac{(2i+1)\pi}{2n}$$

振幅等リプル特性の設計公式

n=奇数：$R_2=R_1$ 　　n=偶数：$R_2=\left(\alpha_p-\sqrt{\alpha_p{}^2-1}\right)^2 R_1$

$$\xi=\left(\frac{\alpha_p+1}{\alpha_p-1}\right)^{1/2n}-\left(\frac{\alpha_p-1}{\alpha_p+1}\right)^{1/2n}$$

$$b_i=\xi^2+4\sin^2\frac{i}{n}\pi$$

$$C_1=\frac{4\sin\frac{\pi}{2n}}{\xi R_1}$$

$$L_iC_{i+1}\text{または}C_iL_{i+1}=\frac{4\sin\frac{(2i-1)\pi}{2n}\sin\frac{(2i+1)\pi}{2n}}{b_i}$$

フィルタの変換

$T_0(s)$ ：基準低域通過型関数

低域-低域通過変換

$$s \rightarrow \frac{s}{\omega_C}$$

$$T_L(s) = T_0\left(\frac{s}{\omega_C}\right)$$

低域-高域通過変換

$$s \rightarrow \frac{1}{s}$$

$$T_{H0}(s) = T_0\left(\frac{1}{s}\right)$$

$$T_H(s) = T_{H0}\left(\frac{s}{\omega_C}\right)$$

低域-帯域通過変換

$$s \to \frac{\omega_0}{\omega_b}\left(\frac{s}{\omega_0}+\frac{\omega_0}{s}\right)$$

$$\boxed{T_B(s)=T_0\left(\frac{\omega_0}{\omega_b}\left(\frac{s}{\omega_0}+\frac{\omega_0}{s}\right)\right)}$$

$$\omega \to \frac{\omega_0}{\omega_b}\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)$$

$$-\infty \to 0$$

$$0 \to \omega_0$$

$$\infty \to \infty$$

$$\frac{\omega_0}{\omega_b}\left(\frac{\omega_{C1}}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega_{C1}}\right)=-1 \qquad \frac{\omega_0}{\omega_b}\left(\frac{\omega_{C2}}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega_{C2}}\right)=1$$

$$\omega_{C1}=\frac{-\omega_b+\sqrt{\omega_b{}^2+4\omega_0{}^2}}{2} \qquad \omega_{C2}=\frac{\omega_b+\sqrt{\omega_b{}^2+4\omega_0{}^2}}{2}$$

$$\boxed{\omega_{C2}-\omega_{C1}=\omega_b}$$

帯域幅

$$\frac{\omega_0}{\omega_b}\left(\frac{\omega_{C1}}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega_{C1}}\right)=-1 \qquad \frac{\omega_0}{\omega_b}\left(\frac{\omega_{C2}}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega_{C2}}\right)=1$$

$$\omega_{C1}-\frac{\omega_0{}^2}{\omega_{C1}}=-\omega_b \qquad \omega_{C2}-\frac{\omega_0{}^2}{\omega_{C2}}=\omega_b$$

$$\omega_{C1}+\omega_{C2}=\frac{\omega_0{}^2}{\omega_{C1}}+\frac{\omega_0{}^2}{\omega_{C2}}=\frac{\omega_0{}^2(\omega_{C1}+\omega_{C2})}{\omega_{C1}\omega_{C2}}$$

$$\boxed{\omega_{C1}\omega_{C2}=\omega_0{}^2}$$

幾何学対称

例題1

$$T_0(s)=\frac{1}{y_{min}(s^2+\sqrt{2}s+1)}$$: 遮断角周波数1rad/s

遮断周波数4kHzに変換

$$s\to\frac{s}{\omega_C}=\frac{s}{2\pi\times4000}$$

$$\boxed{T(s)=\frac{(2\pi\times4000)^2}{y_{min}\left\{s^2+2\sqrt{2}\pi\times4000s+(2\pi\times4000)^2\right\}}}$$

例題2 $T_0(s) = \dfrac{1}{y_{min}(s^2+\sqrt{2}s+1)}$：遮断角周波数1rad/s

中心周波数1kHz，**帯域幅**450Hz

$$s \to \frac{\omega_0}{\omega_b}\left(\frac{s}{\omega_0}+\frac{\omega_0}{s}\right) = \frac{1000}{450}\left(\frac{s}{2\pi\times 1000}+\frac{2\pi\times 1000}{s}\right)$$

$$T(s) = \frac{1/y_{min}}{\left\{\dfrac{\omega_0}{\omega_b}\left(\dfrac{s}{\omega_0}+\dfrac{\omega_0}{s}\right)\right\}^2+\sqrt{2}\dfrac{\omega_0}{\omega_b}\left(\dfrac{s}{\omega_0}+\dfrac{\omega_0}{s}\right)+1}$$

$$= \frac{(1/y_{min})\omega_b{}^2 s^2}{s^4+\sqrt{2}\omega_b s^3+\left\{2\left(\dfrac{\omega_0}{\omega_b}\right)+1\right\}^2\omega_b{}^2 s^2+\sqrt{2}\omega_b\omega_0{}^2 s+\omega_0{}^4}$$

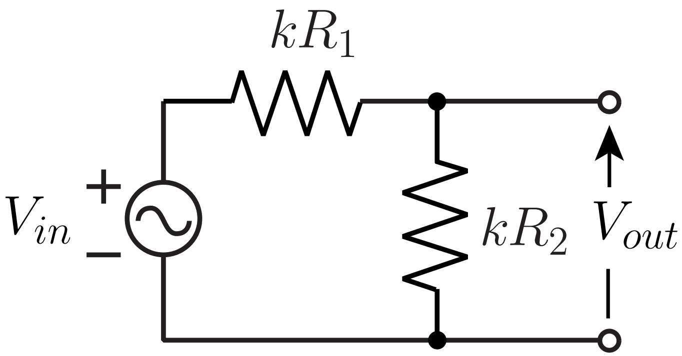
$$T(s)=\frac{(1/y_{\min})\omega_b{}^2 s^2}{s^4+\sqrt{2}\omega_b s^3+\left\{2\left(\frac{\omega_0}{\omega_b}\right)+1\right\}^2\omega_b{}^2 s^2+\sqrt{2}\omega_b\omega_0{}^2 s+\omega_0{}^4}$$

$$=\frac{(1/y_{\min})(2\pi\times 450)^2 s^2}{s^4+2\pi\times 450\times\sqrt{2}s^3+\left\{2\left(\frac{20}{9}\right)^2+1\right\}(2\pi\times 450)^2 s^2+\sqrt{2}(2\pi\times 1000)^2(2\pi\times 450)s+(2\pi\times 1000)^4}$$

$$\omega_{C1}=2\pi\times 800,\quad \omega_{C2}=2\pi\times 1250$$

$$\boxed{\omega_{C1}-\omega_{C2}=2\pi\times 450}$$

インピーダンス・スケーリング



$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{kR_2}{kR_1 + kR_2} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

例題　　**現実的な素子値への変更**

「インピーダンススケーリング」と「周波数スケーリング」

(1) **抵抗値を1kΩに (インピーダンススケーリング)**

$$R_1=R_2=1\Omega\rightarrow 1k\Omega$$

$$C=1F\rightarrow\frac{1}{1000}F$$

$$L=2H\rightarrow 2\times 1000H$$

(2) **遮断周波数を1kHzに (周波数スケーリング)**

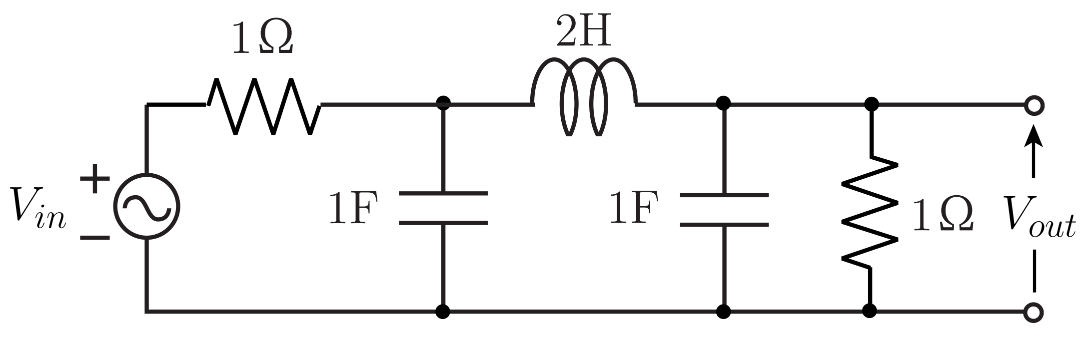
$$\boxed{j\omega\rightarrow j\frac{\omega}{\omega_C}}$$

$$C=\frac{1}{1000}F\rightarrow\frac{1}{2\pi\times 1000000}F=0.159\mu F$$

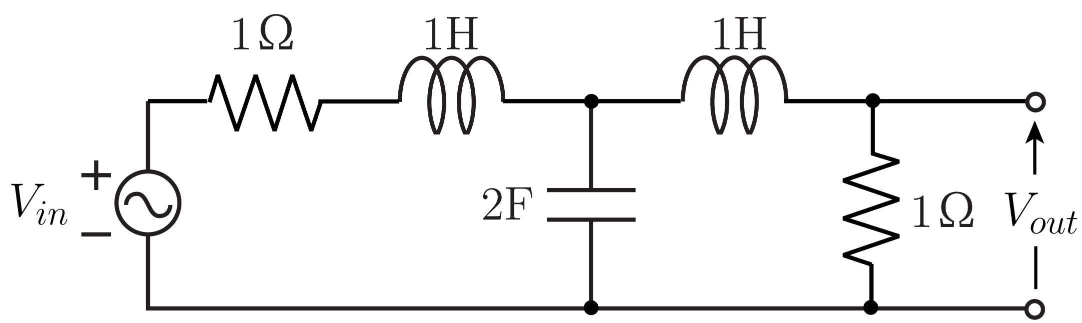
$$L=2\times 1000H\rightarrow\frac{2\times 1000}{2\pi\times 1000}H=0.318H$$

3次抵抗両終端型LCフィルタ

遮断周波数1rad/s　振幅最大平坦特性



(a)

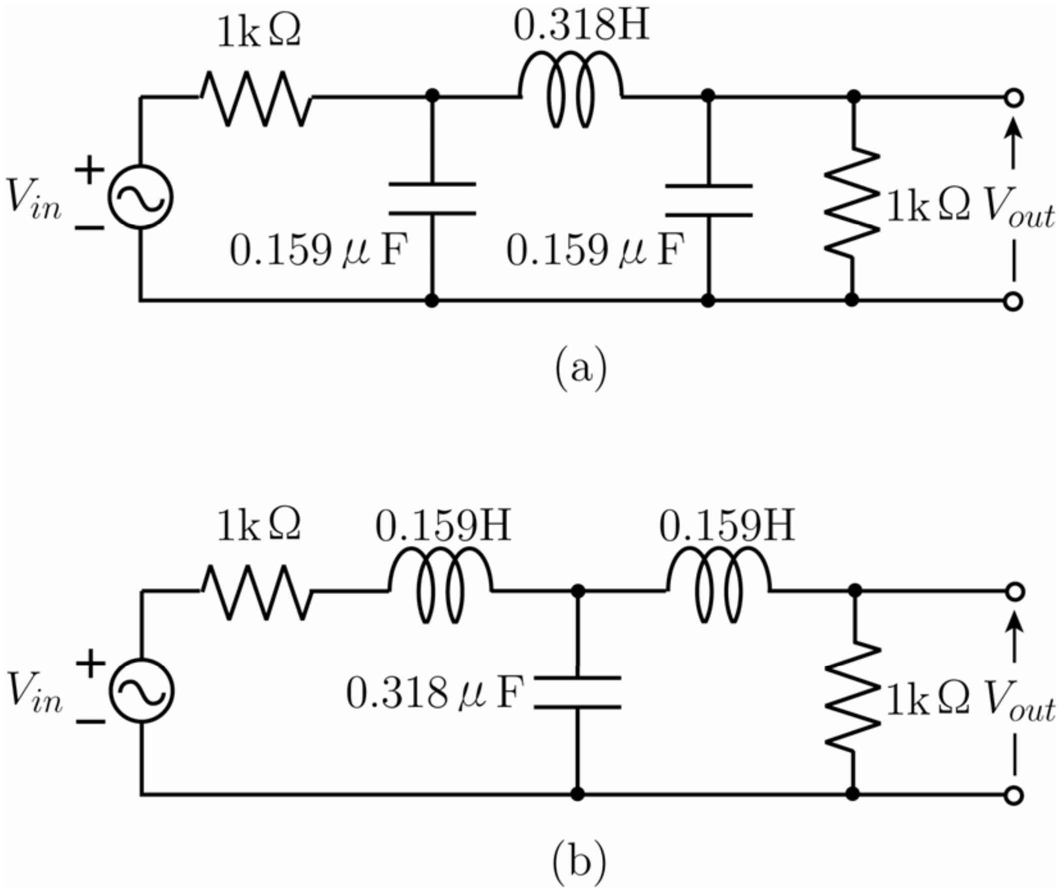


(b)

遮断周波数1kHz　振幅最大平坦特性

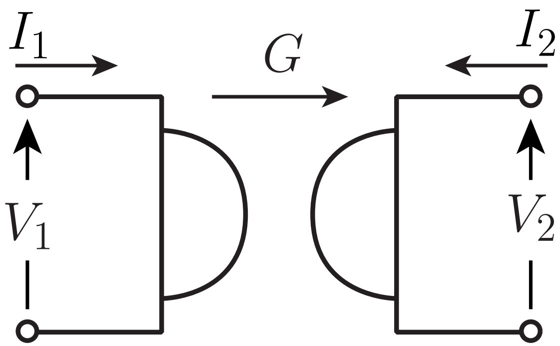
インピーダンスレベル：1000**倍**

インダクタンス, 容量：1/(2000 **π**) **倍**



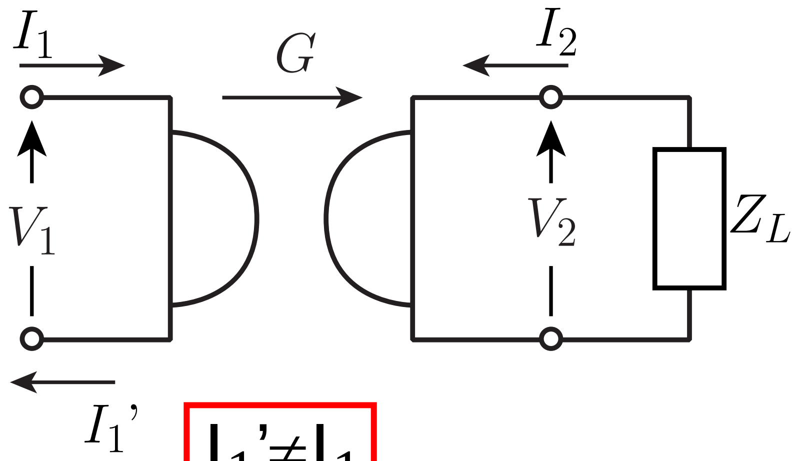
インピーダンス・シミュレーション

ジャイレータ



$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \pm G \\ \mp G & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

複号同順



$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \pm G \\ \mp G & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

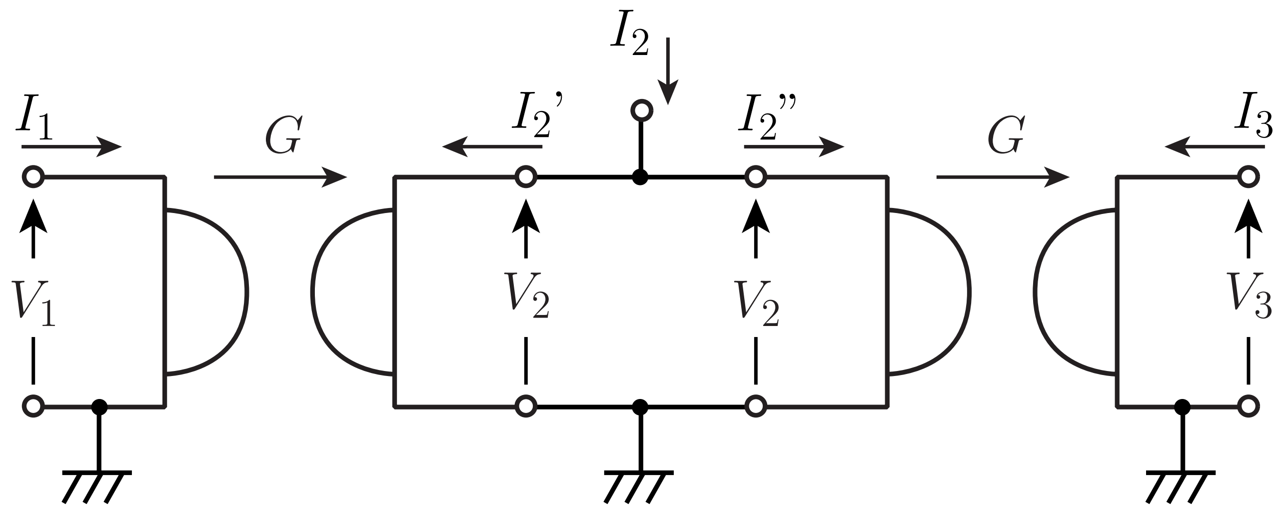
$$\boxed{I_1' \neq I_1}$$

$$I_1 = \pm G V_2 = \pm G(-Z_L I_2) = \pm G(\pm Z_L G V_1) = Z_L G^2 V_1$$

$$\boxed{Z_{in} = \frac{V_1}{I_1} = \frac{1}{G^2 Z_L}}$$

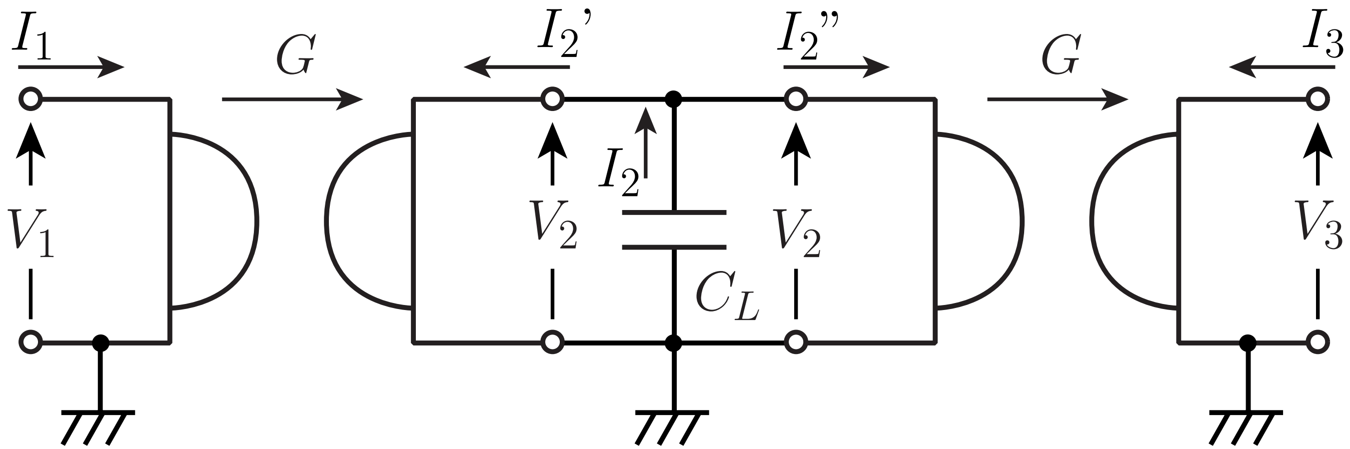
$$\boxed{Z_L = \frac{1}{sC_L} \rightarrow Z_{in} = s\frac{C_L}{G^2} \quad \left(L = \frac{C_L}{G^2}\right)}$$

3端子対ジャイレータによる非接地インダクタの構成



$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \pm G \\ \mp G & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} I_2'' \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \pm G \\ \mp G & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2' + I_2'' \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \pm G & 0 \\ \mp G & 0 & \pm G \\ 0 & \mp G & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}$$



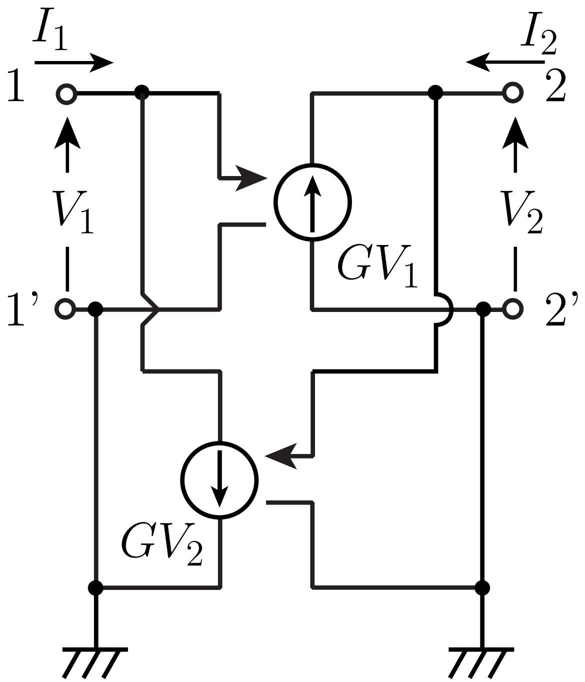
$$I_2 = -sC_L V_2$$

$$I_2 = \mp G(V_1 - V_3)$$

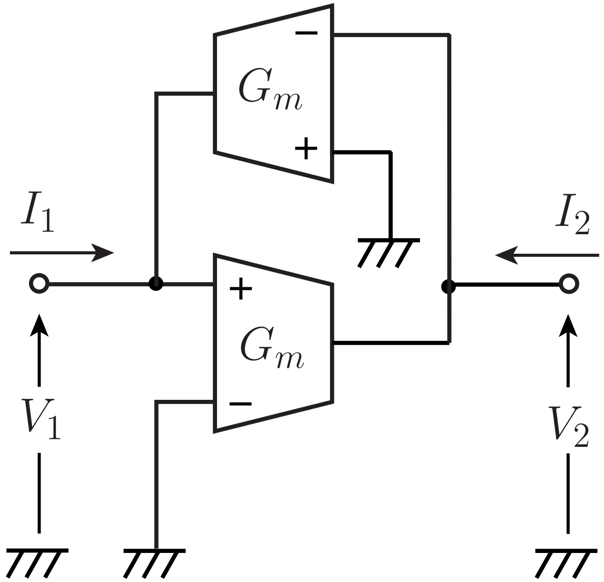
$$\longrightarrow \quad V_2 = \pm \frac{V_1 - V_3}{sC_L}$$

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \pm G & 0 \\ \mp G & 0 & \pm G \\ 0 & \mp G & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} \longrightarrow \boxed{\begin{bmatrix} I_1 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{G^2}{sC_L} & -\dfrac{G^2}{sC_L} \\ -\dfrac{G^2}{sC_L} & \dfrac{G^2}{sC_L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_3 \end{bmatrix}}$$

ジャイレータの構成例



$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & G \\ -G & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

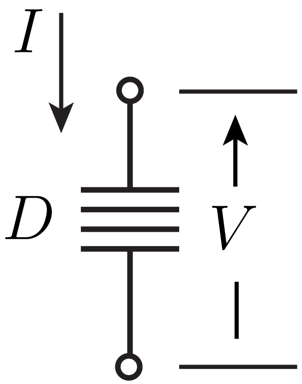


インピーダンス・スケーリング・シミュレーション

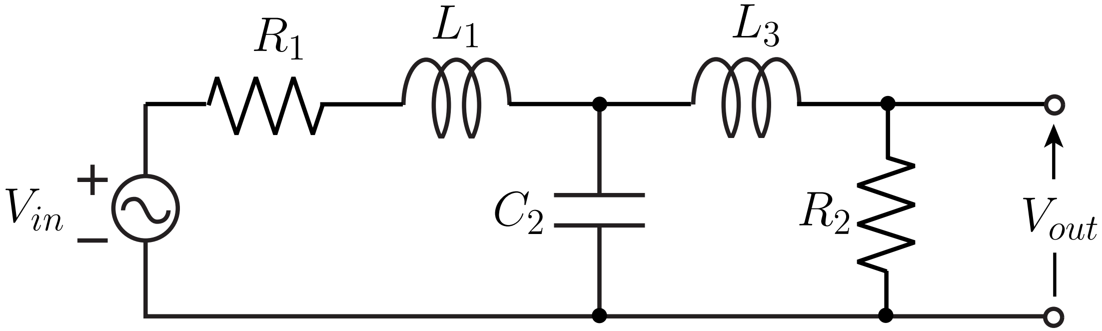
$$\times\frac{1}{s}$$

sL	$\longrightarrow$	L	抵抗
R	$\longrightarrow$	$\dfrac{R}{s}$	容量
$\dfrac{1}{sC}$	$\longrightarrow$	$\dfrac{1}{s^2C}$	FDNR

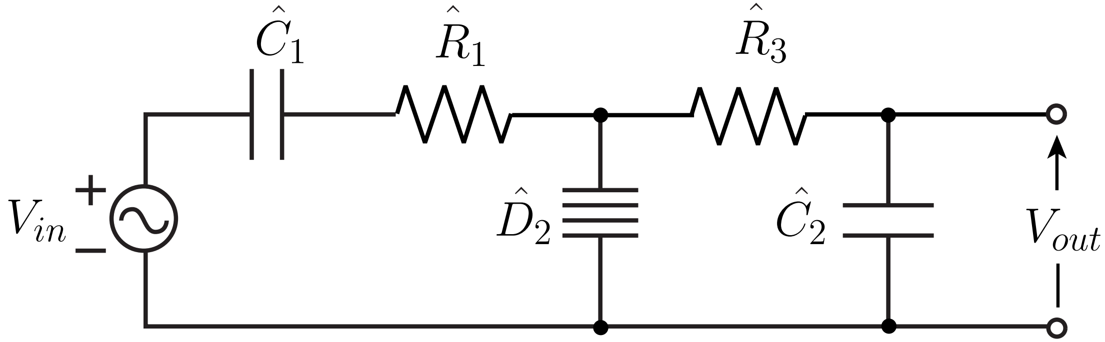
Frequency-Dependent Negative Resistance
(**周波数依存性負性抵抗**)



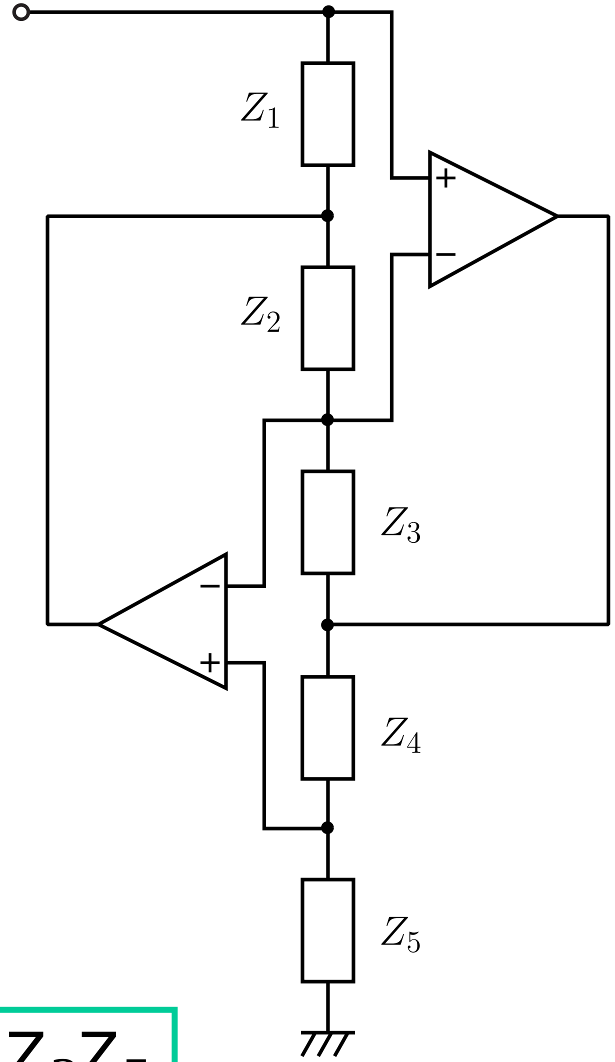
$$\frac{V}{I}=\frac{1}{s^2D}$$



(a)



(b)



$$\boxed{Z_{in} = \frac{Z_1 Z_3 Z_5}{Z_2 Z_4}}$$

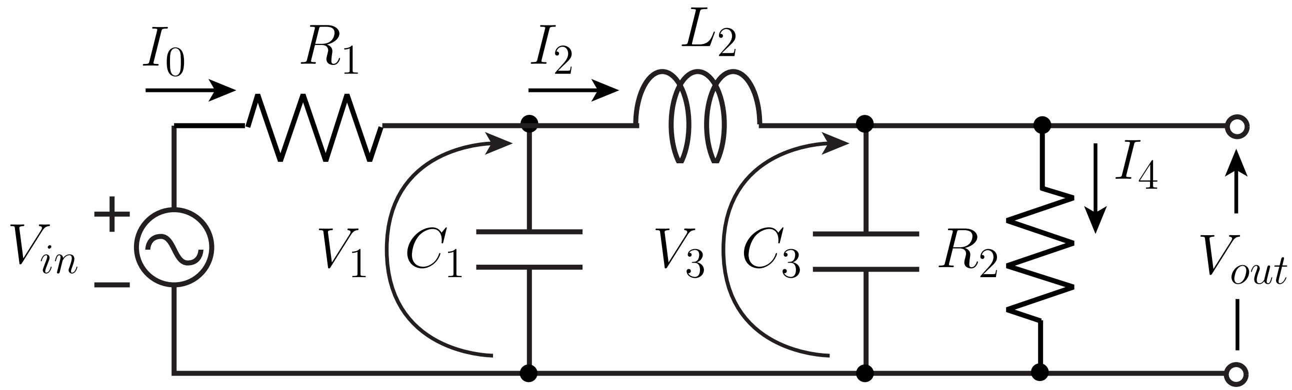
GIC

リープフロッグ・シミュレーション

リープフロッグ=Leapfrog

カエル跳び？

馬跳び!



$$I_0 = \frac{V_{in} - V_1}{R_1}$$

$$V_1 = \frac{I_0 - I_2}{sC_1}$$

$$I_2 = \frac{V_1 - V_3}{sL_2}$$

$$V_3 = \frac{I_2 - I_4}{sC_3}$$

$$I_4 = \frac{V_3}{R_2}$$

シグナルフローグラフ

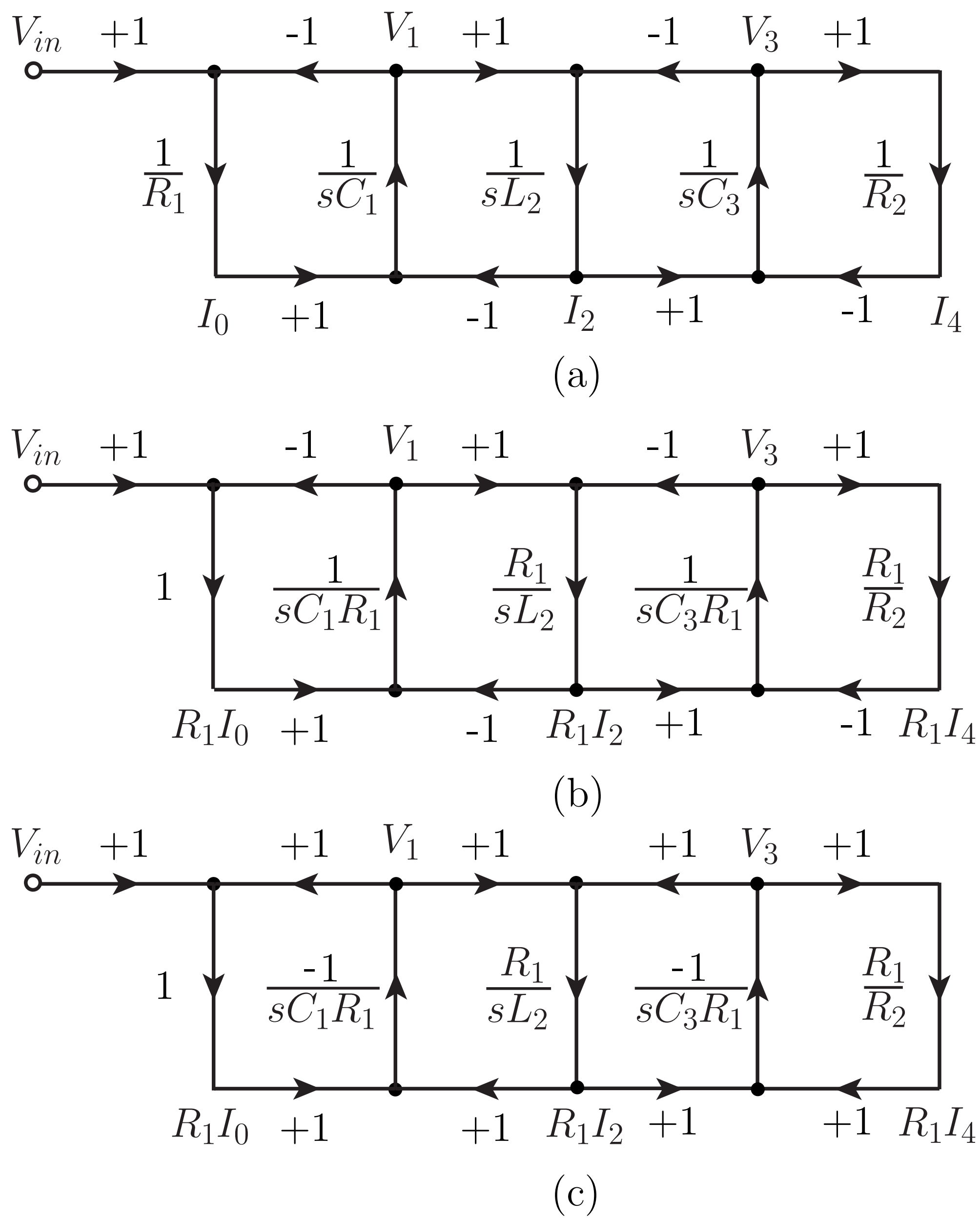
$$I_0=\frac{V_{in}-V_1}{R_1}$$

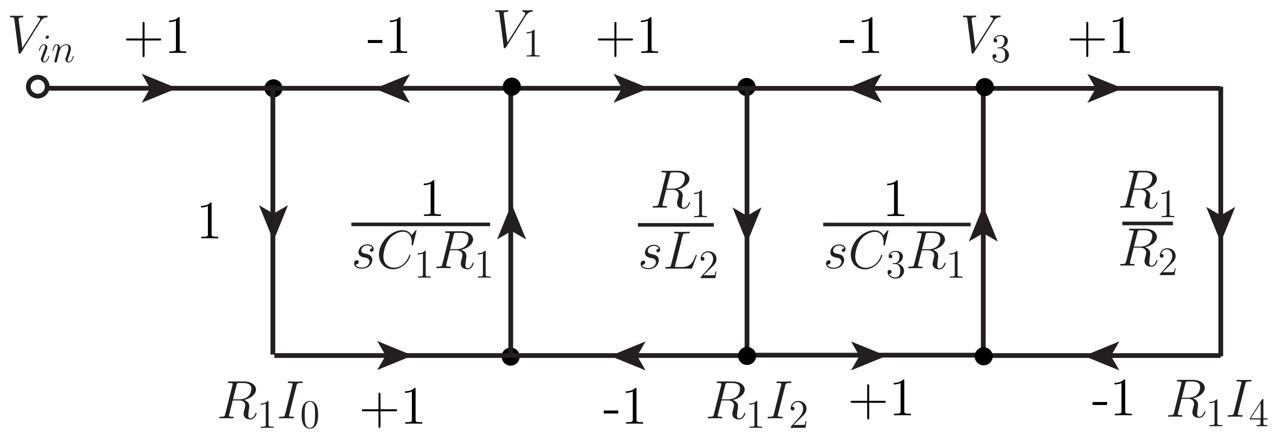
$$V_1=\frac{I_0-I_2}{sC_1}$$

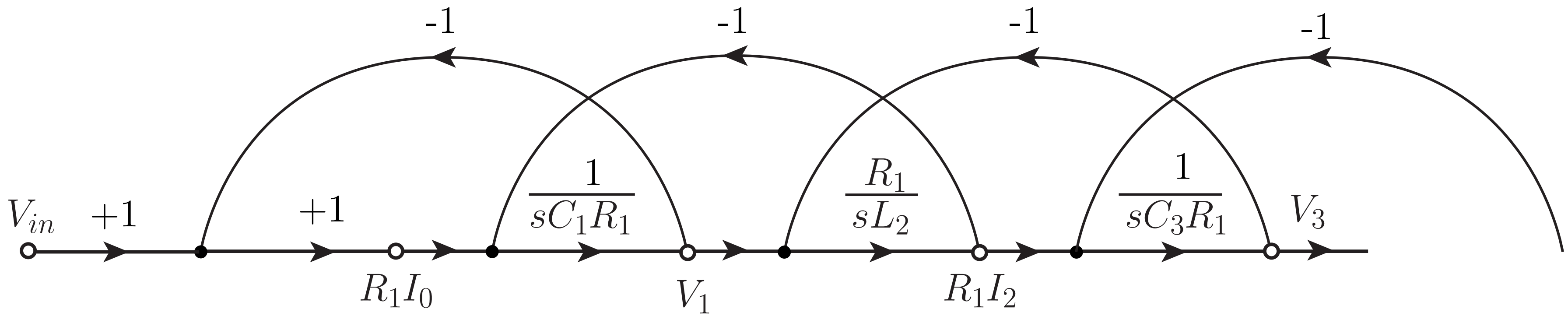
$$I_2=\frac{V_1-V_3}{sL_2}$$

$$V_3=\frac{I_2-I_4}{sC_3}$$

$$I_4=\frac{V_3}{R_2}$$

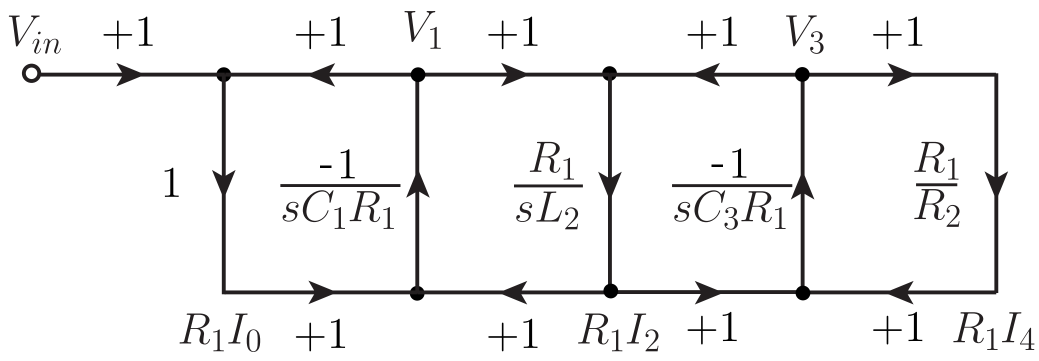


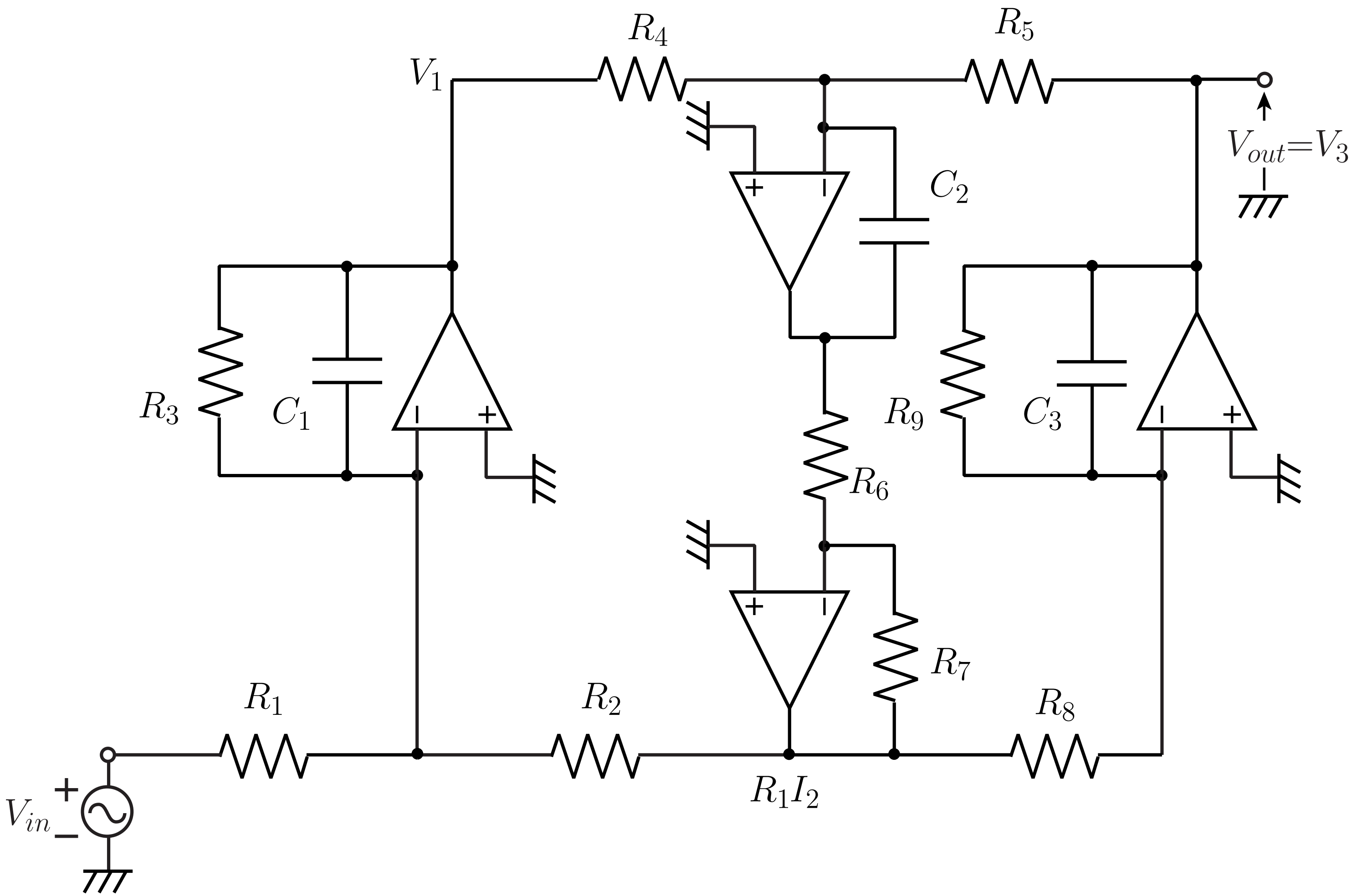

V_{in}
+1
-1
V_1
+1
-1
V_3
+1
1
$\frac{1}{sC_1R_1}$
$\frac{R_1}{sL_2}$
$\frac{1}{sC_3R_1}$
$\frac{R_1}{R_2}$
R_1I_0
+1
-1
R_1I_2
+1
-1
R_1I_4

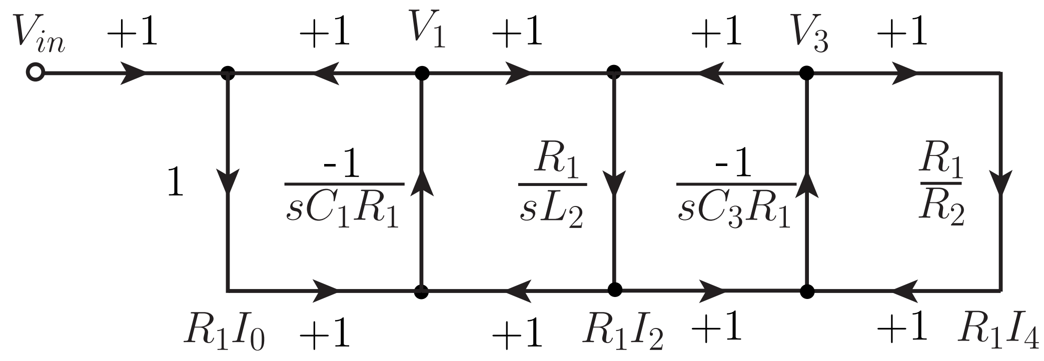

-1
-1
-1
-1
V_{in}
+1
+1
$\frac{1}{sC_1R_1}$
$\frac{R_1}{sL_2}$
$\frac{1}{sC_3R_1}$
V_3
R_1I_0
V_1
R_1I_2

馬跳び

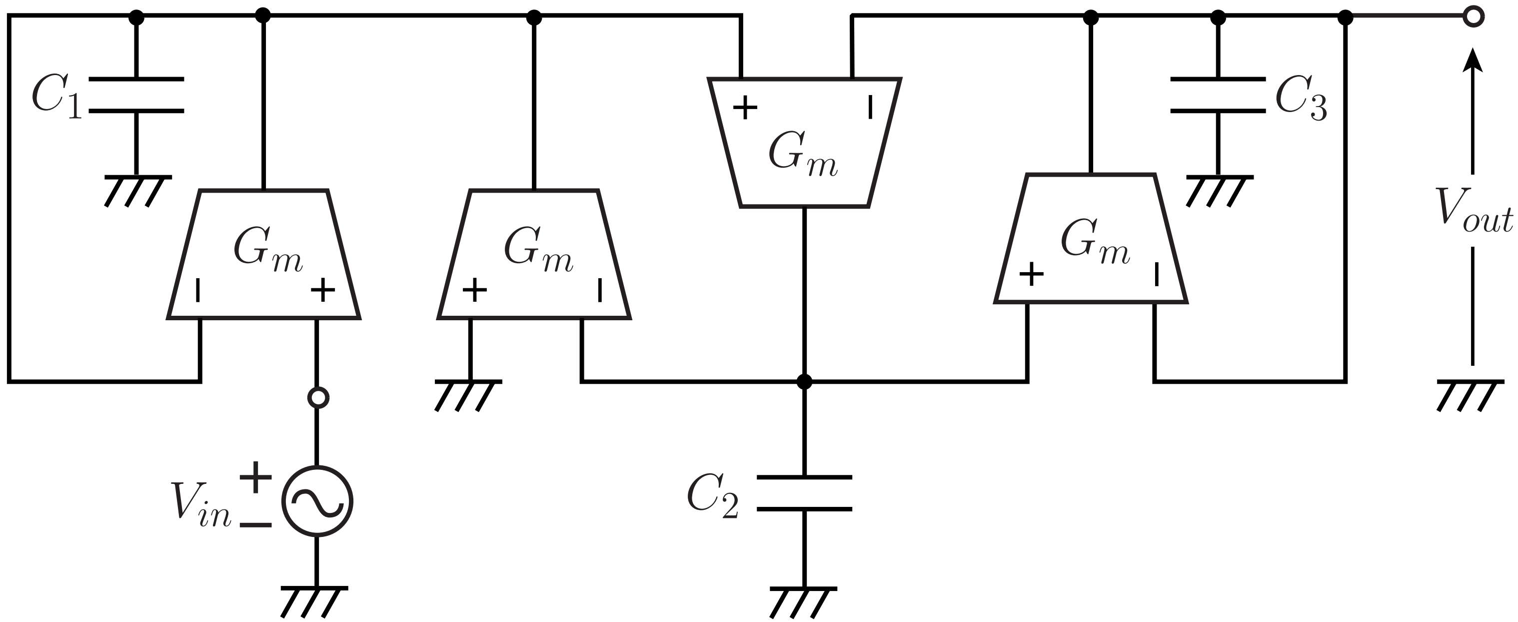
3次低域通過型フィルタの構成例







V_{in}
+1
+1
V_1
+1
+1
V_3
+1
1
$\frac{-1}{sC_1R_1}$
$\frac{R_1}{sL_2}$
$\frac{-1}{sC_3R_1}$
$\frac{R_1}{R_2}$
R_1I_0
+1
+1
R_1I_2
+1
+1
R_1I_4

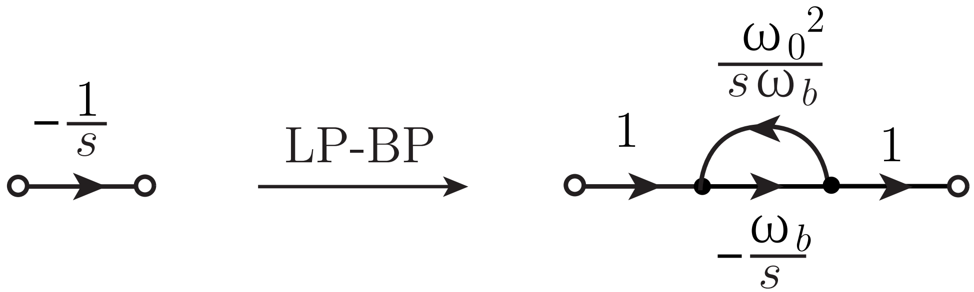


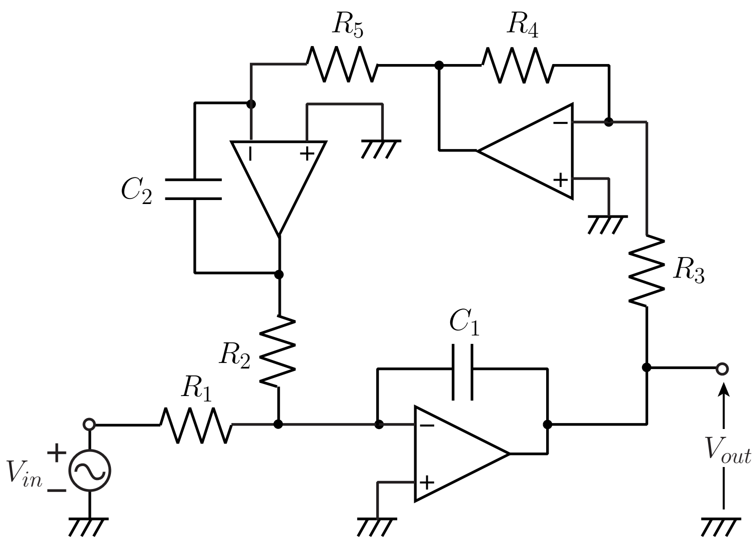
C_1
G_m
G_m
G_m
G_m
C_3
V_{out}
V_{in}
C_2

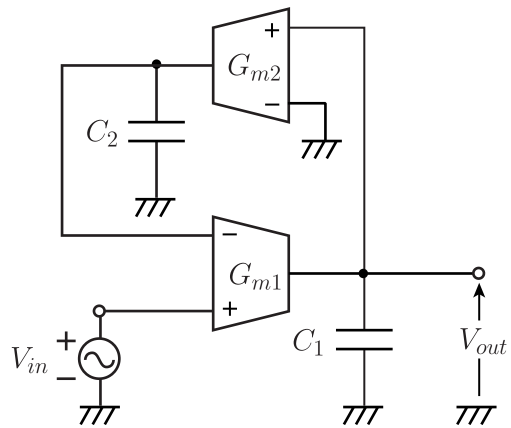
帯域通過フィルタの構成

低域-帯域通過変換：

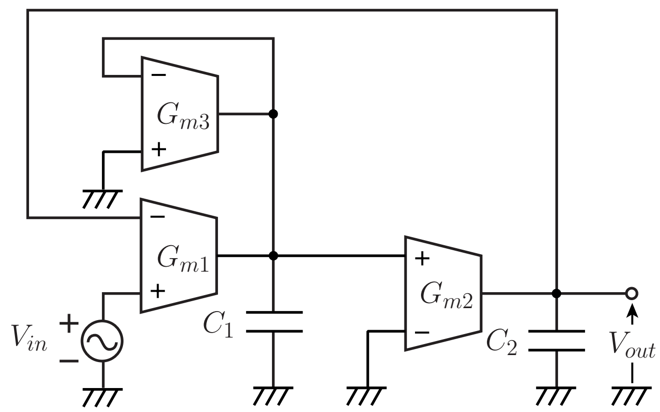
$$s \rightarrow \frac{\omega_0}{\omega_b}\left(\frac{s}{\omega_0}+\frac{\omega_0}{s}\right)$$



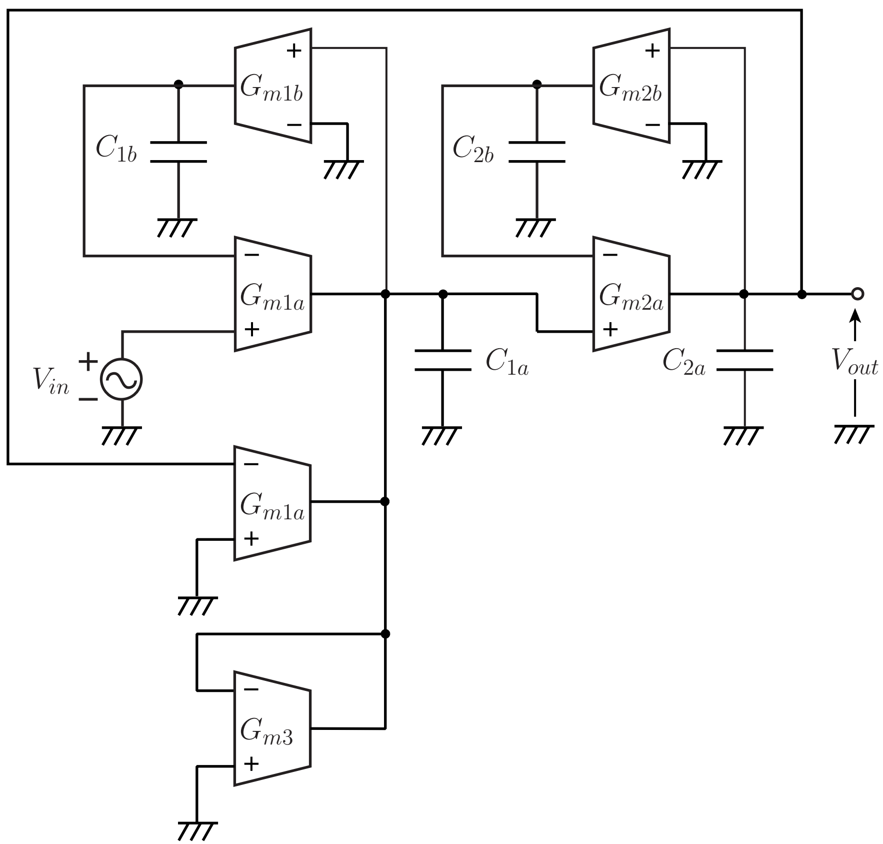




4次帯域通過フィルタ



G_{m3}
G_{m1}
G_{m2}
V_{in}
C_1
C_2
V_{out}



G_{m1b}
G_{m2b}
C_{1b}
C_{2b}
G_{m1a}
G_{m2a}
V_{in}
C_{1a}
C_{2a}
V_{out}
G_{m1a}
G_{m3}

周波数特性の自動調整

素子値の一様偏差の影響

$$T_0(s)=F[sC_i,\ G_j]$$

一様偏差: $C_i \to k_C C_i \qquad G_j \to k_G G_j$

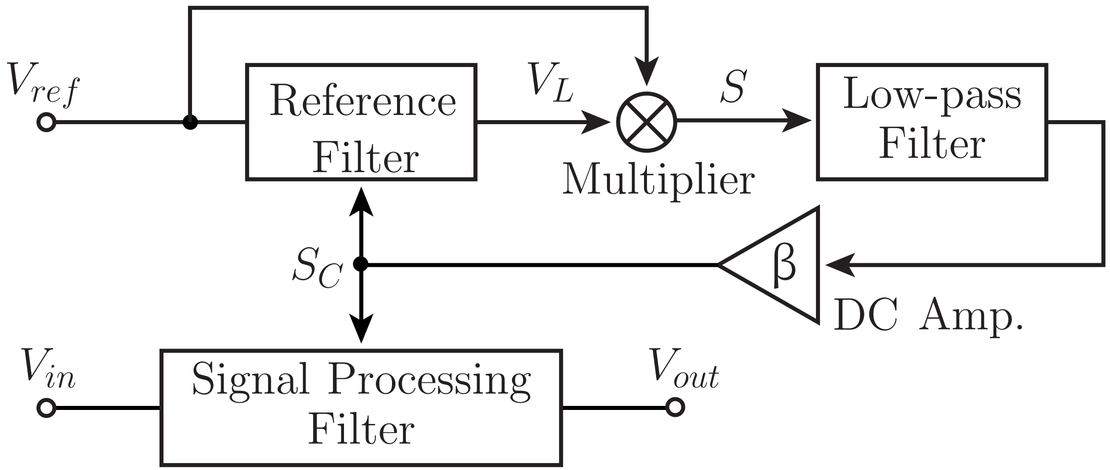
$$T(s)=F[sk_C C_i,\ k_G G_j]$$

インピーダンス・スケーリング

$$T(s)=F\left[s\frac{k_C}{k_G}C_i,\ G_j\right]=T_0\left(s\frac{k_C}{k_G}\right)$$

周波数スケーリング

周波数偏差自動調整回路

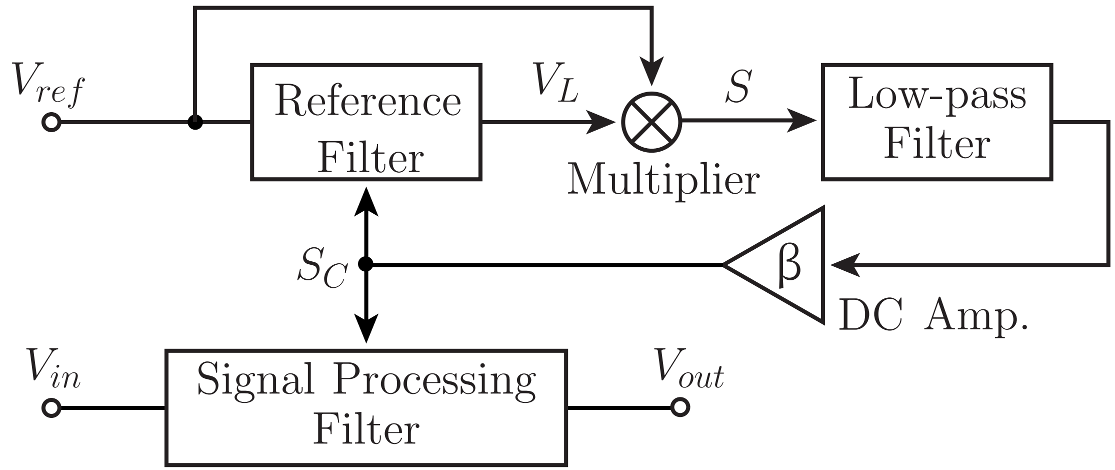


$$V_{ref} = V_m \sin \omega_{ref} t \qquad V_L = AV_m \sin(\omega_{ref} t + \theta)$$

$$S = M(V_{ref} \times V_L) = M\{V_m \sin \omega_{ref} t \times AV_m \sin(\omega_{ref} t + \theta)\}$$

$$= \frac{1}{2} MAV_m^2 \{\cos\theta - \cos(2\omega_{ref} t + \theta)\}$$

$$\boxed{S_C = \frac{1}{2}\beta MAV_m^2 \cos\theta}$$

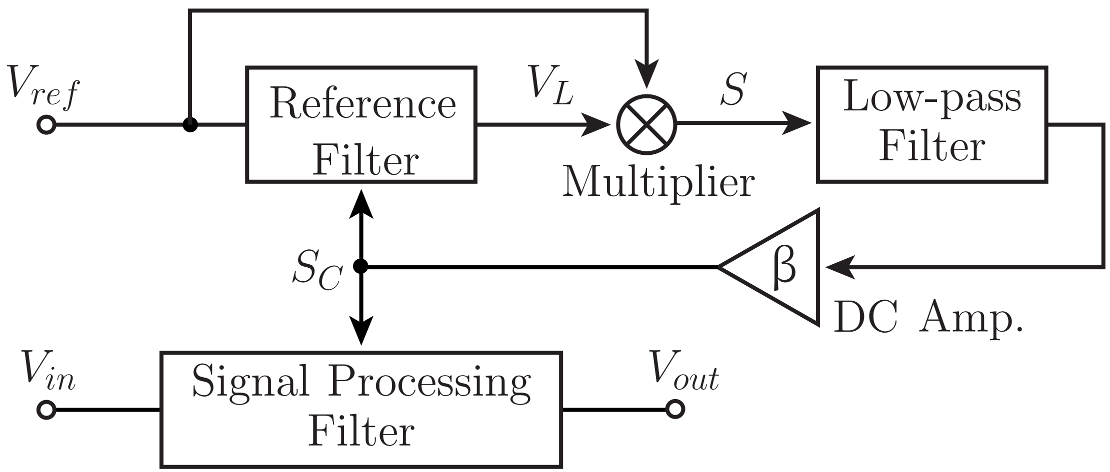


$$\boxed{S_C = \frac{1}{2}\beta MAV_m{}^2 \cos\theta}$$

$\beta \to \infty$:有限値に確定

$$\boxed{\cos\theta = \frac{2S_C}{\beta MAV_m{}^2}}$$

$$\boxed{\cos\theta \to 0}$$



参照用フィルタの伝達関数：

$$T_{L2}(s) = \frac{K\omega_0^{\,2}}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^{\,2}}$$

$$\theta = -\tan^{-1}\frac{\omega_{ref}\,\omega_0}{Q(\omega_0^{\,2} - \omega_{ref}^{\,2})}$$

$$\theta = -90^\circ \rightarrow \omega_0 = \omega_{ref}$$

参照用フィルタの素子偏差の割合

||

信号処理用フィルタの素子偏差の割合

例題

参照用低域通過フィルタ

$$T_{L2}(s)=\frac{K\omega_0^2}{s^2+\frac{\omega_0}{Q}s+\omega_0^2}$$

$K=1$, $\omega_0=2\pi\times1000\,\mathrm{rad/s}$, $Q=5$

乗算回路 $M=1V^{-1}$

直流増幅回路 $\beta=100$

参照入力信号振幅 $V_m=0.2V$

$$\cos\theta=\frac{2S_C}{\beta MAV_m^2}$$

$A=?$

$S_C=?$

$\omega_{ref} \approx \omega_0$とすれば

$$A = \left| T_{L2}(j\omega_{ref}) \right| = \left| \frac{K\omega_0{}^2}{-\omega_{ref}{}^2 + j\frac{\omega_0}{Q}\omega_{ref} + \omega_0{}^2} \right| \approx Q$$

$g_m = \alpha S_C$かつ$g_m \propto \omega_0$とすれば

$\omega_{00} \rightarrow S_{C0}$

$\omega_0 \rightarrow S_C$

$$\boxed{\frac{\omega_0}{\omega_{00}} = \frac{S_C}{S_{C0}}}$$

$$\boxed{S_C = \frac{\omega_0}{\omega_{00}} S_{C0}}$$

$M = 1V^{-1} \qquad \beta = 100 \qquad V_m = 0.2V \qquad A \approx Q = 5$

$\omega_{00} = 2\pi \times 800\,\mathrm{rad/s}$, $S_{C0} = 0.1V \rightarrow S_C = 0.125V$

$$\cos\theta = \frac{2S_C}{\beta M A V_m^{\,2}} = 0.03125 \qquad \theta = -88.2度$$

$$\theta = -\tan^{-1}\frac{\omega_{ref}\,\omega_0}{Q(\omega_0^{\,2} - \omega_{ref}^{\,2})}$$

$$\boxed{\omega_0 = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4Q^2\tan^2\theta}}{2Q\tan\theta}\,\omega_{ref} = 0.992\,\omega_{ref}}$$