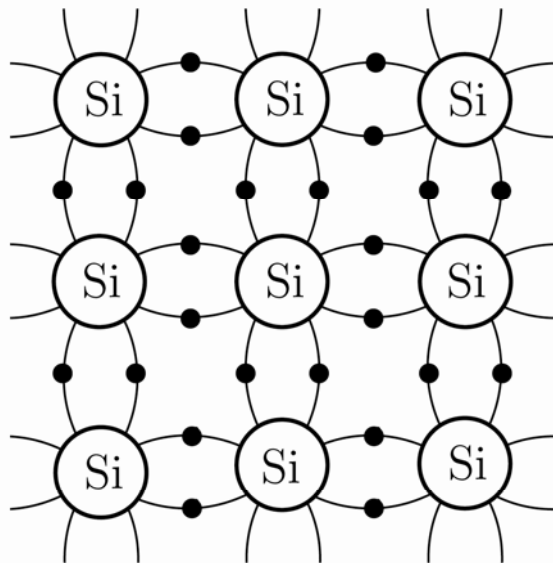
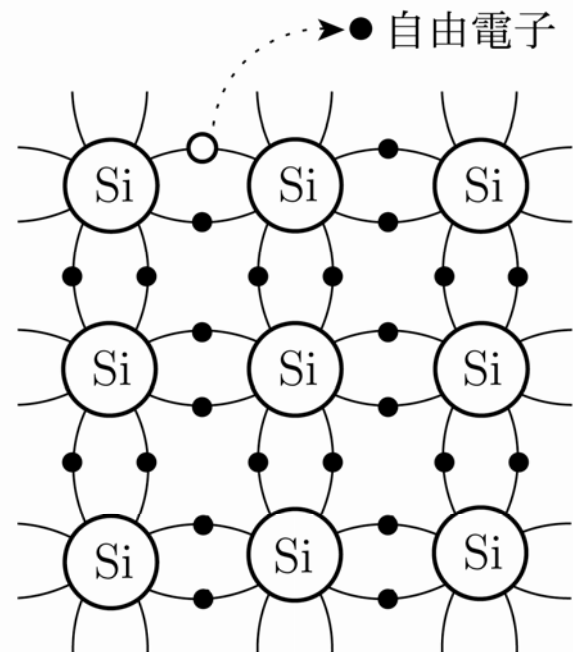


トランジスタのモデリング

半導体の構造



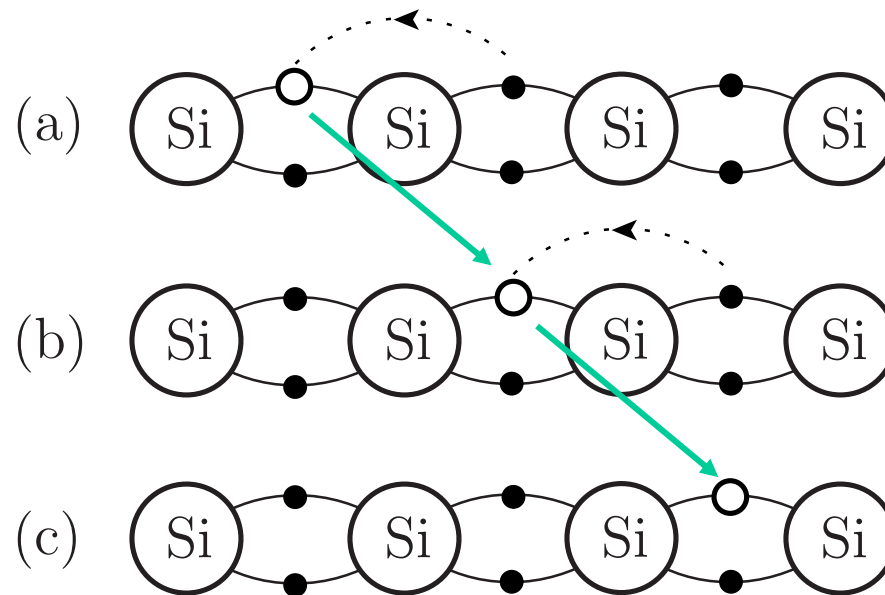
○ Si シリコンの原子核
● 電子



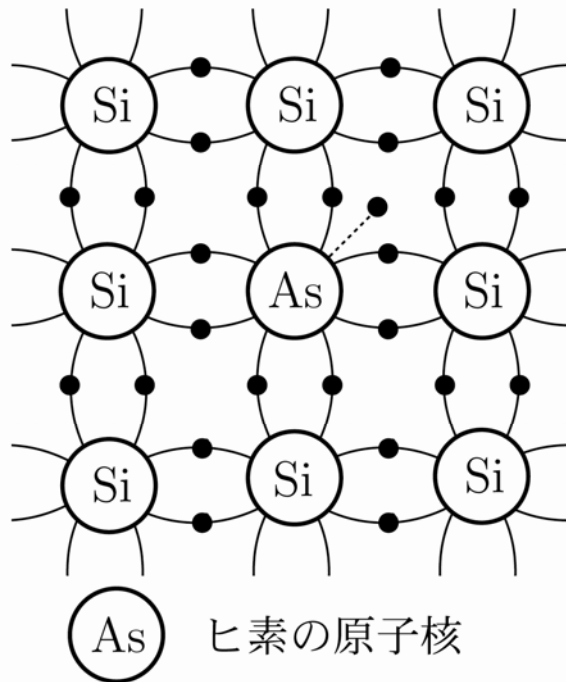
○ ホール

自由電子とホールの発生

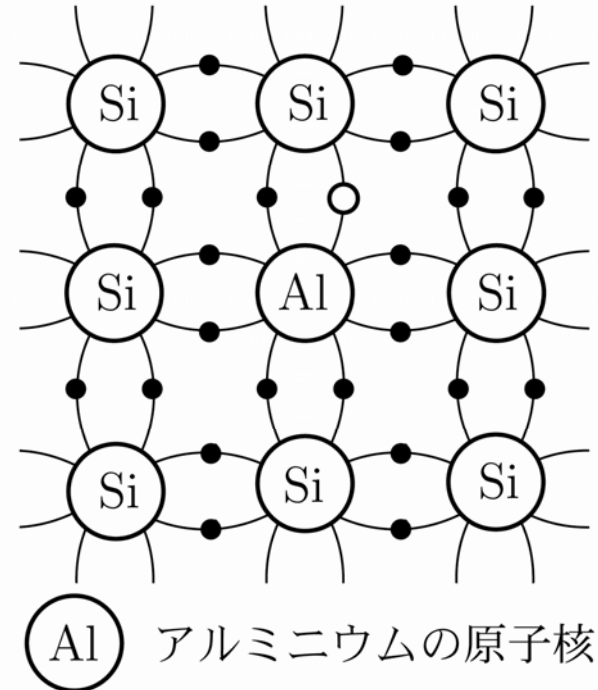
ホールの移動



不純物半導体

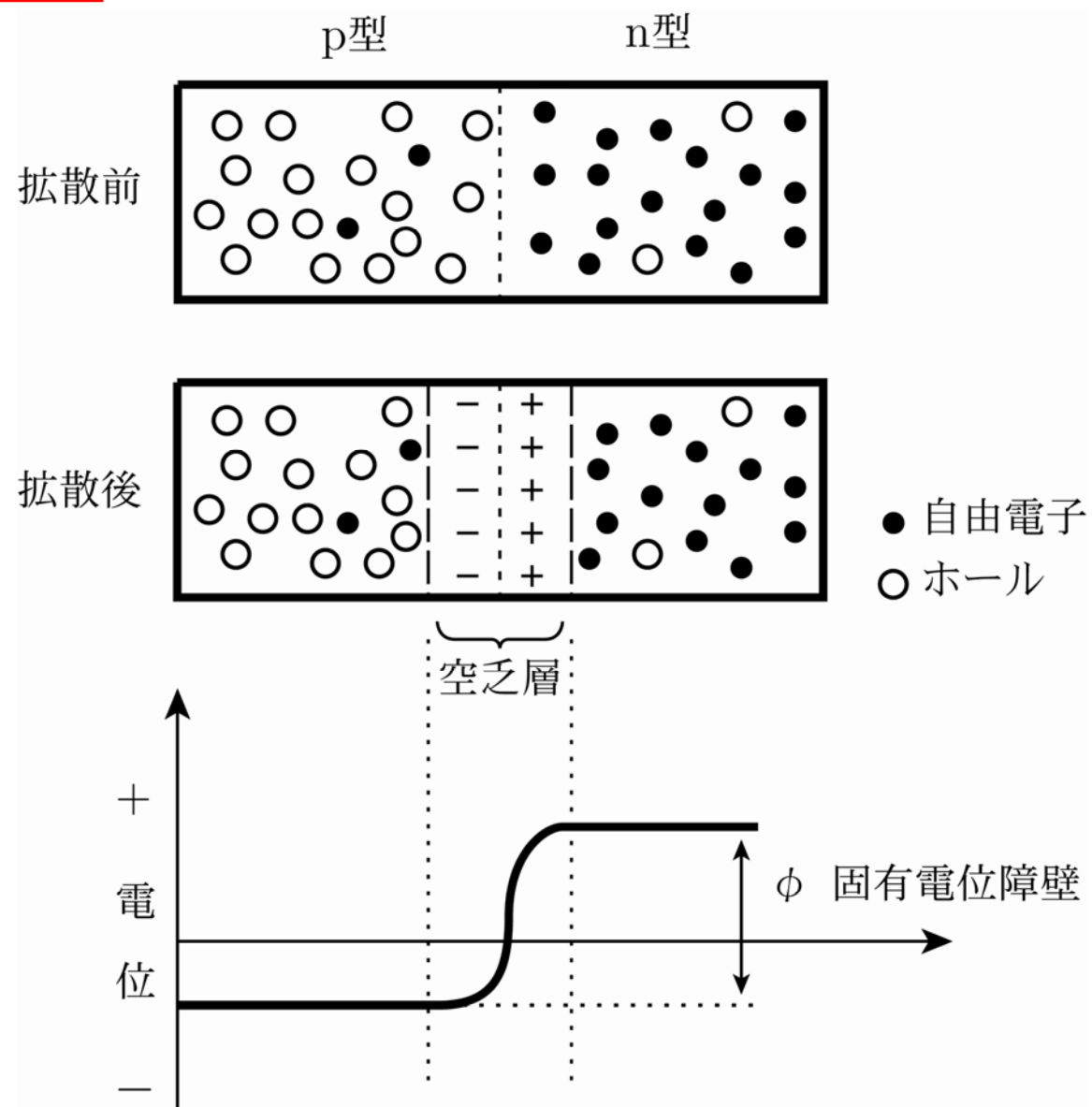


n型半導体

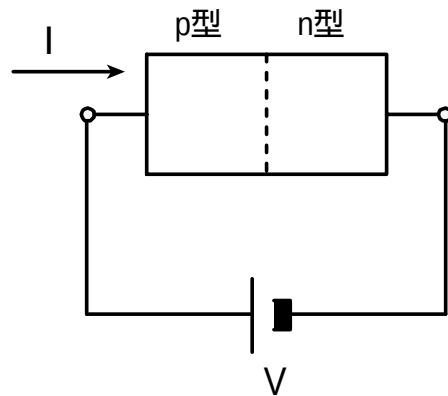


p型半導体

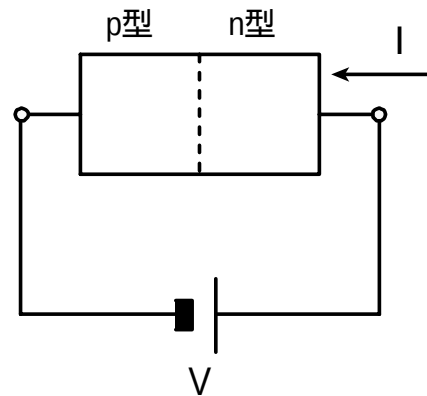
拡散と再結合



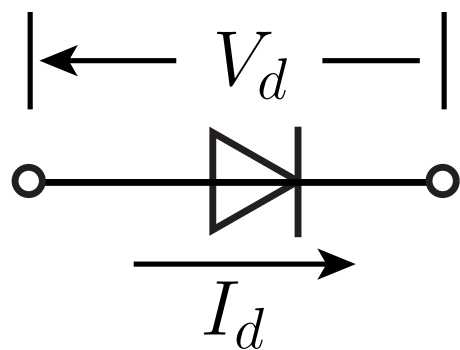
pn接合ダイオードの特性



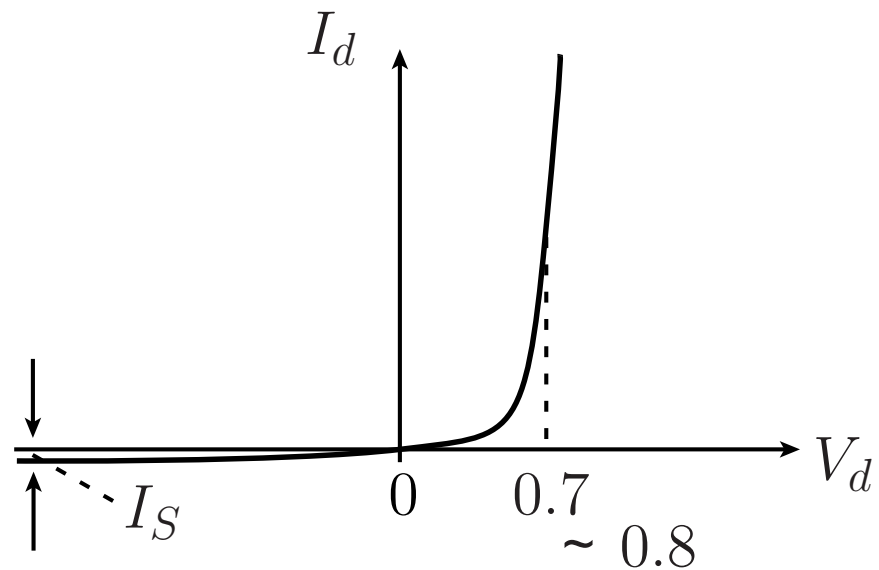
(a) 順方向バイアス



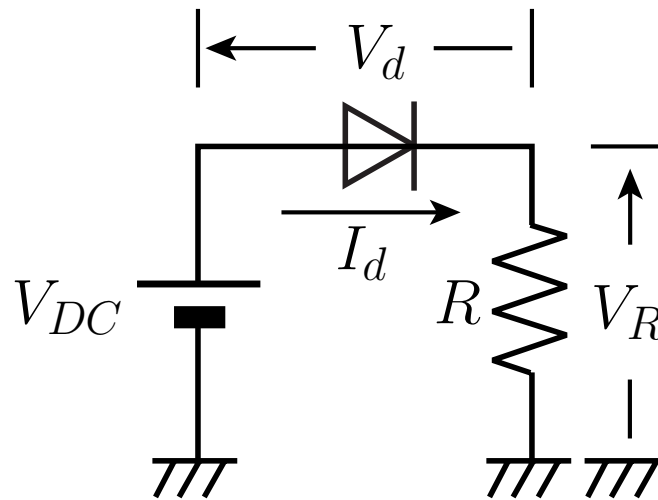
(b) 逆方向バイアス



$$I_d = I_S \left\{ \exp\left(\frac{qV_d}{kT}\right) - 1 \right\}$$



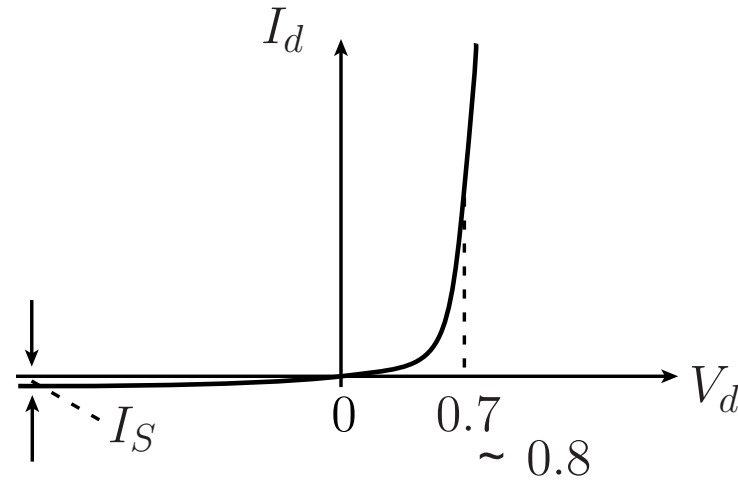
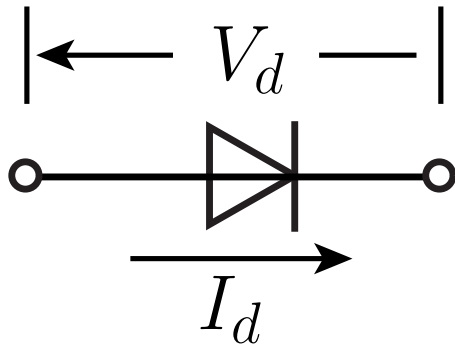
計算ができない？



$$R=800\Omega, I_S=10^{-15}\text{A}, k=1.38\times 10^{-23}\text{J}\cdot\text{K}^{-1},$$
$$q=1.6\times 10^{-19}\text{C}, T=300\text{K}, V_{DC}=1.5\text{V}$$

$$I_d = I_S \left\{ \exp\left(\frac{qV_d}{kT}\right) - 1 \right\} \qquad I_d = \frac{V_{DC} - V_d}{R}$$

未知の変数は V_d と I_d の2個で，方程式も2個だが
 V_d や I_d について解くことができない．



実際のpn接合ダイオードの特性

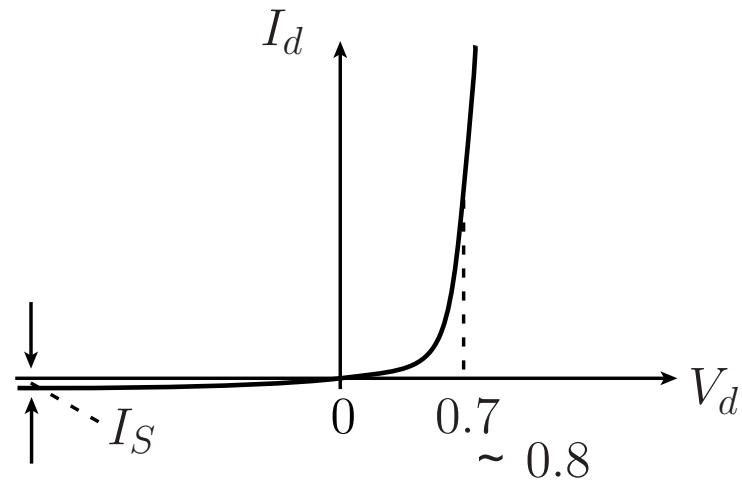
$$I_S = 10^{-15} \text{ A}, \quad k = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}, \quad q = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}, \quad T = 300 \text{ K}$$

$$I_D = 0.10 \text{ mA} \text{ のとき } V_D = 0.655 \text{ V}$$

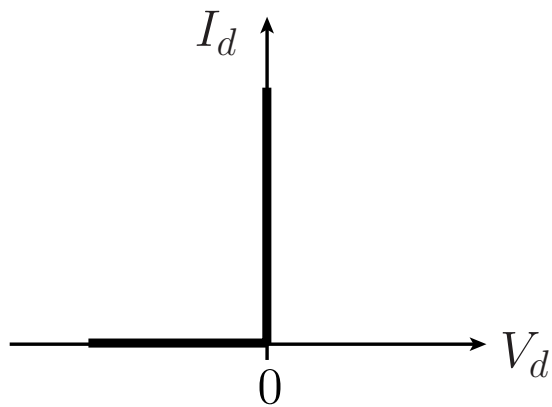
$$V_D = \frac{kT}{q} \ln\left(\frac{I_D}{I_S} + 1\right) \text{ より } I_D = 1.0 \text{ mA} \text{ のとき } V_D = 0.715 \text{ V}$$

$$I_D = 10 \text{ mA} \text{ のとき } V_D = 0.775 \text{ V}$$

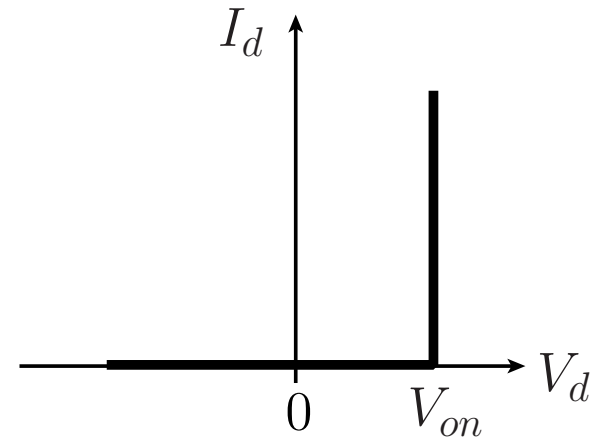
I_D が大きく変化しても V_D はほぼ一定



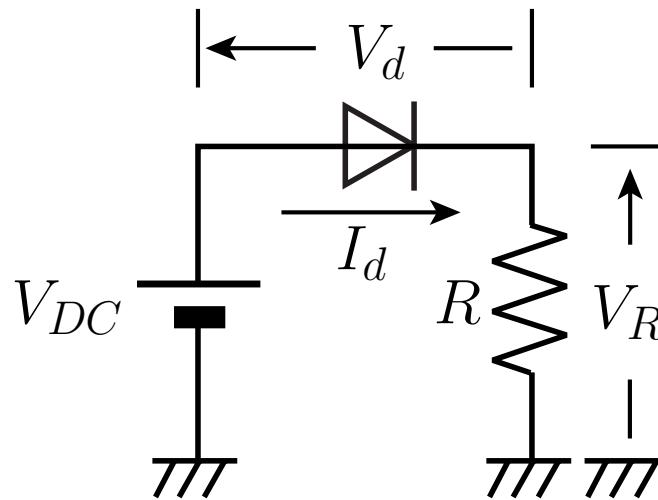
実際のpn接合ダイオードの特性



理想ダイオード特性



近似ダイオード特性

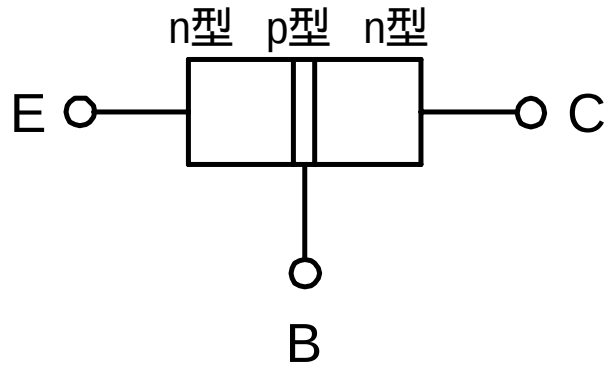


$R=800\Omega$, $I_S=10^{-15}\text{A}$, $k=1.38\times 10^{-23}\text{J}\cdot\text{K}^{-1}$,
 $q=1.6\times 10^{-19}\text{C}$, $T=300\text{K}$, $V_{DC}=1.5\text{V}$, $V_D=0.70\text{V}$

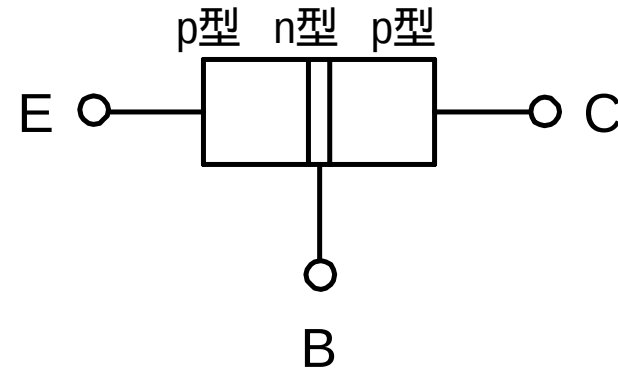
近似計算: $V_D=0.70\text{V}$ $I_D=\frac{V_{DC}-V_D}{R}=1.0\text{mA}$

真の値: $V_D=0.7145\text{V}$, $I_D=0.982\text{mA}$

バイポーラトランジスタのモデリング



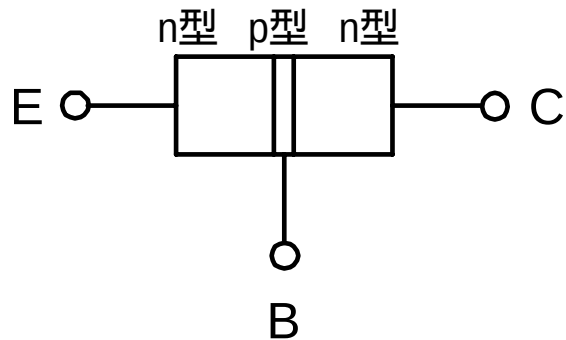
(a) npnトランジスタ



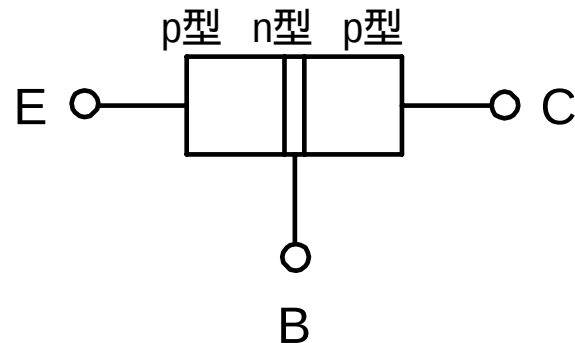
(b) pnpトランジスタ

E: Emitter , エミッタ
B: Base , ベース
C: Collector , コレクタ

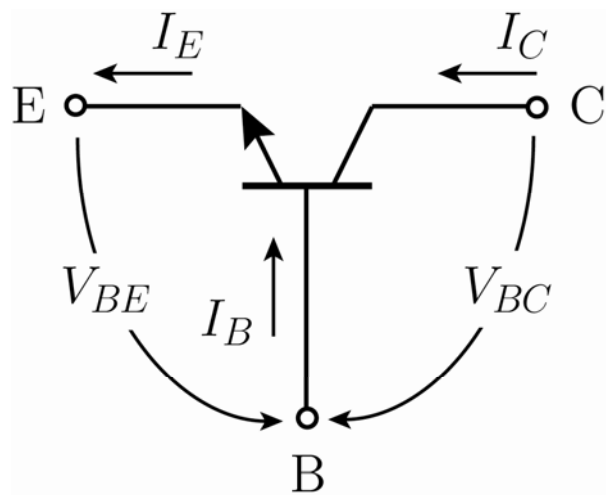
バイポーラトランジスタの記号



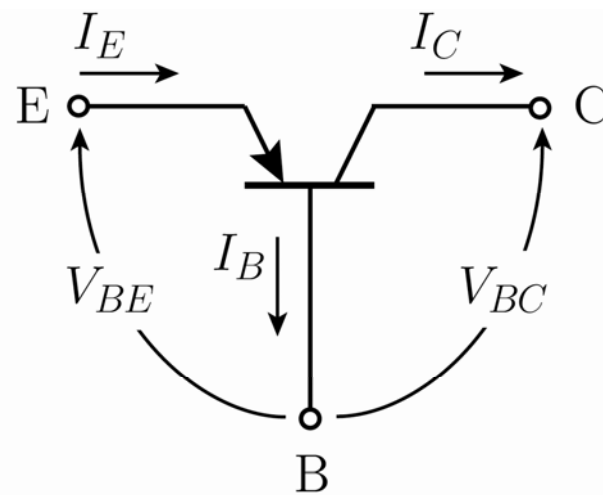
(a) npn トランジスタ



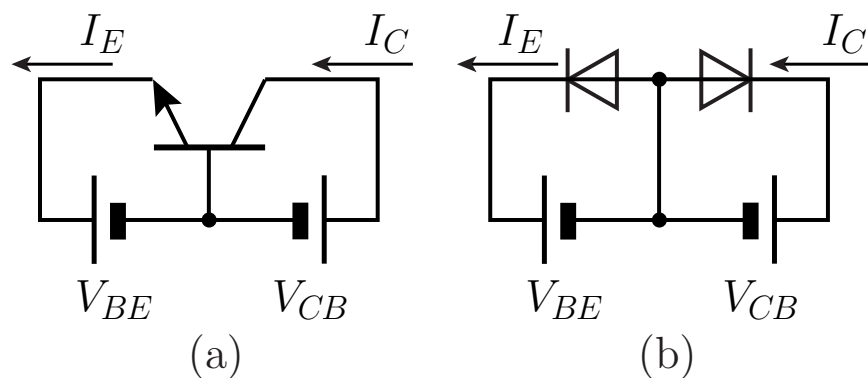
(b) pnp トランジスタ



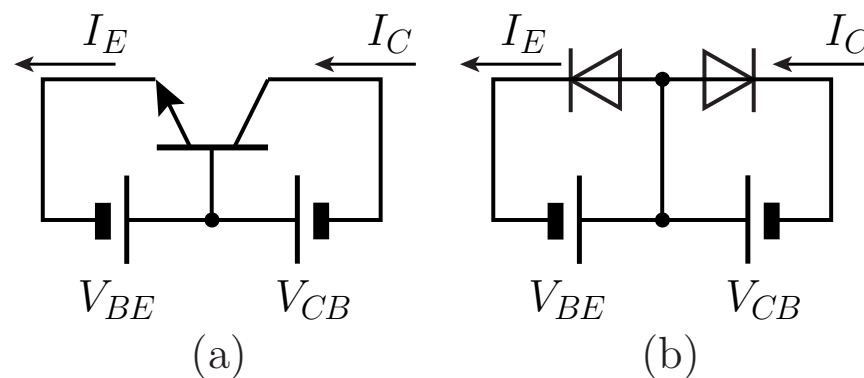
(a) npn トランジスタ



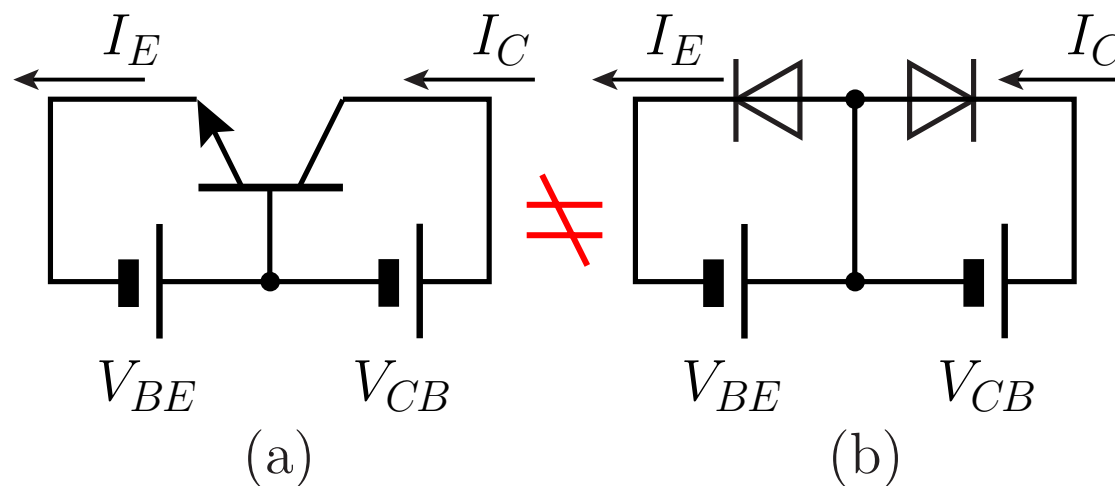
(b) pnp トランジスタ



遮断領域： $V_{BE} < 0, V_{BC} < 0$

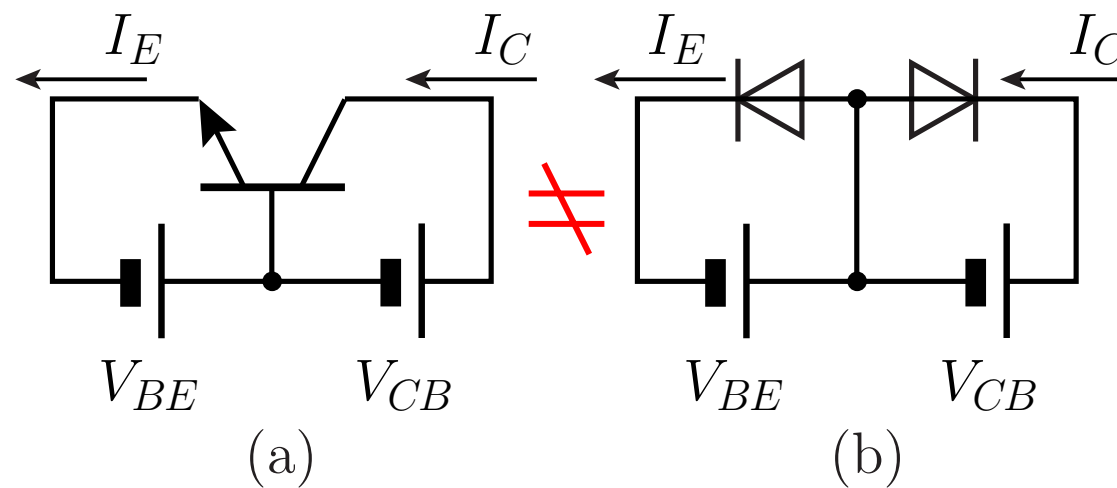
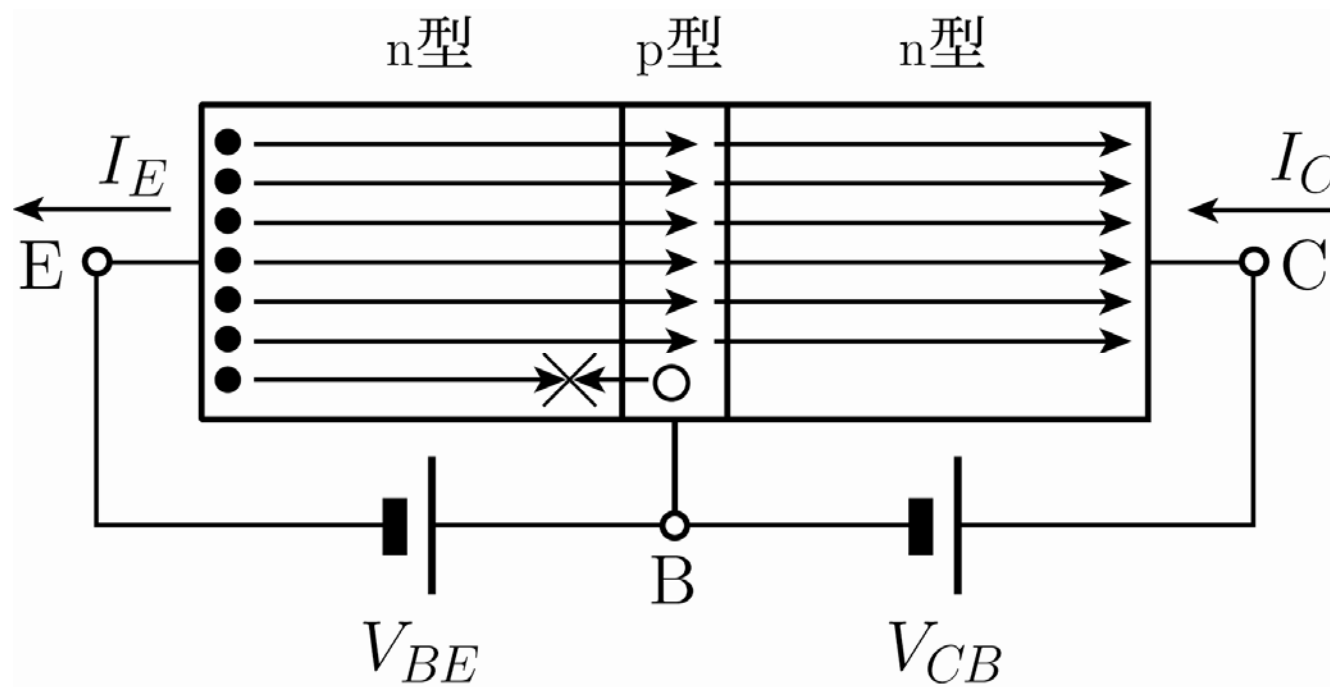


飽和領域： $V_{BE} > 0, V_{BC} > 0$

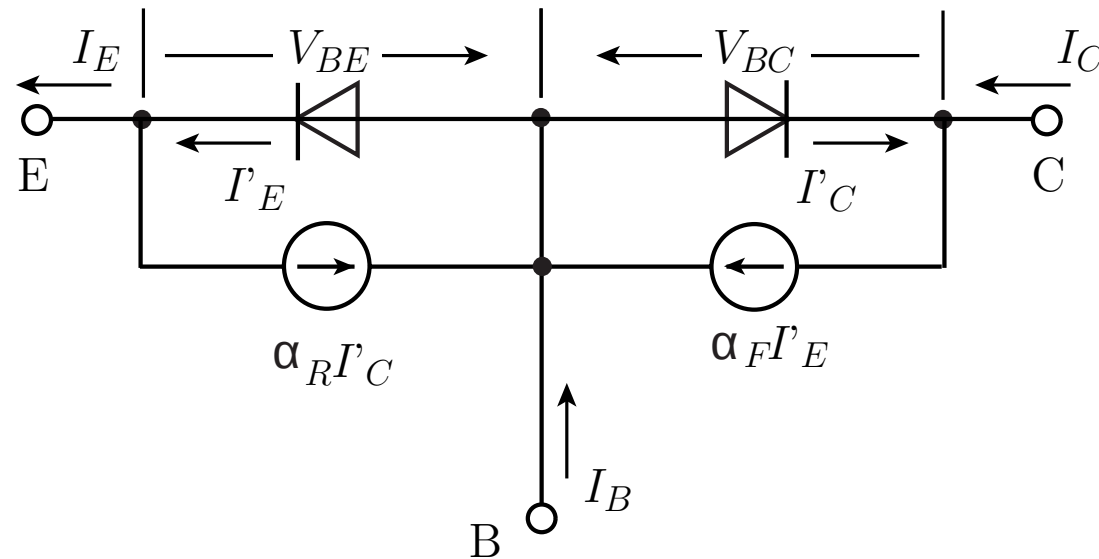


能動活性領域： $V_{BE} > 0, V_{BC} < 0$

能動活性領域

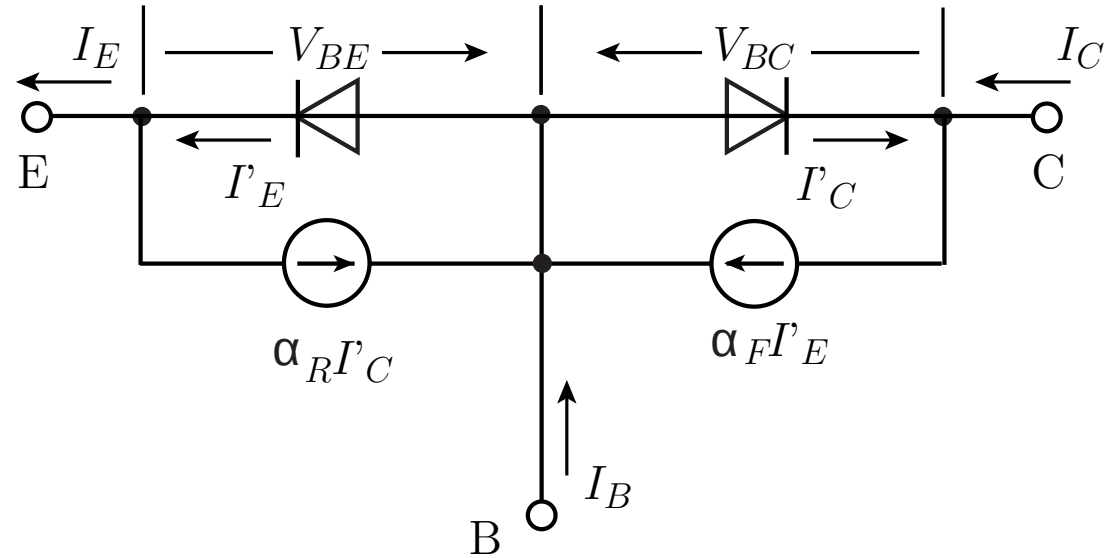


Ebers-Mollモデル



遮断領域：	$V_{BE} < 0, V_{BC} < 0$
能動活性領域：	$V_{BE} > 0, V_{BC} < 0$
飽和領域：	$V_{BE} > 0, V_{BC} > 0$
逆方向能動活性領域：	$V_{BE} < 0, V_{BC} > 0$

Ebers-Mollの方程式



$$\begin{aligned} I_C &= \alpha_F I_E' - I_C' \\ I_E &= I_E' - \alpha_R I_C' \end{aligned}$$

$$I_C' = I_{CS} \left\{ \exp\left(\frac{qV_{BC}}{kT}\right) - 1 \right\}$$

$$I_E' = I_{ES} \left\{ \exp\left(\frac{qV_{BE}}{kT}\right) - 1 \right\}$$

$$I_C = \alpha_F I_{ES} \left\{ \exp\left(\frac{qV_{BE}}{kT}\right) - 1 \right\} - I_{CS} \left\{ \exp\left(\frac{qV_{BC}}{kT}\right) - 1 \right\}$$

$$I_E = I_{ES} \left\{ \exp\left(\frac{qV_{BE}}{kT}\right) - 1 \right\} - \alpha_R I_{CS} \left\{ \exp\left(\frac{qV_{BC}}{kT}\right) - 1 \right\}$$

能動活性領域では $\exp\left(\frac{qV_{BE}}{kT}\right) \gg 1$, $\exp\left(\frac{qV_{BC}}{kT}\right) \ll 1$ と近似

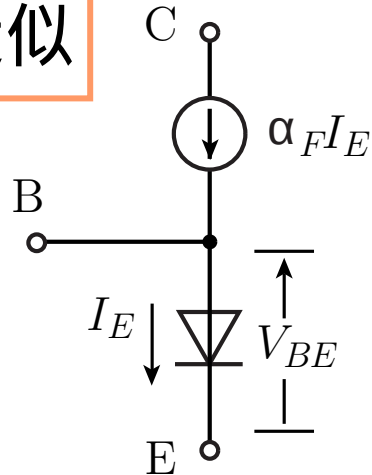
$$I_C = \alpha_F I_{ES} \exp\left(\frac{qV_{BE}}{kT}\right) + I_{CS}$$

$$I_E = I_{ES} \exp\left(\frac{qV_{BE}}{kT}\right) + \alpha_R I_{CS}$$

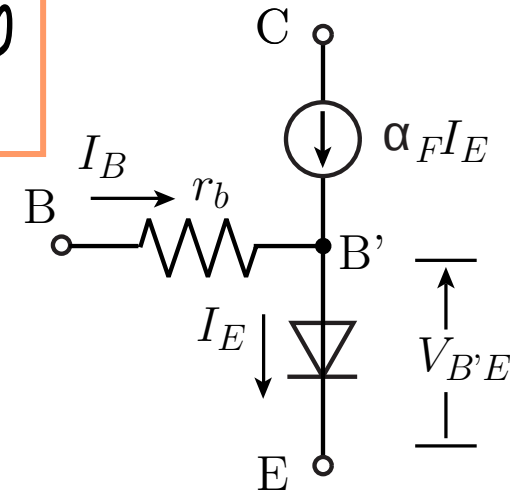
$$I_C = \alpha_F I_E + (1 - \alpha_F \alpha_R) I_{CS} = \alpha_F I_E + I_{CO}$$

$$I_C = \alpha_F I_E + (1 - \alpha_F \alpha_R) I_{CO} = \alpha_F I_E + I_{CO}$$

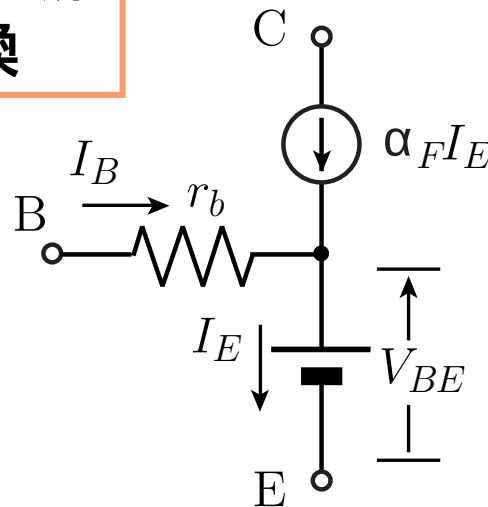
$I_{CO} \approx 0$ と近似



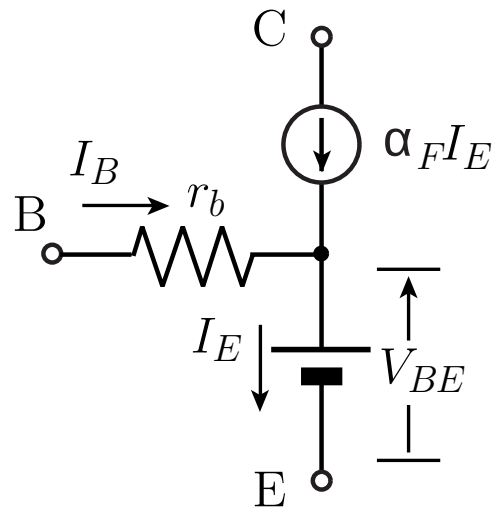
ベース広がり
抵抗を考慮



ダイオードを直流
電圧源に変換



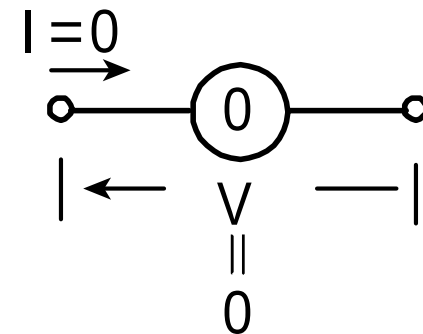
$$I_C = \alpha_F I_E \left(1 + \frac{V_{CE}}{V_A}\right)$$



$$\alpha_F \rightarrow 1$$

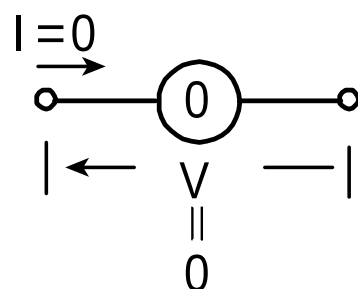
$$I_B = I_E - I_C = (1 - \alpha_F) I_E \rightarrow 0$$

$$V_{BB'} = r_b I_B \rightarrow 0$$

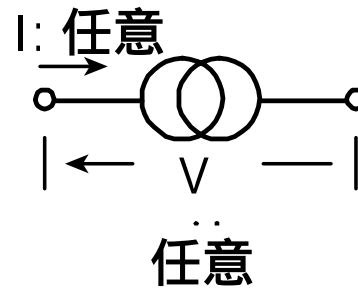


(a) ナレータ

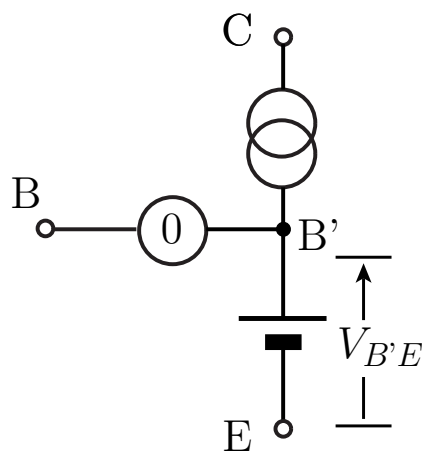
ナレータノ・レータによるトランジスタのモデリング



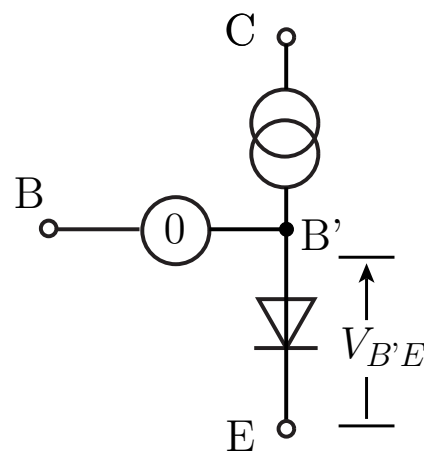
(a) ナレータ



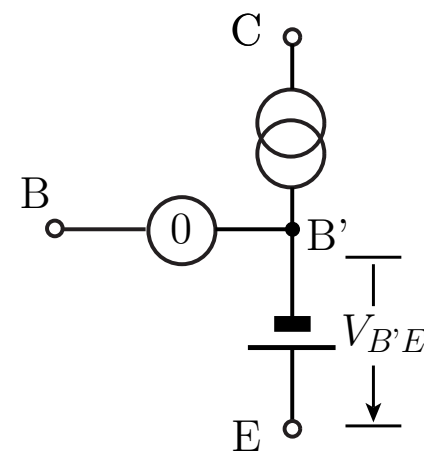
(b) ノレータ



npnトランジスタ
モデル(1)

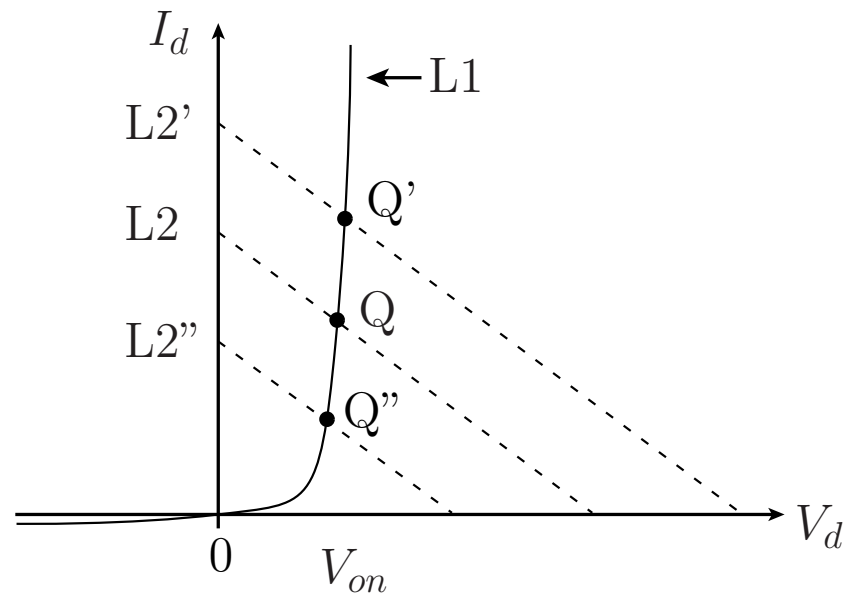
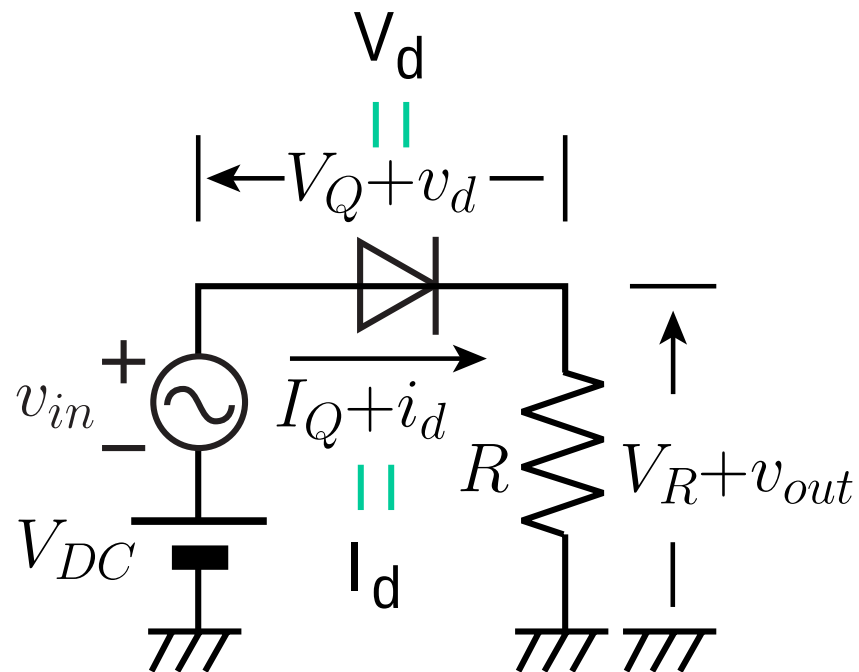


npnトランジスタ
モデル(2)



pnpトランジスタ
モデル

直流成分(大信号)と信号成分(小信号)の分離

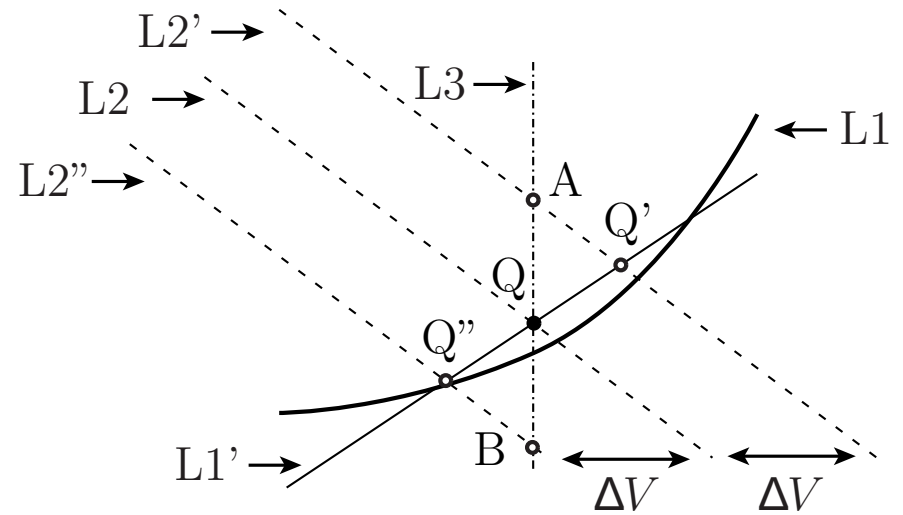
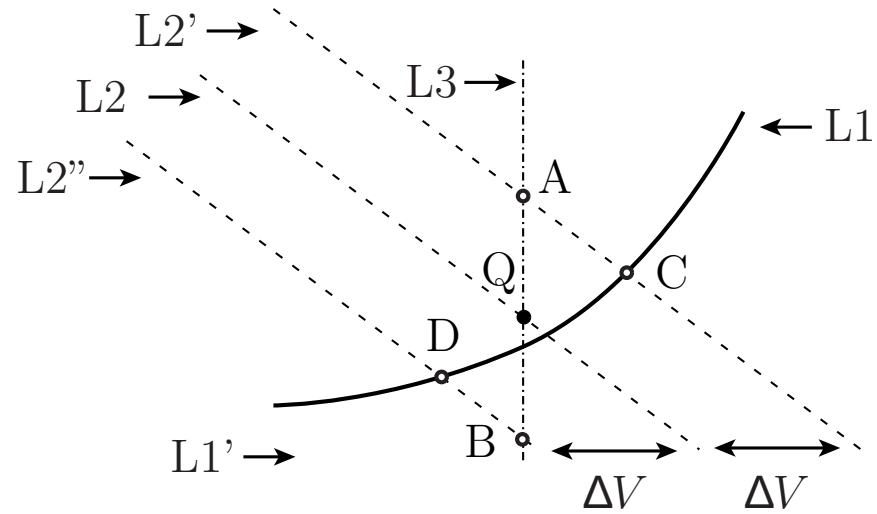


$$I_d = \frac{V_{DC} + v_{in} - V_d}{R} = -\frac{1}{R}V_d + \frac{V_{DC} + v_{in}}{R}$$

$$I_d = I_S \left\{ \exp\left(\frac{qV_d}{kT}\right) - 1 \right\}$$

$$I_d = I_Q + i_d$$

$$V_d = V_Q + v_d$$

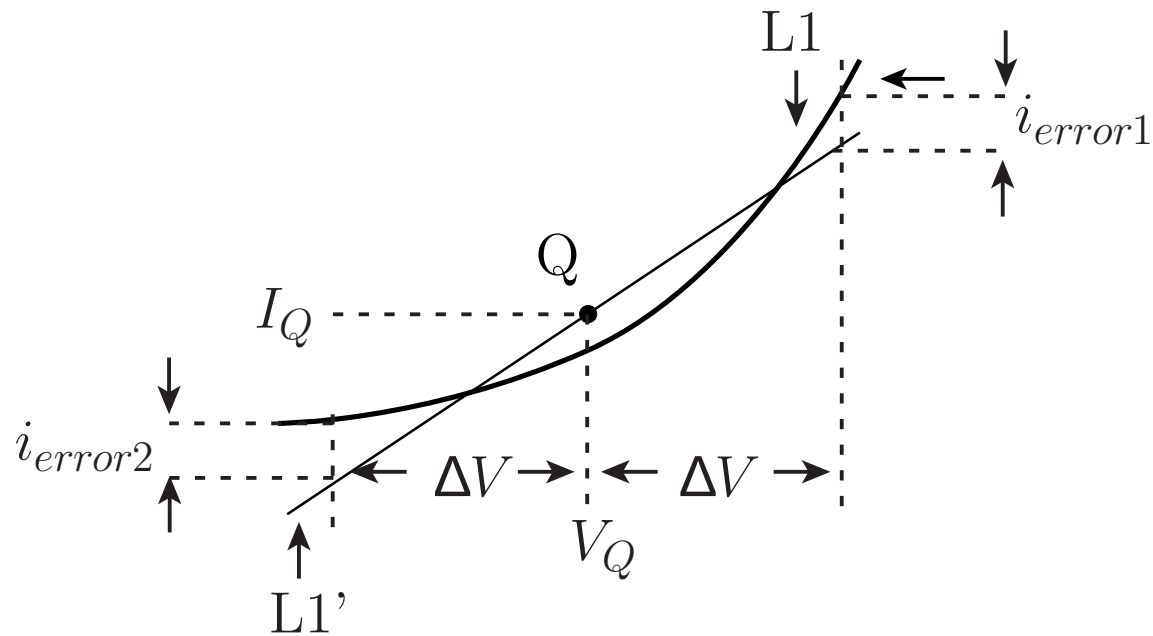


$$I_d \approx I_Q + \left. \frac{\partial I_d}{\partial V_d} \right|_{V_d = V_Q} \cdot v_d = I_Q + i_d$$

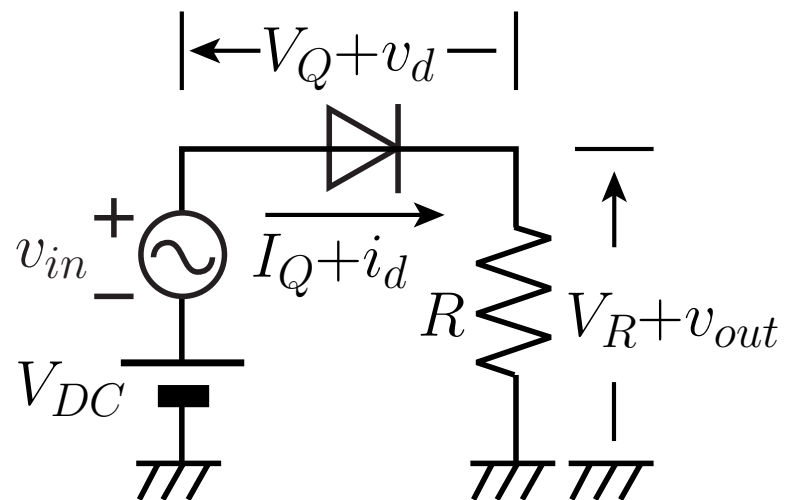
信号成分 = 直流成分からの変化分

直線近似の導入

$$i_d = \left. \frac{\partial I_d}{\partial V_d} \right|_{V_d=V_Q} \cdot v_d$$

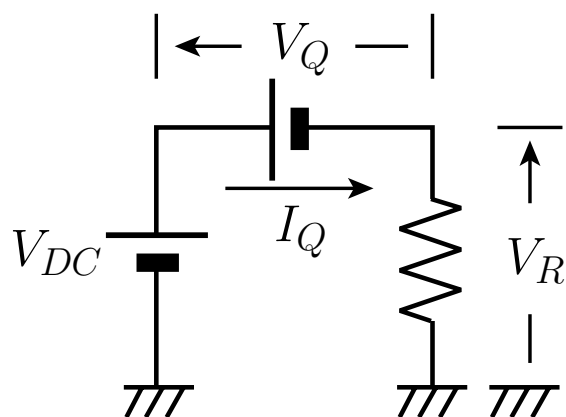


点Qを原点とすると電圧と電流は比例関係 → 抵抗



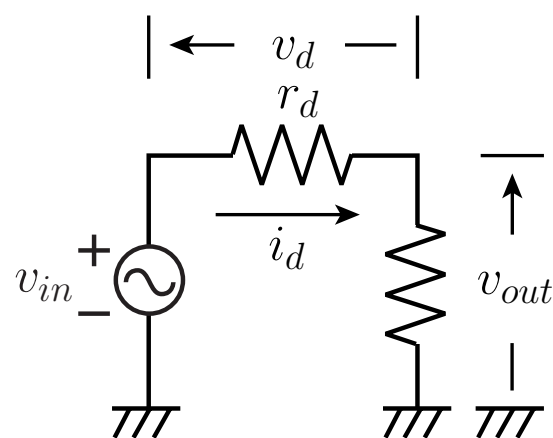
$$V_{DC} + v_{in} = (V_Q + v_d) + (V_R + v_{out})$$

直流成分



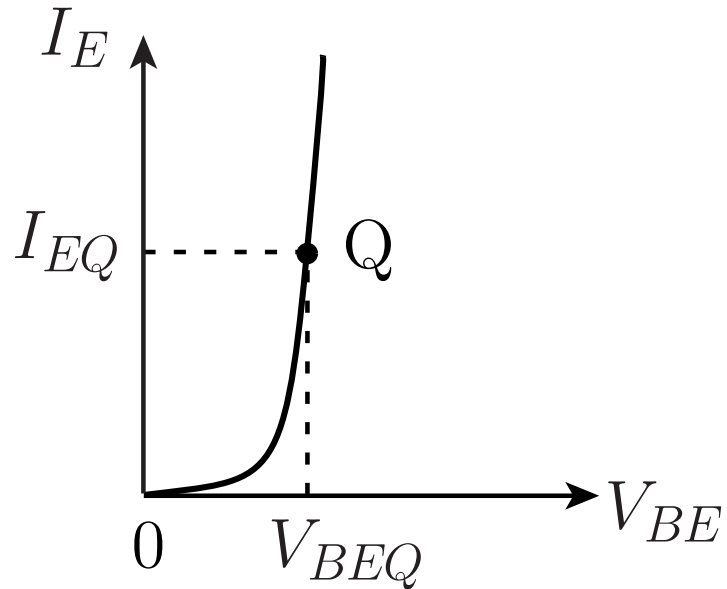
$$V_{DC} = V_Q + V_R$$

信号成分



$$v_{in} = v_d + v_{out}$$

バイポーラトランジスタの小信号モデル

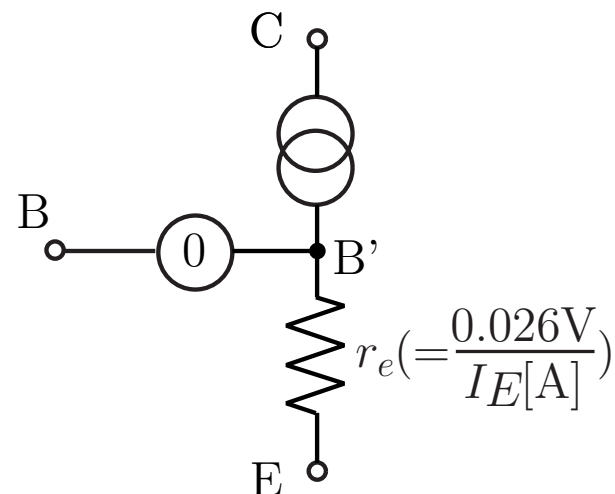
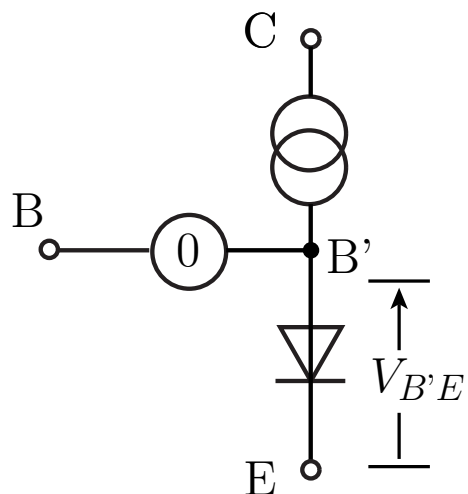


$$I_E = I_{ES} \left\{ \exp\left(\frac{qV_{BE}}{kT}\right) - 1 \right\}$$



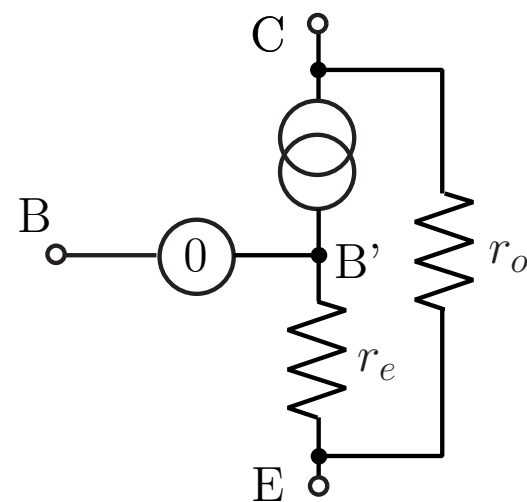
$$I_E = \left. \frac{\partial I_E}{\partial V_{BE}} \right|_{V_{BE}=V_{BEQ}} \cdot \Delta V_{BE} + I_{EQ}$$

$$r_e = \left[\left. \frac{\partial I_E}{\partial V_{BE}} \right|_{V_{BE}=V_{BEQ}} \right]^{-1} \approx \frac{kT}{qI_{EQ}} = \frac{0.026[\text{V}]}{I_{EQ}[\text{A}]}$$

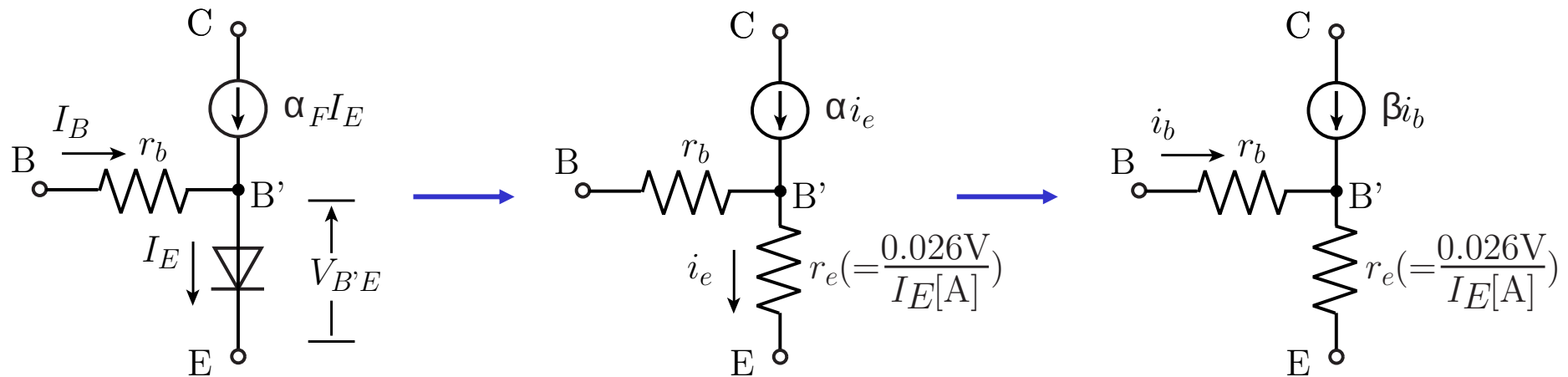


アーリー効果 : $I_C = \alpha_F I_E \left(1 + \frac{V_{CE}}{V_A}\right)$

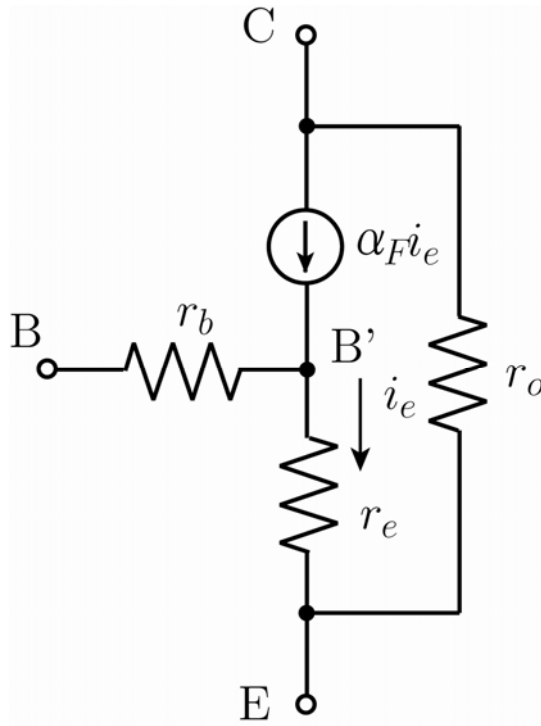
$$r_o = \frac{1}{\left. \frac{\partial I_C}{\partial V_{CE}} \right|_{V_{CE} = V_{CEQ}}} = \frac{V_A}{\alpha_F I_{EQ}}$$



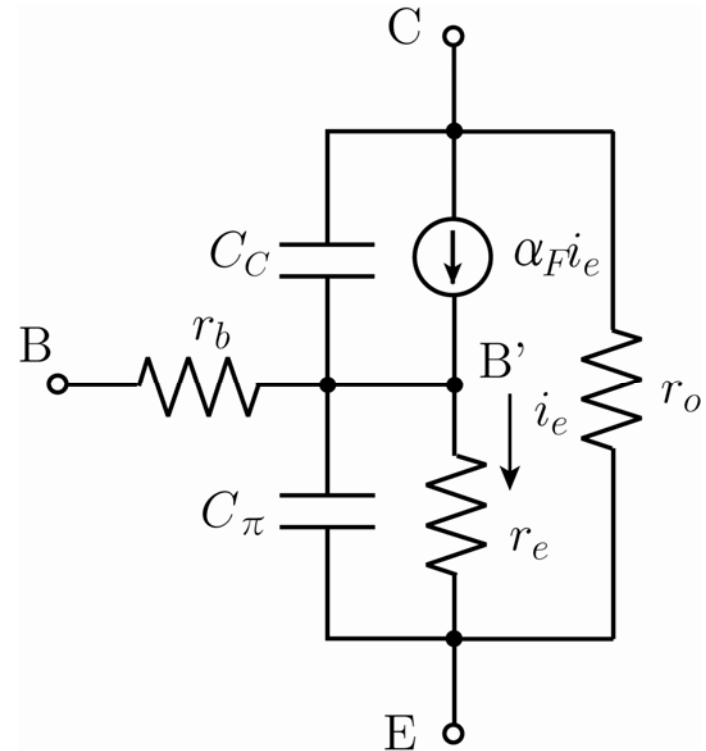
他のバイポーラトランジスタの小信号モデル



バイポーラトランジスタの高周波小信号モデル



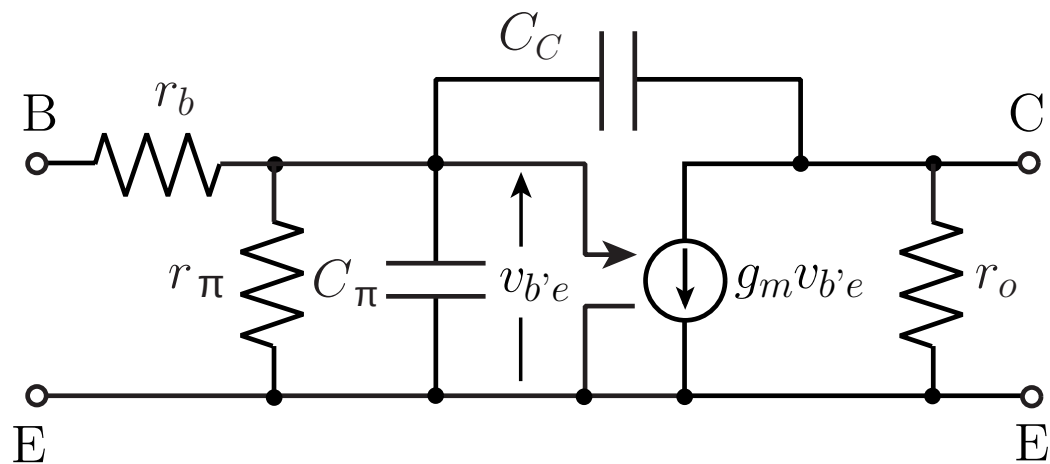
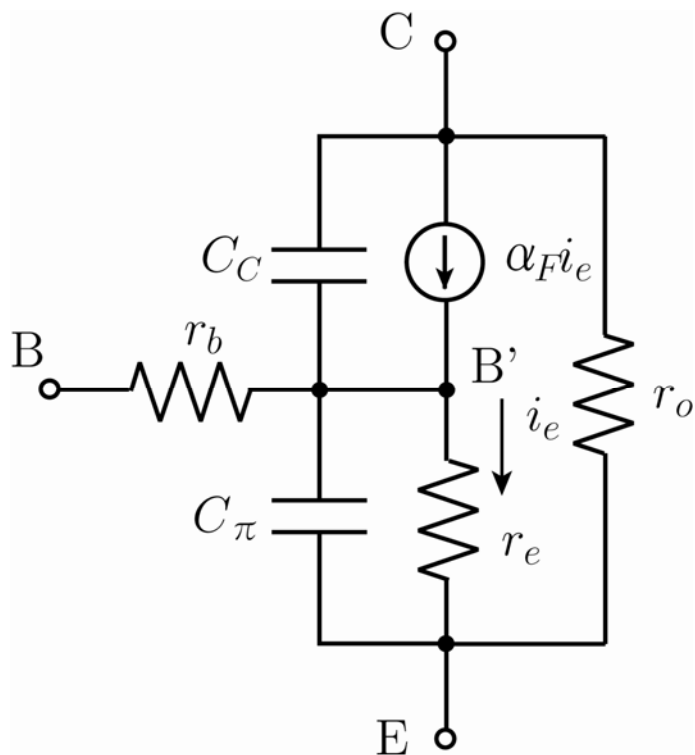
寄生容量を考慮



$$\alpha_F = \frac{\alpha_0}{1 + j \frac{\omega}{\omega_\alpha}}$$

$$\omega_\alpha = \frac{1}{C_\pi r_e} : \text{電流増幅率遮断角周波数}$$

等価変換

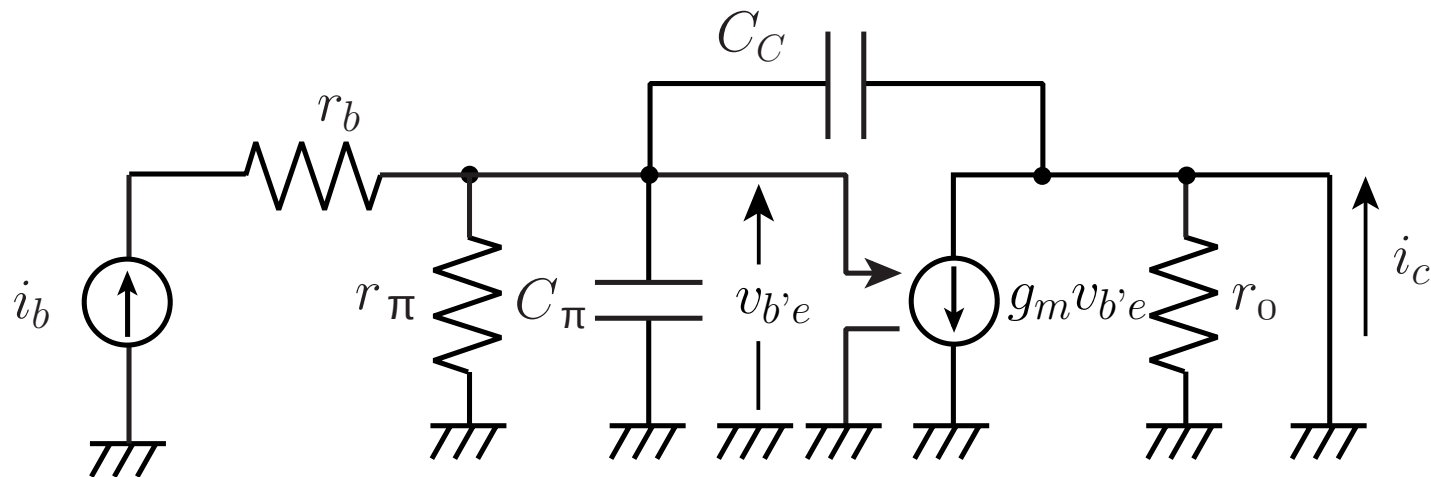


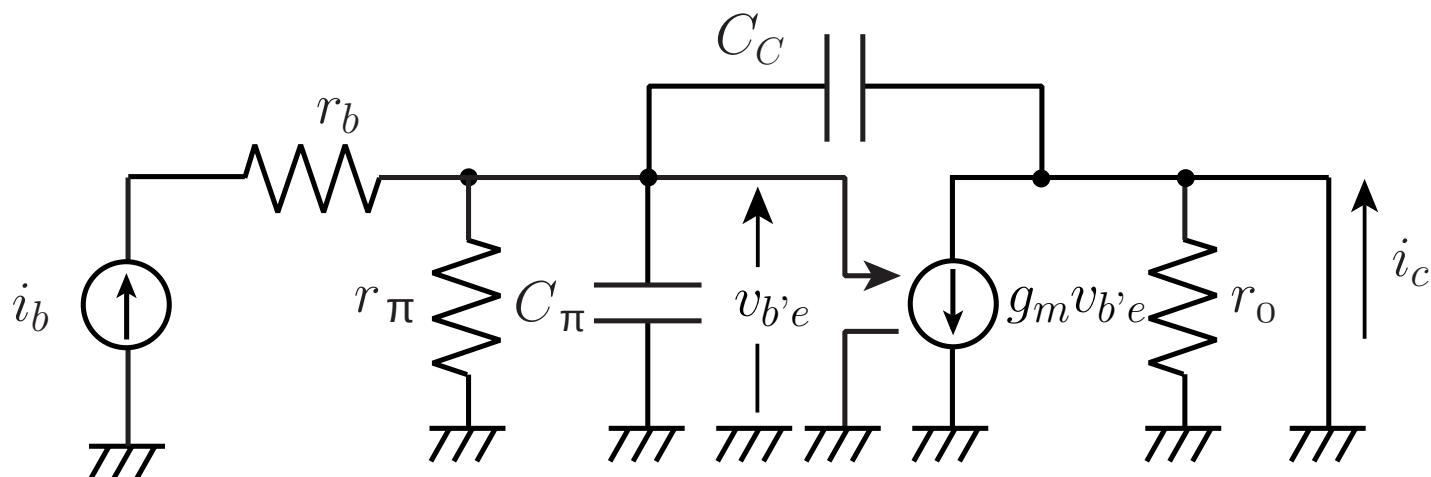
$$r_\pi = \frac{r_e}{1 - \alpha_0}$$

$$g_m = \frac{\alpha_0}{r_e}$$

バイポーラトランジスタの f_T

f_T : $|i_c| = |i_b|$ となる周波数





$$v_{b'e} = \frac{r_{\pi}}{1 + j\omega(C_{\pi} + C_C)r_{\pi}} i_b$$

$$\frac{i_c}{i_b} = \frac{(g_m - j\omega C_C)r_{\pi}}{1 + j\omega(C_{\pi} + C_C)r_{\pi}}$$

$$i_c = g_m v_{b'e} - j\omega C_C v_{b'e}$$

$g_m \gg \omega C_C$, $\omega(C_{\pi} + C_C)r_{\pi} \gg 1$ と仮定

$$\frac{i_c}{i_b} \approx \frac{g_m r_{\pi}}{j\omega(C_{\pi} + C_C)r_{\pi}}$$

$$f_T = \frac{g_m}{2\pi(C_{\pi} + C_C)}$$

$$f_T = \frac{g_m}{2\pi(C_\pi + C_C)}$$

$$C_\pi = \frac{\Delta Q_b}{V_{b'e}}$$

$$C_\pi \gg C_C$$

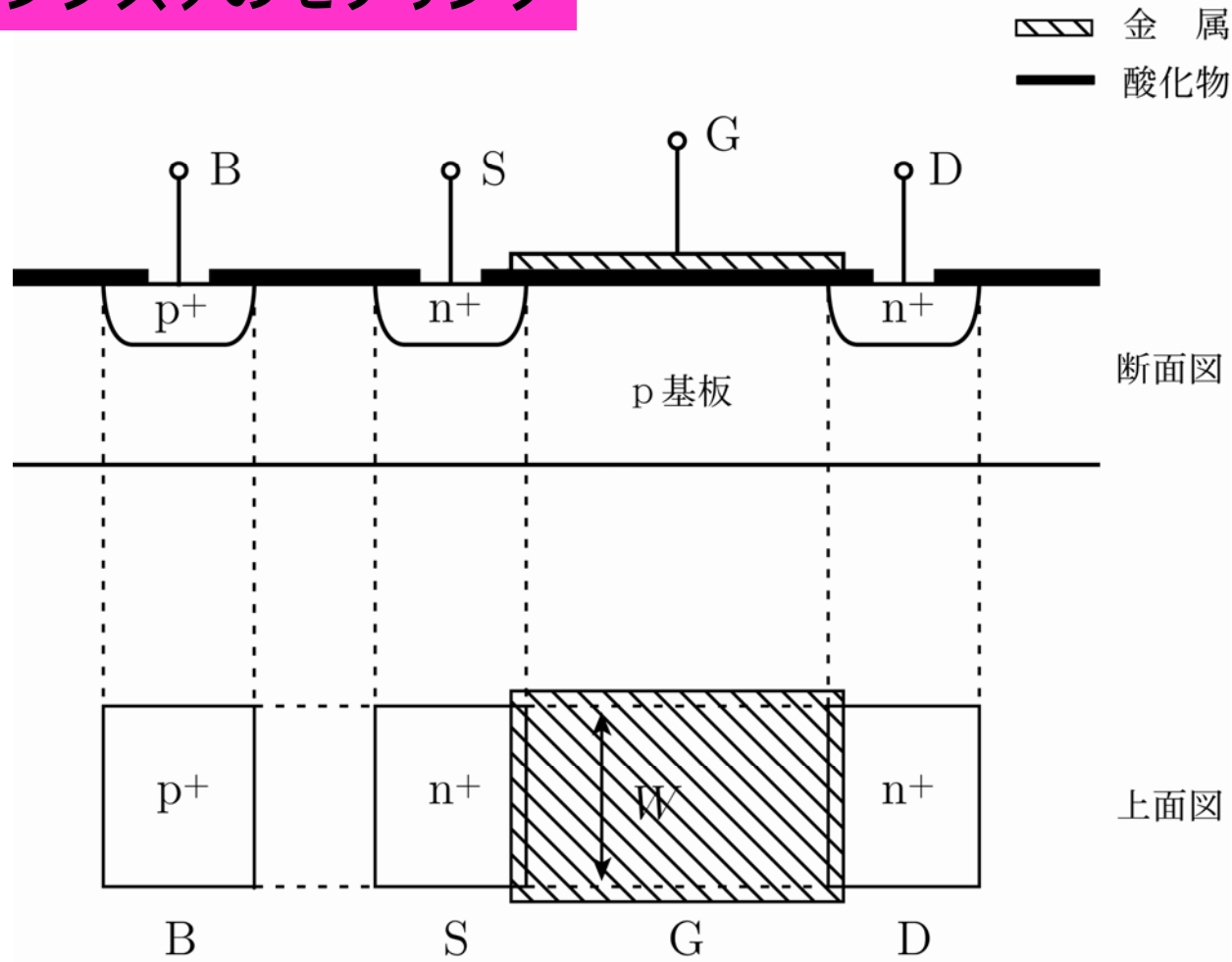
$$f_T \approx \frac{g_m}{2\pi C_\pi} = \frac{g_m V_{b'e}}{2\pi \Delta Q_b} = \frac{i_c}{2\pi \Delta Q_b}$$

$$\frac{i_c}{\Delta Q_b} = \frac{I_C}{Q_b} = \frac{qAD_n \frac{n_p(0)}{W_B}}{\frac{1}{2}n_p(0)W_B qA} = \frac{2D_n}{W_B^2}$$

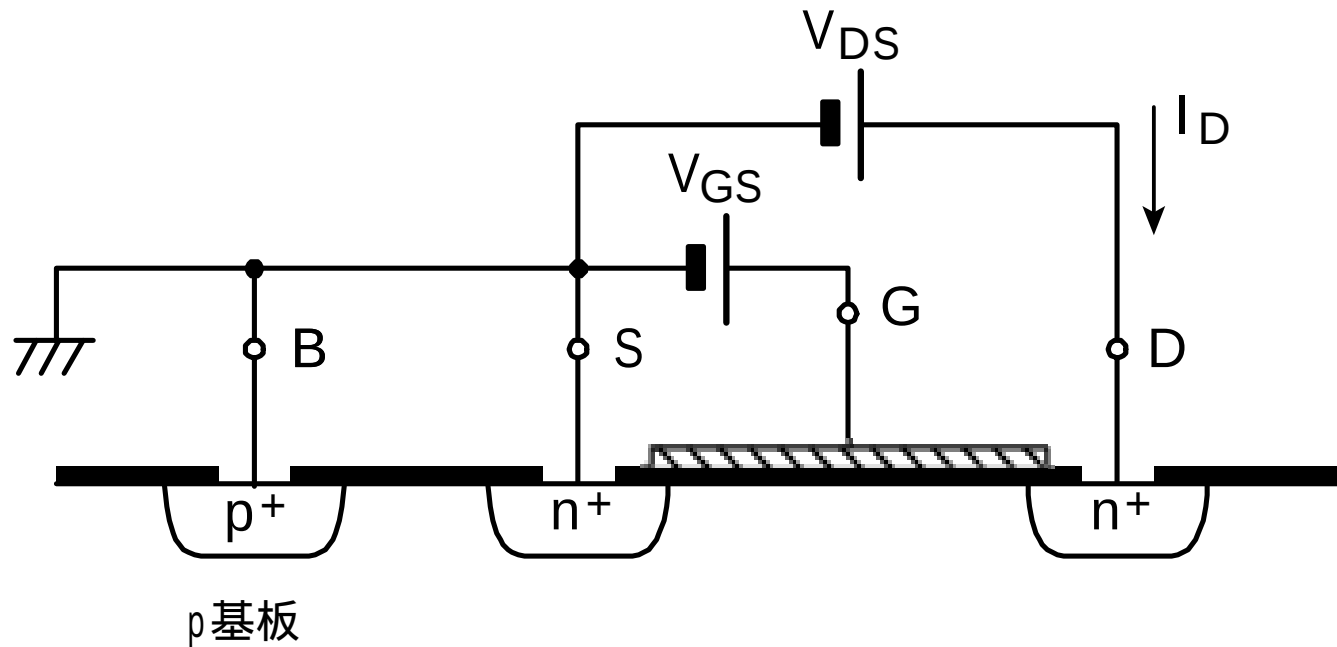
$$\frac{D_n}{\mu} = \frac{kT}{q} \quad (\text{アインシュタインの関係式})$$

$$f_T = \frac{\mu}{\pi W_B^2} \cdot \frac{kT}{q}$$

MOSトランジスタのモデリング



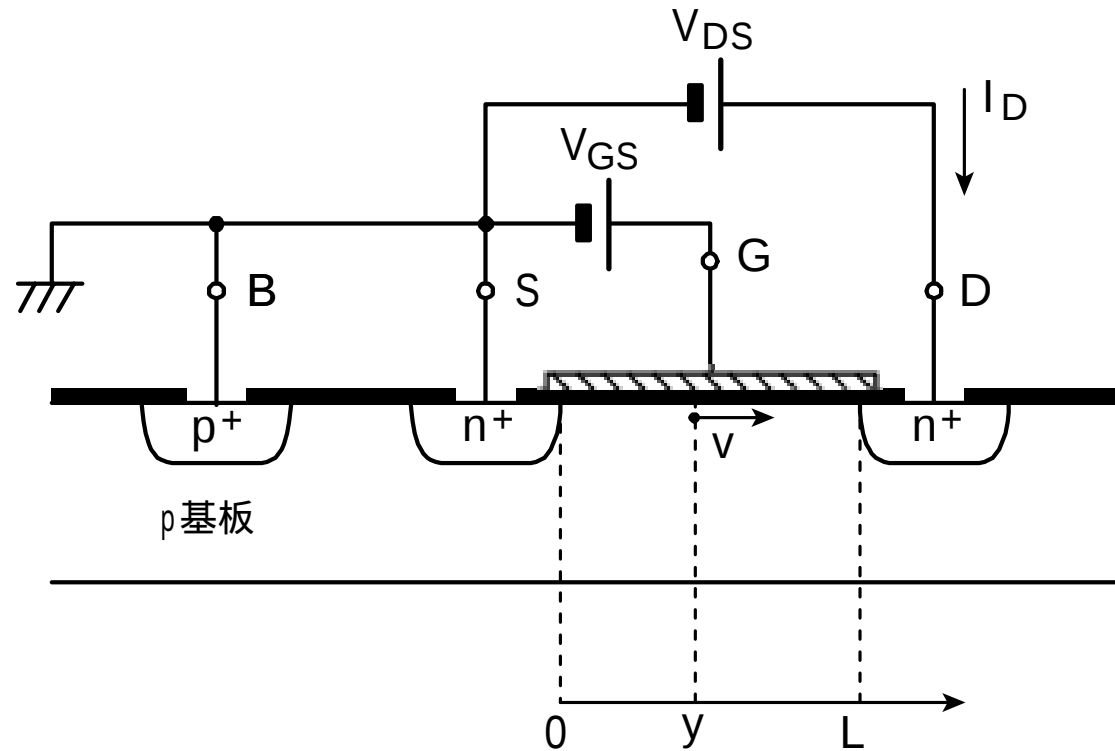
B: Bulk , バルク S: Source , ソース
G: Gate , ゲート D: Drain , ドレイン



$V_{SB}=0$ と仮定

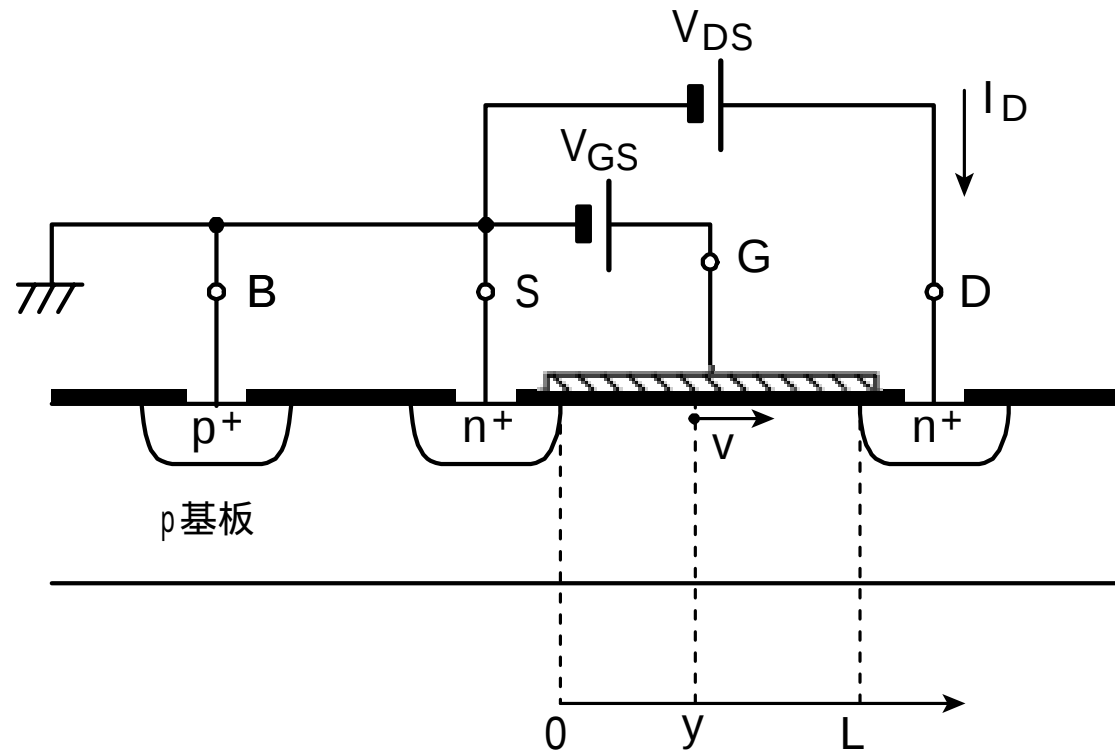
遮断領域：	$V_T \geq V_{GS}$
非飽和領域：	$V_{GS} - V_T > V_{DS} \geq 0$
飽和領域：	$V_{DS} \geq V_{GS} - V_T > 0$

非飽和領域： $V_{GS} - V_T > V_{DS} \geq 0$



地点 y におけるチャネルの電位： $V(y)$

地点 y における単位面積当たりの電荷： $Q(y)$



μ : 移動度

C_{OX} : 単位面積当たりのゲート酸化膜容量

$$Q(y) = -C_{OX} \{V_{GS} - V_T - V(y)\}$$

$$I_D = Q(y) \times W \times (-v)$$

$$Q(y) = -C_{OX} \{V_{GS} - V_T - V(y)\}$$

$$v = -\mu E$$

$$I_D = Q(y) \times W \times (-v)$$

$$E = -\frac{dV}{dy}$$

$$I_D = \mu C_{OX} W \{V_{GS} - V_T - V(y)\} \frac{dV}{dy}$$

$$\int_0^L I_D dy = \int_0^L \mu C_{OX} W \{V_{GS} - V_T - V(y)\} \frac{dV}{dy} dy$$

$$= \int_0^{V_{DS}} \mu C_{OX} W \{V_{GS} - V_T - V(y)\} dV$$

$$= \left[\frac{-1}{2} \mu C_{OX} W \{V_{GS} - V_T - V(y)\}^2 \right]_0^{V_{DS}}$$

$$I_D L = \mu C_{OX} W \left(V_{GS} - V_T - \frac{V_{DS}}{2} \right) V_{DS}$$

$$I_D = \mu C_{OX} \frac{W}{L} (V_{GS} - V_T - \frac{V_{DS}}{2}) V_{DS}$$

飽和領域： $V_{DS} \geq V_{GS} - V_T > 0$

$V_{DS} = V_{GS} - V_T$ となったときの I_D から変化しない。

2乗則

$$I_D = \frac{1}{2} \mu C_{OX} \frac{W}{L} (V_{GS} - V_T)^2$$

遮断領域： $V_T \geq V_{GS}$

非飽和領域： $V_{GS} - V_T > V_{DS} \geq 0$

飽和領域： $V_{DS} \geq V_{GS} - V_T > 0$

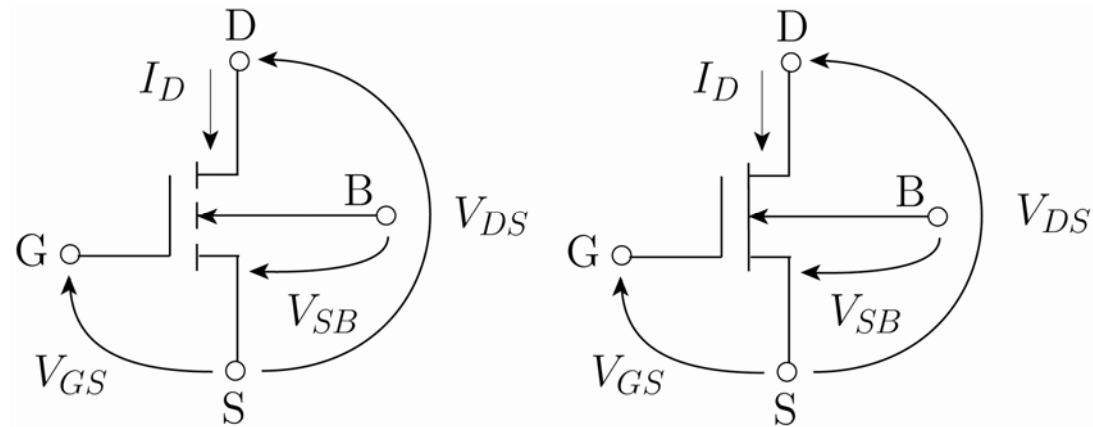
遮断領域： $I_D = 0$

非飽和領域： $I_D = 2K(V_{GS} - V_T - \frac{V_{DS}}{2})V_{DS}$

飽和領域： $I_D = K(V_{GS} - V_T)^2$

$K = \frac{1}{2}\mu C_{OX} \frac{W}{L}$: トランスコンダクタンスパラメータ

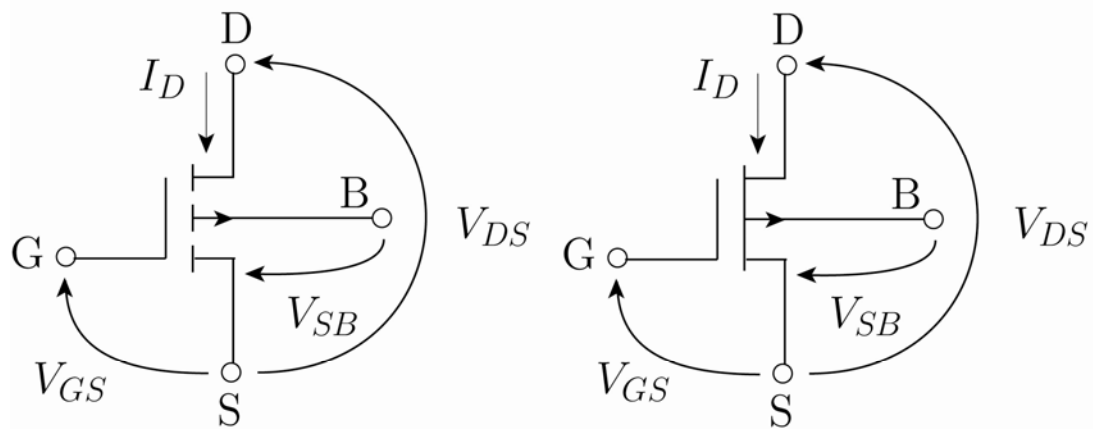
MOSトランジスタの記号



エンハンスメント型

ディプリーション型

nチャネルMOSトランジスタ



エンハンスメント型

ディプリーション型

pチャネルMOSトランジスタ

MOSトランジスタにおける2次的効果

基板効果

$$V_T = V_{T0} + \gamma(\sqrt{2\phi_F + V_{SB}} - \sqrt{2\phi_F})$$

チャネル長変調効果

$$I_D = K(V_{GS} - V_T)^2(1 + \lambda V_{DS})$$

MOSトランジスタの小信号等価回路

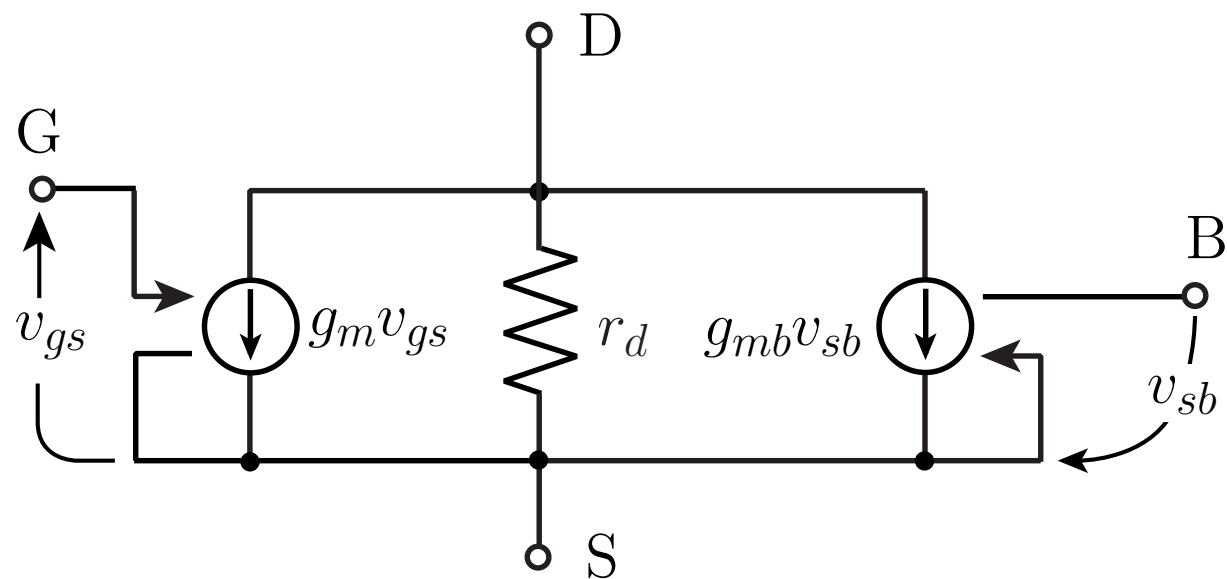
$$I_D = f(V_{GS}, V_{DS}, V_{SB})$$

$$\Delta I_D = \frac{\partial f}{\partial V_{GS}} \Delta V_{GS} + \frac{\partial f}{\partial V_{DS}} \Delta V_{DS} + \frac{\partial f}{\partial V_{SB}} \Delta V_{SB}$$

$$i_d = \frac{\partial f}{\partial V_{GS}} v_{gs} + \frac{\partial f}{\partial V_{DS}} v_{ds} + \frac{\partial f}{\partial V_{SB}} v_{sb}$$

$$\frac{\partial f}{\partial V_{GS}} = g_m, \quad \frac{\partial f}{\partial V_{DS}} = \frac{1}{r_d}, \quad \frac{\partial f}{\partial V_{SB}} = g_{mb}$$

一般的なMOSトランジスタの小信号モデル



例題

$$I_D = K(V_{GS} - V_T)^2(1 + \lambda V_{DS})$$

$$V_T = V_{T0} + \gamma(\sqrt{2\phi_F + V_{SB}} - \sqrt{2\phi_F})$$

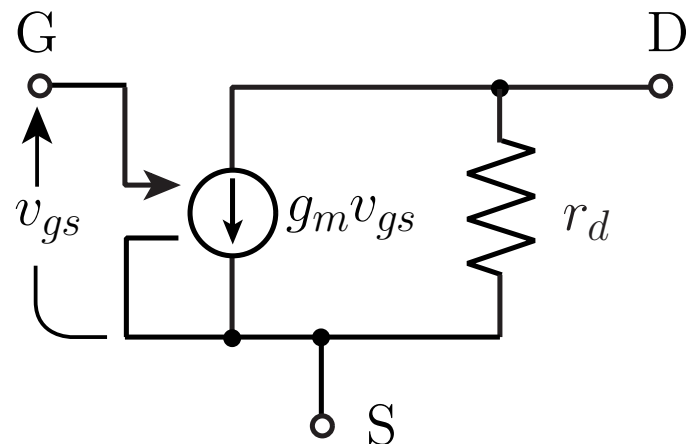
$$g_m = \frac{\partial f}{\partial V_{GS}} = 2K(V_{GS} - V_T)(1 + \lambda V_{DS})$$

$$= 2\sqrt{K I_D(1 + \lambda V_{DS})} \approx 2\sqrt{K I_D}$$

$$r_d = \frac{1}{\frac{\partial f}{\partial V_{DS}}} = \frac{1 + \lambda V_{DS}}{\lambda I_D} \approx \frac{1}{\lambda I_D}$$

$$g_{mb} = \frac{\partial f}{\partial V_{SB}} = \frac{\lambda g_m}{2\sqrt{2\phi_F + V_{SB}}}$$

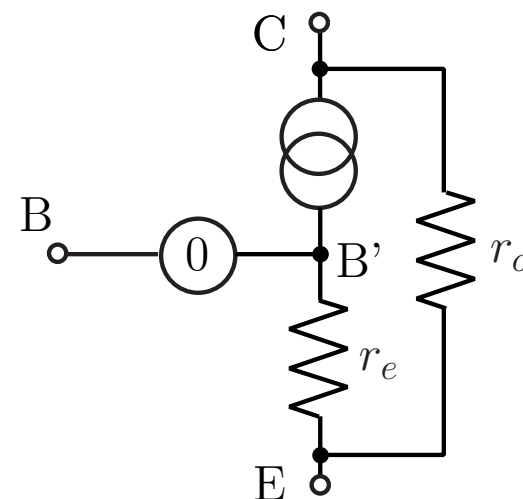
小信号モデルが等価となる条件



MOSトランジスタ

=

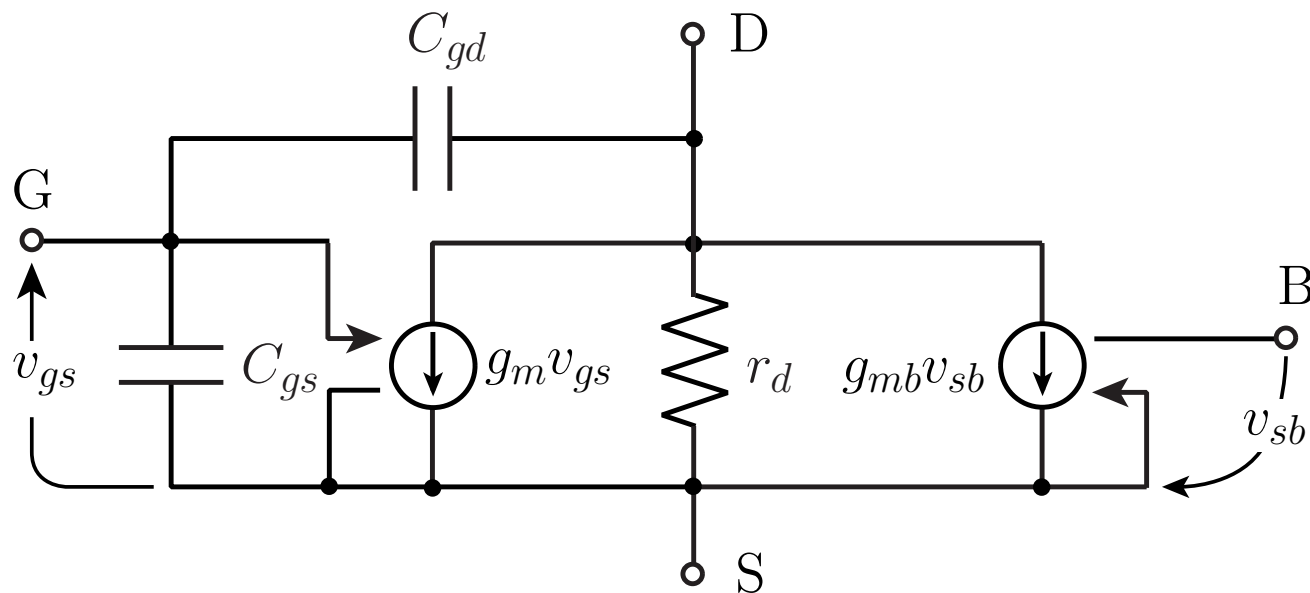
$$g_m = \frac{1}{r_e}$$
$$r_d = r_o$$



バイポーラトランジスタ

MOSトランジスタの高周波小信号モデル

基板間の寄生容量を考慮



C_{gs} は？

$Q(y) = -C_{OX} \{V_{GS} - V_T - V(y)\}$ より
ゲートに蓄えられている総電荷 Q_T は

$$\begin{aligned} Q_T &= -\int_0^L WQ(y)dy = \int_0^L \frac{\{WQ(y)\}^2 \mu \frac{dV}{dy}}{-WQ(y) \mu \frac{dV}{dy}} dy = \int_0^L \frac{\{WQ(y)\}^2 \mu \frac{dV}{dy}}{I_D} dy \\ &= \frac{\mu C_{OX}^2 W^2}{I_D} \int_0^{V_{DS}} \{V_{GS} - V_T - V(y)\}^2 dV(y) \end{aligned}$$

終端($y=L$)では, $V_{DS}=V_{GS}-V_T$ なので

$$Q_T = \frac{\mu C_{OX}^2 W^2}{I_D} \int_0^{V_{GS}-V_T} \{V_{GS}-V_T-V(y)\}^2 dV(y)$$

$$= \frac{\mu C_{OX}^2 W^2}{I_D} \left[\frac{-1}{3} \{V_{GS}-V_T-V(y)\}^3 \right]_0^{V_{GS}-V_T}$$

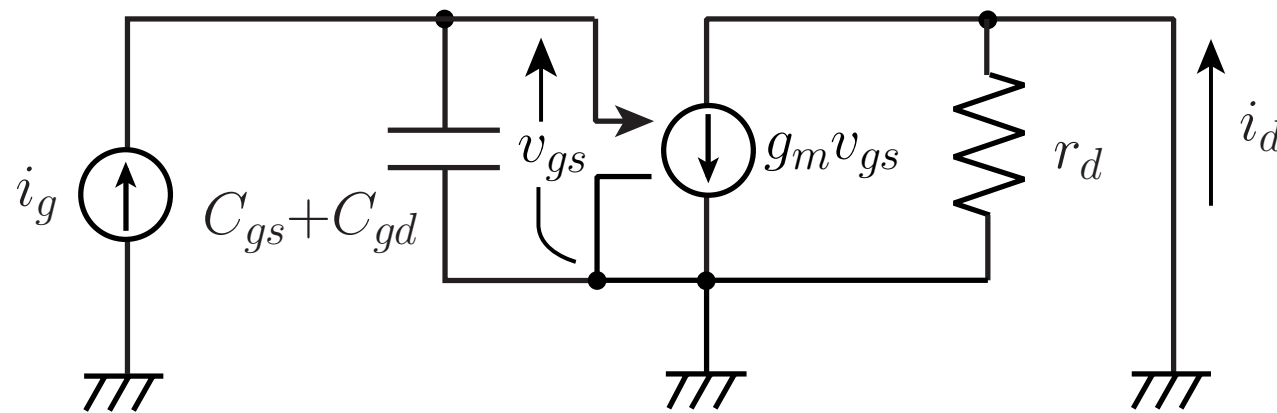
$$= \frac{\mu C_{OX}^2 W^2}{\frac{1}{2} \mu C_{OX} \frac{W}{L} (V_{GS}-V_T)^2} \left\{ 0 - \frac{-1}{3} (V_{GS}-V_T)^3 \right\}$$

$$= \frac{2}{3} C_{OX} W L (V_{GS}-V_T)$$

$$C_{gs} = \frac{\partial Q_T}{\partial V_{GS}} = \frac{2}{3} W L C_{OX}$$

MOSトランジスタの f_T

f_T : $|i_d| = |i_g|$ となる周波数



$$i_d = g_m v_{gs} = \frac{g_m}{j\omega(C_{gs} + C_{gd})} i_g$$

$$f_T = \frac{g_m}{2\pi(C_{gs} + C_{gd})} \approx \frac{g_m}{2\pi C_{gs}}$$

$$C_{gs} = \frac{\partial Q_T}{\partial V_{GS}} = \frac{2}{3}WL C_{OX}$$

$$g_m = 2K(V_{GS} - V_T) = \mu C_{OX} \frac{W}{L} (V_{GS} - V_T)$$

$$f_T = \frac{g_m}{2\pi C_{gs}} = \frac{3\mu}{4\pi L^2} (V_{GS} - V_T)$$

参考: バイポーラトランジスタ $f_T = \frac{\mu}{\pi W_B^2} \cdot \frac{kT}{q}$