逆行列の計算例

例 1 $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \\ 5 & 8 & 4 \end{bmatrix}$ が正則であるか調べ，正則ならば逆行列を求めよ．

解答

基本変形	A	E	基本行列との積
	$\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 8 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}$		$[A, E] = A_1$
$r_2 - 3r_1$ $r_3 - 5r_1$	$\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -5 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & -6 & -5 & 0 & 1 \end{array}$		$P_{31}(-5)P_{21}(-3)A_1 = A_2$
$r_2 - r_3$	$\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -7 & -6 & -5 & 0 & 1 \end{array}$		$P_{23}(-1)A_2 = A_3$
$r_1 - 3r_2$ $r_3 + 7r_2$	$\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & -1 & -5 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & 7 & -6 \end{array}$		$P_{32}(7)P_{12}(-3)A_3 = A_4$
$r_1 + r_3$ $r_2 - r_3$	$\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 4 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -7 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & 7 & -6 \end{array}$		$P_{23}(-1)P_{13}(1)A_4 = A_5$

A の階段行列 B が単位行列 E になったので A は正則で，$A^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & -3 \\ 7 & -6 & 5 \\ 9 & 7 & -6 \end{bmatrix}$

注意 1 A^{-1} および A は基本行列の積として次の様に表せる．$A^{-1} = P_{23}(-1)P_{13}(1)P_{32}(7)P_{12}(-3)P_{23}(-1)P_{31}(-5)P_{21}(-3)$. $A = (A^{-1})^{-1} = P_{21}(3)P_{31}(5)P_{23}(1)P_{12}(3)P_{32}(-7)P_{13}(-1)P_{23}(1)$. (但し, この表し方は一意的ではない.)

同様に，A が正則のときは $[A, C]$ を行変形すれば $[B, PC] = [E, A^{-1}C]$ となり，$A^{-1}C$ が求まる．

例 2 $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ とし, 例 1 の A に対し $A^{-1}C$ を求めよ．

解答 $[A, C]$ に対し, 例 1 の解答と同じ行変形を行えば $A^{-1}C$ を得る：

$$[A, C] = \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 1 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 8 & 4 & 7 & 8 & 9 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 4 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -4 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 5 & 15 \end{array}\right] = [E, PC] = [E, A^{-1}C]$$

問 1 この計算を実行せよ．また, A^{-1} と C の掛算を行って一致することを確かめよ．

例 3 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ が正則であるかどうかを調べ，正則ならば逆行列を求めよ．

解答

$[A, E] =$	$\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array}$	$r_2 - r_1$ $r_3 - r_1$	$\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 6 & 6 & 6 & -1 & 0 & 1 \end{array}$	$r_3 - 2r_2$	$\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}$		

この段階で, A の階段行列は E_3 にはならず, A は正則でないことが分る．参考の為, 行変形を続けると:

$r_2 - 3r_1$	$\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}$	$-1/3r_2$	$\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}$	$r_1 - 2r_2$	$\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & -1 & -5/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}$		

より $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \neq E_3$. $P = \begin{bmatrix} -5/3 & 2/3 & 0 \\ 4/3 & -1/3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$, $PA = \begin{bmatrix} -5/3 & 2/3 & 0 \\ 4/3 & -1/3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B$ であり,

$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 7 & 8 & 1 \end{bmatrix}$ となっている．

列ベクトルの一次独立性

連立一次方程式の解法例の検算の項で見た様に, 軸列でない列は軸列の一次結合として表される. 即ち, 一般に次が成り立つ.

定理 (B) (一次独立性定理) $m\times n$ 行列 $A=[\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \cdots\ \boldsymbol{a}_n]$ の階段行列を $B=PA$ (P は正則) とし, rank $A=r$, 軸列は $q_1,q_2,\ldots,q_r$ 列とする, 即ち

$$PA=B=[\boldsymbol{b}_1\ \boldsymbol{b}_2\ \ldots\ \boldsymbol{b}_n]=[b_{ij}]=\left[\begin{array}{ccccccc} & q_1 & & q_2 & \cdots & q_r & \\ & \boldsymbol{e}_1 & * & \boldsymbol{e}_2 & \cdots & \boldsymbol{e}_r & \cdots \end{array}\right]=\left[\begin{array}{ccccccc} q_1 & & q_2 & \cdots & q_r & & \\ 1 & * & 0 & & 0 & & \\ & & 1 & * & \vdots & * & \\ & & & \ddots & 0 & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & & \end{array}\right]$$

とするとき, A の軸列 $\boldsymbol{a}_{q_1},\boldsymbol{a}_{q_2},\ldots,\boldsymbol{a}_{q_r}$ (r 個) は一次独立であり,
他の列 $\boldsymbol{a}_j$ はこれらの一次結合として, B の第 j 列 $\boldsymbol{b}_j$ の成分を用いて

$$q_i<j<q_{i+1}\Rightarrow \boldsymbol{a}_j=\boldsymbol{a}_{q_1}b_{1j}+\boldsymbol{a}_{q_2}b_{2j}+\cdots+\boldsymbol{a}_{q_i}b_{ij}=\sum_{k=1}^{i}\boldsymbol{a}_{q_k}b_{kj}\quad (i=1,\ldots,r,\ q_{r+1}=n{+}1)$$

と表される. 特に

$$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_n \text{ の中の一次独立なベクトルの組の最大個数 } = \operatorname{rank} A$$

証明 $PA=[P\boldsymbol{a}_1\cdots P\boldsymbol{a}_n]=B=[\boldsymbol{b}_1\cdots\ \boldsymbol{b}_n]$ より $P\boldsymbol{a}_j=\boldsymbol{b}_j$. $\therefore\ \boldsymbol{a}_j=P^{-1}\boldsymbol{b}_j\quad (j=1,\ldots,n)$. 特に $P\boldsymbol{a}_{q_i}=\boldsymbol{b}_{q_i}=\boldsymbol{e}_i$ $(i=1,\ldots,r)$ が成り立つ. このとき A の軸列から作った行列 $[\boldsymbol{a}_{q_1}\ \cdots\ \boldsymbol{a}_{q_r}]$ に同じ行変形を行えば次の形の階段行列になる：

$$P[\boldsymbol{a}_{q_1}\ \cdots\ \boldsymbol{a}_{q_r}]=[P\boldsymbol{a}_{q_1}\ \cdots\ P\boldsymbol{a}_{q_r}]=[\boldsymbol{e}_1\ \cdots\ \boldsymbol{e}_r]=\begin{bmatrix}E_r\\ O\end{bmatrix}$$

$\therefore$ rank $[\boldsymbol{a}_{q_1}\ \cdots\ \boldsymbol{a}_{q_r}]=r$. 「個数=階数」より $\boldsymbol{a}_{q_1},\ldots,\boldsymbol{a}_{q_r}$ は一次独立. (定理 (A))
$q_i<j<q_{i+1}$ のとき (階段行列の定義より第 j 列 $\boldsymbol{b}_j$ の第 $i{+}1$ 行以下は 0 であり,)

$$\boldsymbol{b}_j=\boldsymbol{e}_1b_{1j}+\boldsymbol{e}_2b_{2j}+\cdots+\boldsymbol{e}_ib_{ij}=\sum_{k=1}^{i}\boldsymbol{e}_kb_{kj}\quad (b_{i+1,j}=\cdots=b_{mj}=0)$$

と表せるので 左から P^{-1} を掛けて

$$\boldsymbol{a}_j=P^{-1}\boldsymbol{b}_j=P^{-1}\boldsymbol{e}_{q_1}b_{1j}+\cdots+P^{-1}\boldsymbol{e}_{q_i}b_{ij}=\boldsymbol{a}_{q_1}b_{1j}+\cdots+\boldsymbol{a}_{q_i}b_{ij}=\sum_{k=1}^{i}\boldsymbol{a}_{q_k}b_{kj}$$

と表せる. (この証明は, 階段行列においては列ベクトルの間の一次関係式が簡単になることと, 行列を掛けることがベクトルの間の一次関係式を保つ, 即ち, 一般に $\boldsymbol{w}_i=Q\boldsymbol{v}_i$ $(i=1,\cdots,n)$, $s_1\boldsymbol{v}_1+\cdots+s_n\boldsymbol{v}_n=\boldsymbol{0}$ ならば

$$s_1\boldsymbol{w}_1+\cdots+s_n\boldsymbol{w}_n=s_1Q\boldsymbol{v}_1+\cdots+s_nQ\boldsymbol{v}_n=Q(s_1\boldsymbol{v}_1+\cdots+s_n\boldsymbol{v}_n)=Q\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}$$

が成り立つことを用いている.)