行列式の計算例

基本変形と次数低下法による計算

- 行基本変形 (定理 3.5) を用いて第 1 列を掃き出す.
- 次数低下法 I (定理 3.6) を用いて次数を下げる.
- これらを繰り返して, 1 次または 2 次の行列式の計算に帰着する.

基本的にはこの方法で行列式の値は計算できる. (列基本変形と次数低下法 (一般形) を用いても良い.)
(以下では sr_i は第 i 行から s を括り出す記号とする. sc_i も同様.)

例 1 (行基本変形と次数低下法による計算)

(1) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix} \overset{\substack{r_2-2r_1 \\ r_3-2r_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \underset{\text{例 12}}{=} 1 \cdot (-2) \cdot (-1) = 2,$

(2) $|B| = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} \underset{2r_2}{=} 2 \begin{vmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} \overset{r_1 \leftrightarrow r_2}{=} -2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 5 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} \overset{\substack{r_2-2r_1 \\ r_3-3r_1}}{=} -2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \underset{3.6}{=} -2 \cdot 1 \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \underset{3r_1}{=} -2 \cdot 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 6$

(3) $|C| = \begin{vmatrix} 100 & 101 & 102 \\ 101 & 102 & 103 \\ 102 & 102 & 100 \end{vmatrix} \overset{\substack{r_2-r_1 \\ r_3-r_1}}{=} \begin{vmatrix} 100 & 101 & 102 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} \overset{\substack{r_1-100r_2 \\ r_3-2r_2}}{=} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -4 \end{vmatrix} \overset{r_1 \leftrightarrow r_2}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} = 2$

上の例の Sarrus の公式による計算:
(1) $|A| = 1{\cdot}2{\cdot}5+2{\cdot}4{\cdot}2+3{\cdot}2{\cdot}4-3{\cdot}2{\cdot}2-2{\cdot}2{\cdot}5-1{\cdot}4{\cdot}4 = 2.$ (2) $|B| = 2{\cdot}2{\cdot}3+5{\cdot}2{\cdot}3+5{\cdot}2{\cdot}4-5{\cdot}2{\cdot}3-5{\cdot}2{\cdot}3-2{\cdot}2{\cdot}4 = 6.$
(3) $|C| = 100{\cdot}102{\cdot}100 + 101{\cdot}103{\cdot}102 + 102{\cdot}101{\cdot}102 - 102{\cdot}102{\cdot}102 - 101{\cdot}101{\cdot}100 - 100{\cdot}103{\cdot}102 = 2.$

例 2 (4 次の行列式) (Sarrus の公式は使えない.)

(1) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 5 & 1 \\ 4 & 8 & 7 & 9 \end{vmatrix} \overset{\substack{r_2-2r_1 \\ r_3-2r_1 \\ r_4-4r_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & -5 & -7 \end{vmatrix} \underset{3.6}{=} (-2) \begin{vmatrix} -1 & -7 \\ -5 & -7 \end{vmatrix} \underset{\substack{-r_1 \\ -r_2}}{=} (-2) \cdot (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} \overset{r_2-5r_1}{=} -2 \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 0 & -28 \end{vmatrix} = 56,$

(2) $|B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 2 & -2 \end{vmatrix} \overset{\substack{r_2+2r_1 \\ r_3-2r_1 \\ r_4+2r_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} \underset{3r_1}{=} 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} \overset{\substack{r_2+2r_1 \\ r_3-3r_1}}{=} 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -9$

(1) では $(-2) \begin{vmatrix} -1 & -7 \\ -5 & -7 \end{vmatrix} \underset{\substack{-c_1 \\ -7c_2}}{=} (-2)(-1)(-7) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \overset{r_2-5r_1}{=} -14 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = (-14)(-4) = 56$ や,
同上 $= (-2)\{(-1)(-7) - (-7)(-5)\} = (-2)(-28) = 56$ としても良い.

例 3 (基本変形と次数低下法 (一般形)(定理 3.17) を用いる例) ((3,3) 成分と (2,3) 成分を用いて次数低下)

$|A| = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} \overset{r_2-r_3}{=} \begin{vmatrix} 4 & -1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} \underset{3.17}{=} (-1)^{3+3}\, 2 \begin{vmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} \overset{c_1-2c_3}{=} 2 \begin{vmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ -5 & 3 & 3 \end{vmatrix} \underset{3.17}{=} 2(-1)^{2+3}2 \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -5 & 3 \end{vmatrix}$
$= (-4) \cdot (-6 - (-1)(-5)) = (-4)(-11) = 44$
(上の行の最終式で第 1 行の (-1) を行列式の外に出して計算しても良い.)

例 1 では $|B| = 2 \begin{vmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} \overset{\substack{r_1-2r_2 \\ r_3-3r_2}}{=} 2 \begin{vmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \underset{3.17}{=} -2 \cdot 1 \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$, $|C| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -4 \end{vmatrix} \underset{3{,}17}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -4 \end{vmatrix}$ としても良い.

例 4 対角成分が a, 他の成分が b の n 次の行列式 D_n を求める:
第 2 〜 n 列を第 1 列に加え, 第 1 列を掃き出すと:

$$D_n := \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & b \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & a & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & b \\ a+(n-1)b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a-b \end{vmatrix} \underset{\text{例 12}}{=} \{a+(n-1)b\}(a-b)^{n-1}$$

余因子展開を併用する方法

例 5 $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 0 \\ 1 & x-1 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & x-2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x-1 \end{vmatrix} \overset{c_3-c_2}{=} \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 1 & x-1 & 1-x & -1 \\ -2 & -1 & x-1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & x-1 \end{vmatrix} \underset{\text{第 1 行で展開}}{=} x \begin{vmatrix} x-1 & 1-x & -1 \\ -1 & x-1 & 1 \\ 1 & 0 & x-1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}1 \begin{vmatrix} 1 & 1-x & -1 \\ -2 & x-1 & 1 \\ 1 & 0 & x-1 \end{vmatrix}$

$= x\{(x-1)^3 + (1-x) \cdot 1 \cdot 1 + 0 - (-1)(x-1)1 - (1-x)(-1)(x-1) + 0\}$
$- \{1(x-1)^2 + (1-x)1 \cdot 1 + 0 - (-1)(x-1)1 - (1-x)(-2)(x-1) - 0\}$
$= x\{(x-1)^3 - (x-1)^2\} - \{-(x-1)^2\} = (x-1)^2\{x(x-1-1)+1\} = (x-1)^2(x-1)^2 = (x-1)^4$

例 6 (3 重対角行列) 対角成分が a, 対角成分の隣の成分が b, c, $(a_{i,i-1}=b,\ a_{i,i+1}=c)$ 他の成分が 0 の n 次の行列式 D_n の 漸化式を求める: 第 1 列で展開し, 第 2 項の次数を下げると:

$$D_1=a,\quad D_2=\begin{vmatrix} a & c \\ b & a \end{vmatrix}=a^2-bc,\quad D_3=\begin{vmatrix} a & c & 0 \\ b & a & c \\ 0 & b & a \end{vmatrix}=a\begin{vmatrix} a & c \\ b & a \end{vmatrix}+(-1)^{2+1}b\begin{vmatrix} c & 0 \\ b & a \end{vmatrix}=aD_2-bca,$$

$$D_4=\begin{vmatrix} a & c & 0 & 0 \\ b & a & c & 0 \\ 0 & b & a & c \\ 0 & 0 & b & a \end{vmatrix}=aD_3+(-1)^{2+1}b\begin{vmatrix} c & 0 & 0 \\ b & a & c \\ 0 & b & a \end{vmatrix}\underset{3.16}{=}aD_3-bc\begin{vmatrix} a & c \\ b & a \end{vmatrix}=aD_3-bcD_2,$$

$$D_n=\begin{vmatrix} a & c & & & \\ b & a & c & & \\ & b & a & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & c \\ & & & b & a \end{vmatrix}=aD_{n-1}-b\begin{vmatrix} c & & & & \\ b & a & c & & \\ & b & a & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & c \\ & & & b & a \end{vmatrix}\underset{3.16}{=}aD_{n-1}-bcD_{n-2}\quad (D_0{=}1,\ D_{-1}{=}0 \text{ として } n\geqq 1 \text{ で成立})$$

例 7 (余因子行列等) 例 1 の A の余因子行列 $\widetilde{A}$ と逆行列 A^{-1} を求める: $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$, $|A|=2$

$$\widetilde{a_{11}}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}=-6,\quad \widetilde{a_{12}}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}=-2,\quad \widetilde{a_{13}}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}=4,$$

$$\widetilde{a_{21}}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}=2,\quad \widetilde{a_{22}}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}=-1,\quad \widetilde{a_{23}}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}=0,$$

$$\widetilde{a_{31}}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}=2,\quad \widetilde{a_{32}}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}=2,\quad \widetilde{a_{33}}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}=-2,$$

$$\widetilde{A}={}^t[\widetilde{a_{ij}}]={}^t\begin{bmatrix} -6 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -6 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix},\quad A^{-1}=\frac{1}{|A|}\widetilde{A}=\frac{1}{2}\widetilde{A}=\begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ -1 & -1/2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

例 8 (Cramer の公式) a,b,c が互いに異なるとき, 次の方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{d}$ の解は Cramer の公式により,

$$\begin{cases} x+\ \ y+\ \ z=1 \\ ax+by+cz=d \\ a^2x+b^2y+c^2z=d^2 \end{cases},\quad x=\frac{(d-b)(b-c)(c-d)}{(a-b)(b-c)(c-a)},\ y=\frac{(a-d)(d-c)(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)},\ z=\frac{(a-b)(b-d)(d-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$

ここで, 分母は $|A|=(a-b)(b-c)(c-a)$. x,y,z の分子は, $|A|$ の a,b,c をそれぞれ d に置き換えたもの.
尚, これらの行列式は下に述べる Vandermonde の行列式なので, 値が差積になることが分る.

例 9 (分割行列の行列式) 一般に $\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix}\overset{c_1+c_2}{=}\begin{vmatrix} A{+}B & A \\ B{+}A & A \end{vmatrix}\overset{r_2-r_1}{=}\begin{vmatrix} A{+}B & A \\ O & A{-}B \end{vmatrix}=|A{+}B|\cdot|A{-}C|$ より

$$\begin{vmatrix} a{+}b{+}c & a{+}b & a & a \\ a{+}b & a{+}b{+}c & a & a \\ a & a & a{+}b{+}c & a{+}b \\ a & a & a{+}b & a{+}b{+}c \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2a{+}b{+}c & 2a{+}b \\ 2a{+}b & 2a{+}b{+}c \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} b{+}c & b \\ b & b{+}c \end{vmatrix}$$

$$=\{(2a{+}b{+}c){+}(2a{+}b)\}\{(2a{+}b{+}c){-}(2a{+}b)\}\{(b{+}c){+}b\}\{(b{+}c){-}b\}=(4a{+}2b{+}c)c(2b{+}c)c=c^2(4a{+}2b{+}c)(2b{+}c)$$

特殊で有用な行列式: Vandermonde の行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{1\leqq i<j\leqq n}(x_j-x_i)=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\prod_{1\leqq i<j\leqq n}(x_i-x_j)$$

ここで, 左辺を Vandermonde の行列式という. また, 中辺 (および右辺) を **差積**といい, $1\leqq i<j\leqq n$ となる組 (i,j) 全てにわたる $\frac{n(n-1)}{2}$ 項の積である.

計算 左辺の行列式の下の行から順に, すぐ上の行の x_1 倍を引いていき ($r_n-x_1r_{n-1},\ r_{n-1}-x_1r_{n-2},\ \ldots,\ r_2-x_1r_1$), 次数を 1 つ下げ, 各列から共通因数 (x_j-x_1) を行列式の外に括り出すと

$$\text{左辺}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2-x_1 & x_3-x_1 & \cdots & x_n-x_1 \\ 0 & (x_2-x_1)x_2 & (x_3-x_1)x_3 & \cdots & (x_n-x_1)x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & (x_2-x_1)x_2^{n-2} & (x_3-x_1)x_3^{n-2} & \cdots & (x_n-x_1)x_n^{n-2} \end{vmatrix}=\prod_{j=2}^{n}(x_j-x_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

以下帰納的に, 左辺 $=\prod_{j=2}^{n}(x_j-x_1)\times\prod_{j=3}^{n}(x_j-x_2)\times\cdots\times(x_n-x_{n-1})=$ 右辺.

別証 左辺 V は $x_1,\ldots,x_n$ の $1{+}2{+}\cdots{+}(n{-}1)=\frac{1}{2}n(n-1)$ 次の多項式で, $x_i{=}x_j$ とすると V は ($c_i{=}c_j$ より) 0 になる. よって因数定理により $x_j{-}x_i$ は V の因数になる. これが $i{\neq}j$ なる全ての i,j に対して成り立つので V は差積で割り切れるが, 次数が等しいので V は差積の定数倍 (c 倍) になる. 両辺の $x_2x_3^2\cdots x_n^{n-1}$ の係数は 1 なので $c{=}1$ で, 両辺は等しい.

終結式 (resultant, Sylvester (シルヴェスター) の行列式) と判別式 n 次と m 次の多項式

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0\ (a_n\neq 0),\quad g(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_0\ (b_m\neq 0)$$

に対し, 次の $(m+n)$ 行列 R の行列式 $r(f,g)=|R|$ を**終結式 (resultant)** (**Sylvester の行列式**) という.

$$R=\begin{bmatrix} a_n & a_{n-1} & \cdots & a_0 & & & O \\ & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_0 & & \\ O & & \ddots & \ddots & & \ddots & \\ & & & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_0 \\ b_m & b_{m-1} & \cdots & b_0 & & & \\ & b_m & b_{m-1} & \cdots & b_0 & & O \\ O & & \ddots & \ddots & & \ddots & \\ & & & b_m & b_{m-1} & \cdots & b_0 \end{bmatrix},\quad R\begin{bmatrix} x^{n+m-1} \\ x^{n+m-2} \\ \vdots \\ x^n \\ \vdots \\ x \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} f(x)x^{m-1} \\ f(x)x^{m-2} \\ \vdots \\ f(x) \\ g(x)x^{n-1} \\ \vdots \\ g(x) \end{bmatrix}\qquad\cdots(*)$$

即ち R は, $(m+n-1)$ 次 (以下) の $(m+n)$ 個の連立方程式 $f(x)x^{m-1}=0,\ldots,f(x)=0,\ g(x)x^{n-1}=0,\ldots,g(x)=0$ の係数行列, つまりこれらの方程式中の $x^{n+m-1},\ldots,x,1$ を $x_1,\ldots,x_{n+m-1},x_{n+m}$ に置き換えて得られる連立一次方程式の係数行列である. このとき

> **定理 1** $f(x)=0,\ g(x)=0$ は共通根 (=共通解) をもつ $\Leftrightarrow r(f,g)=0$

また, $f(x)=0$ が重根をもつ $\Leftrightarrow f'(x)=na_nx^{n-1}+\cdots+a_1$ と $f(x)=0$ が共通根をもつ $\Leftrightarrow r(f,f')=0$, より

$$r(f,f')=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_nD(f),\quad D(f):=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}r(f,f')/a_n$$

とおき, $D(f)$ を f の**判別式 (discriminant)** という. $f(x)=ax^2+bx+c$ のとき

$$r(f,f')=\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2a & b & 0 \\ 0 & 2a & b \end{vmatrix}=ab^2+4a^2c-2ab^2=4a^2c-ab^2=-a(b^2-4ac),\ D(f)=b^2-4ac$$

定理 1 の証明 $(\Rightarrow)$ $f(\alpha)=0,\ g(\alpha)=0$ とすると連立一次方程式 $R\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ は自明でない解 $\boldsymbol{x}={}^t[\alpha^{n+m-1}\cdots\alpha\,1]$ をもつ, $\therefore$ rank $R<m+n$. $\Leftrightarrow R$ は正則でない $\Leftrightarrow r(f,g)=|R|=0$.

$(\Leftarrow)$ R の余因子行列 $\widetilde{R}$ は $\widetilde{R}R=|R|E$ をみたすので, 上の式 $(*)$ の右の式の両辺に左から $\widetilde{R}$ を掛ける. 最下行 (=$n+m$ 行) に注目して $\widetilde{R}$ の最下行を $[c_1\cdots c_m\,d_1\cdots d_n]$ とすれば

$$|R|E\begin{bmatrix} x^{n+m-1} \\ \vdots \\ x^n \\ \vdots \\ x \\ 1 \end{bmatrix}=\widetilde{R}\begin{bmatrix} f(x)x^{m-1} \\ \vdots \\ f(x) \\ g(x)x^{n-1} \\ \vdots \\ g(x) \end{bmatrix},\quad \begin{aligned} &\text{最下行: } |R|1= \\ &c_1f(x)x^{m-1}+\cdots+c_mf(x)+d_1g(x)x^{n-1}+\cdots+d_ng(x) \\ &=(c_1x^{m-1}+\cdots+c_m)f(x)+(d_1x^{n-1}+\cdots+d_n)g(x) \\ &=h(x)f(x)+k(x)g(x) \\ &(h(x)=c_1x^{m-1}+\cdots+c_m,\ k(x)=d_1x^{n-1}+\cdots+d_n) \end{aligned}$$

即ち $r(f,g)=|R|=h(x)f(x)+k(x)g(x)$. $r(f,g)=0$ のとき $h(x)f(x)=-k(x)g(x)$. $k(x)$ は $n-1$ 次以下, $h(x)$ は $m-1$ 次以下で, それぞれ $g(x)$, $f(x)$ より低次なので $f(x)$ と $g(x)$ は共通因数をもつ. ($h(x)$ と $k(x)$ からこれらの共通因数を除いたものを $h_1(x),k_1(x)$ とすれば $g(x),f(x)$ は $h_1(x),k_1(x)$ で割り切れ, $f(x)/k_1(x)=-g(x)/h_1(x)$ が $f(x)$ と $g(x)$ の (1 次以上の) 共通因数になる.)