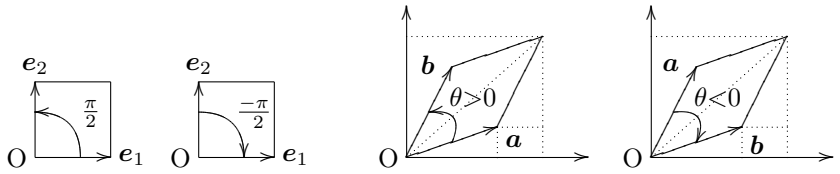
行列式と図形

この節では, 2次, 3次の実行列とベクトルを考える. 2次, 3次の実行列の行列式には幾何学的意味を与えることができる. 以下, 平面, 空間のベクトルは原点 O を始点とする有向線分 (又はその終点となる点) とみなす.

2次の行列式　平面上のベクトル $\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$ に対し, 行列式 $\det[\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}]=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc$ の絶対値が $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ の作る平行四辺形の面積 S に等しいことは色々な方法で確かめられる. 例えば, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ のなす角を θ $(0\leqq\theta\leqq\pi)$, $\boldsymbol{a}$ の長さ (大きさ) $\sqrt{a^2+c^2}$ を $\|\boldsymbol{a}\|$, $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ の内積 $ab+cd$ を $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ と書くと, $S=\|\boldsymbol{a}\|\,\|\boldsymbol{b}\|\sin\theta$ $(\sin\theta\geqq 0)$ より

$$\begin{aligned} S^2 &= \|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2\sin^2\theta = \|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2(1-\cos^2\theta) = \|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2-(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})^2 \\ &= (a^2+b^2)(c^2+d^2)-(ac+bd)^2 = (ad-bc)^2. \quad \therefore \quad S=|ad-bc|. \end{aligned}$$

($\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ が一直線上にあれば この平行四辺形はつぶれており 面積は 0 と考える.)
従って 2 次の行列式の値は $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の作る平行四辺形の **符号付き面積** を表している. 符号は, 座標軸方向の基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ に対し $|\boldsymbol{e}_1\,\boldsymbol{e}_2|=1$, $|\boldsymbol{e}_2\,\boldsymbol{e}_1|=-1$ であり, 一般には, 角 θ を $-\pi<\theta\leqq\pi$ の範囲で考え, $\boldsymbol{a}$ から $\boldsymbol{b}$ に向かって回るとき, 正回転 (= 反時計回り) なら θ には正の符号を, 負回転 (= 時計回り) なら θ には負の符号を付けると $\det[\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}]=\|\boldsymbol{a}\|\,\|\boldsymbol{b}\|\sin\theta$ になる.



そこで, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ を 2 辺とする平行四辺形には向きが付いていると考え, 行列式が正のときは表向きで面積も正, 負のときは裏向きで負の面積を持つ, と考える. このとき次がいえたことになる.

2 次の行列式と符号付き面積

行列式 $\det[\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}]=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ の値は $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の作る平行四辺形の符号付き面積に等しい.

行列 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=[\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}]$ の表す一次変換 $f(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}$ は $f(\boldsymbol{e}_1)=\boldsymbol{a}$, $f(\boldsymbol{e}_2)=\boldsymbol{b}$ であり, $\boldsymbol{e}_1$,$\boldsymbol{e}_2$ の作る単位正方形を $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の作る平行四辺形に移す. その面積の比は (単位正方形の面積が 1 なので) $|\det A|$ に等しく, $\det A<0$ のときは裏返る. このことは平面上のどんな図形に対しても成り立つ. 即ち

一次変換と行列式

行列式 $|A|=\det[\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}]=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ の値は行列 A の表す一次変換によって移る図形の符号付き面積の比を表す.

空間ベクトルの外積と行列式　空間の 2 つのベクトル $\boldsymbol{a}={}^t[a_1,a_2,a_3]$, $\boldsymbol{b}={}^t[b_1,b_2,b_3]$ に対し, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の **外積**, または **ベクトル積** といわれる空間ベクトル $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ が成分を用いて次の様に定められる:

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} a_2b_3-a_3b_2 \\ a_3b_1-a_1b_3 \\ a_1b_2-a_2b_1 \end{bmatrix}=\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}\boldsymbol{e}_1+\begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}\boldsymbol{e}_2+\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\boldsymbol{e}_3=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \boldsymbol{e}_1 \\ a_2 & b_2 & \boldsymbol{e}_2 \\ a_3 & b_3 & \boldsymbol{e}_3 \end{vmatrix} \quad \left(=\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & a_1 & b_1 \\ \boldsymbol{e}_2 & a_2 & b_2 \\ \boldsymbol{e}_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix}\right)$$

$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の内積を $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ のなす角を θ とするとき, $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ の長さ (大きさ) $\|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\|$ は,

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\|^2 &= (a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2 = (a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2 \\ &= \|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2-(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})^2 = \|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2\sin^2\theta \quad \therefore\ \|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\|=|\boldsymbol{a}\|\cdot\|\boldsymbol{b}\|\sin\theta \end{aligned}$$

より $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の作る平行四辺形の面積に等しい. また, $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ と空間ベクトル $\boldsymbol{c}={}^t[c_1,c_2,c_3]$ の内積は

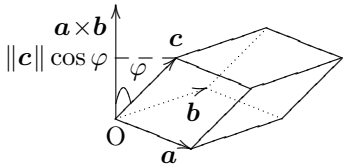
$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}c_1+\begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}c_2+\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}c_3=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=\det[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]$$

特に, $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ とおけば $|\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}|=0$ などより $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},\boldsymbol{b})=0$. 即ち $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ に直交している.
なお, $\det[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}]=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\|^2\geqq 0$ であり, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ が一直線上にあれば $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ になる.
$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ がそれぞれ右手の親指, 人差し指, 中指の上にあるとき ベクトルの組 $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]$ を右手系という. 基本ベクトルの組 $[\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]$ が右手系のとき座標系も右手系という. $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_1={}^t[1,0,0]$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{e}_2={}^t[0,1,0]$ のとき $\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2={}^t[0,0,1]=\boldsymbol{e}_3$ で, $[\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]$ が右手系のとき $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}]$ も右手系になる.

空間ベクトルの外積

$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の外積 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ は, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ に直交し, その長さ $\|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\|$ は $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の作る平行四辺形の面積に等しく, 右手系の座標系では $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}]$ も右手系になる.

一般の $\boldsymbol{c}$ に対し, $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c}$ のなす角を φ とすれば $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=\|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\|\cdot\|\boldsymbol{c}\|\cos\varphi$ で, $\|\boldsymbol{c}\|\cdot|\cos\varphi|$ は $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の作る平行四辺形からの高さになる. 従って $\|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\|\cdot\|\boldsymbol{c}\|\cos\varphi=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=\det[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]$ は $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ の作る平行六面体の符号付き体積になり, $\det[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]>0$ のとき $\cos\varphi>0$ より $\boldsymbol{c}$ は $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の作る平面に関し $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ と同じ側にあるので $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]$ は右手系, 逆に $\det[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]<0$ のとき $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]$ は左手系になる. (このとき図形は裏向きで負の体積をもつと考える.)



3 次の行列式

$\det[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$ は $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ の作る平行六面体の符号付き体積に等しく, その符号は, 右手系の座標系では $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]$ が右手系のとき正, 左手系のとき負になる.

なお, $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$ は $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ のスカラー三重積ともいわれる.
3 次の行列 $A=[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]$ の表す一次変換 $f(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}$ は $f(\boldsymbol{e}_1)=\boldsymbol{a}$, $f(\boldsymbol{e}_2)=\boldsymbol{b}$, $f(\boldsymbol{e}_3)=\boldsymbol{c}$ であり, $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ の作る単位立方体を $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ の作る平行六面体に移す. その体積の比は $|\det A|$ に等しく, $\det A<0$ のときは右手系を左手系に移す. このことは空間のどんな図形に対しても成り立つ. 即ち

一次変換と行列式

行列式 $|A|=\det[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]$ の値は行列 A の表す一次変換によって移る図形の符号付き体積の比を表す.

(一次変換と行列式の関係は微積分学における重積分の変数変換で用いられる.)